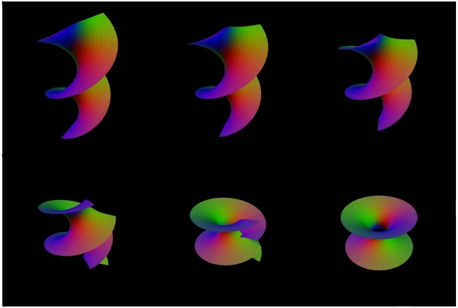
CM-S2 : Aspects métriques des surfaces paramétrées

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Une famille de surfaces isométriques

Première forme fondamentale

• On suppose désormais que $\mathbb{R}^3$ est muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

• Soient $f : \mathcal{U} \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière et

$$\gamma : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ t & \longmapsto & (u(t), v(t)) \end{array}$$

une courbe régulière. La courbe

$$\overline{\gamma} := f \circ \gamma : I \longrightarrow S$$

est une courbe paramétrée dont le support est inclu dans S. On dit alors que la courbe est ≪ tracée sur la surface ≫ .

Première forme fondamentale

- La longueur de $\overline{\gamma}$ est

$$\begin{aligned} Long(\overline{\gamma}) &= \int_I \|(\overline{\gamma})'(t)\| dt \\ &= \int_I \langle \frac{\partial}{\partial t}(f\circ\gamma)(t), \frac{\partial}{\partial t}(f\circ\gamma)(t)\rangle^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_I \left(Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

avec

$$E(u,v) = \|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\|^2 \qquad G(u,v) = \|\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\|^2$$

$$F(u,v) = \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle.$$

Première forme fondamentale

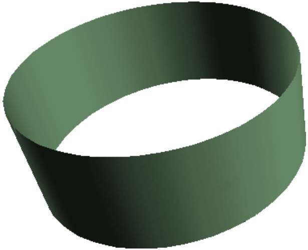
- La longueur de γ est

$$\begin{aligned} Long(\gamma) &= \int_I \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_I \left(u'(t)^2 + v'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

Proposition.– *Le paramétrage $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ préserve la longueur des courbes ssi*

$$\forall u, v \in \mathcal{U}, \quad E(u,v) = G(u,v) = 1 \quad et \quad F(u,v) = 0.$$

Première forme fondamentale

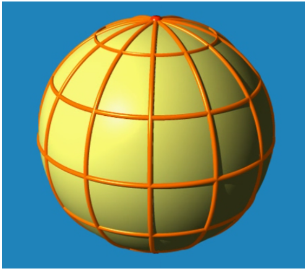


Exemple 1.– Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\cos(u), \sin(u), v) \end{array}$$

Un calcul immédiat montre que $E = G = 1$ et $F = 0$: la longueur des courbes est donc préservée.

Première forme fondamentale



Exemple 2.– Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\} \\ & (u,v) & \longmapsto & (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)) \end{array}$$

Un calcul immédiat montre que $E = \sin^2(v)$, $G = 1$ et $F = 0$: la longueur des courbes $u \longmapsto f(u, v_0)$ n'est pas préservée sauf si $v_0 = \frac{\pi}{2}$.

Première forme fondamentale

• On suppose que $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ est injective et régulière.

Définition.– Soit $p \in S$. On appelle PREMIÈRE FORME FONDAMENTALE et on note $I_p(.,.)$ la forme bilinéaire sur T_pS qui est la restriction à T_pS du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit :

$$\forall X, Y \in T_pS, \quad I_p(X, Y) := \langle X, Y \rangle.$$

• Supposons $p = f(u, v)$ et écrivons X et Y dans la base $(f_u(u, v), f_v(u, v))$ de T_pS :

$$X = X_u f_u + X_v f_v \quad \text{et } Y = Y_u f_u + Y_v fv.$$

Première forme fondamentale

- On a alors

$$\begin{aligned} I_p(X,Y) &= \langle X, Y\rangle \\ &= \langle X_u f_u + X_v f_v, Y_u f_u + Y_v fv\rangle \\ &= X_u Y_u \langle f_u, f_u\rangle + X_v Y_v \langle f_v, f_v\rangle \\ &\quad +(X_u Y_v + X_v Y_u)\langle f_u, f_v\rangle \\ &= X_u Y_u E(u,v) + X_v Y_v G(u,v). \\ &\quad +(X_u Y_v + X_v Y_u) F(u,v) \end{aligned}$$

- La matrice de I_p dans la base (f_u, f_v) est donc

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Première forme fondamentale

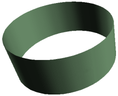
• En particulier

$$I_p(X,Y) = (X_u, X_v)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_u \\ Y_v \end{pmatrix}$$

Définition.– Les fonctions E, F et G sont appelées les COEFFICIENTS DE LA PREMIÈRE FORME FONDAMENTALE dans la base (f_u, f_v).

Observation.– La formule donnant la longueur de $\overline{\gamma}$ s'écrit maintenant

$$Long(\overline{\gamma}) = \int_I \sqrt{I_p(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt.$$



Première forme fondamentale

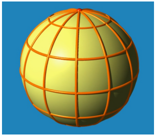
Exemple 1 (suite).– Dans la base

$$f_u = (-\sin(u), \cos(u), 0), \quad f_v = (0, 0, 1)$$

la matrice de la première forme fondamentale du cylindre est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est indépendante du point $p = f(u, v)$ choisi.



Première forme fondamentale

Exemple 2 (suite).– Dans la base

$$f_u = (-\sin(u)\sin(v), \cos(u)\sin(v), 0)$$

$$f_v = (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), -\sin(v))$$

la matrice de la première forme fondamentale de la sphère privée du pôle nord et du pôle sud est

$$\begin{pmatrix} \sin^2(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle ne dépend que de v.

Première forme fondamentale

Définition.– Deux surfaces paramétrées régulières et injectives

$$f_i : \mathcal{U} \longrightarrow S_i$$

$i = 1$ ou 2, sont dites ISOMÉTRIQUES si les cœfficients de la première forme fondamentale de f_1 calculés dans la base $((f_1)_u, (f_1)_v)$ sont égaux à ceux de f_2 calculés dans la base $((f_2)_u, (f_2)_v)$, autrement dit, si

$$\|\frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v)\|^2 = \|\frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v)\|^2 \qquad \|\frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v)\|^2 = \|\frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v)\|^2$$

$$\langle \frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v)\rangle = \langle \frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v)\rangle$$

Première forme fondamentale

• En particulier, si f_1 et f_2 sont isométriques alors pour toute courbe régulière

$$\gamma : I \longrightarrow \mathcal{U}$$

on a

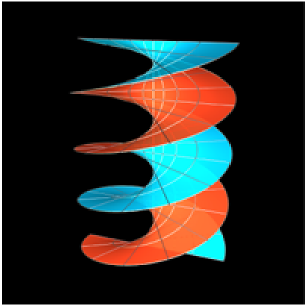
$$Long(f_1 \circ \gamma) = Long(f_2 \circ \gamma).$$

Exemple 3.– Soient

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos(u), \sin(u), v) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u, v, 0) \end{array}$$

D'après les calculs faits à l'exemple 1, les surfaces paramétrées f_1 et f_2 sont isométriques.

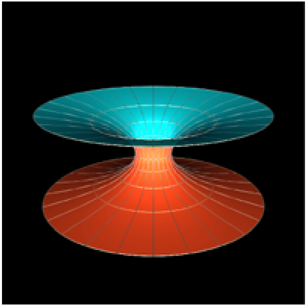
Première forme fondamentale



Exemple 4.– Soit

$$\begin{array}{rccl} f_1 : &]0,2\pi[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & (u,v) & \longmapsto & (sh(v)\cos(u), sh(v)\sin(u), u) \end{array}$$

Première forme fondamentale



Et soit

$$\begin{array}{rlcl} f_2 : &]0, 2\pi[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & (u, v) & \longmapsto & (-ch(v)\sin(u), ch(v)\cos(u), v) \end{array}$$

Première forme fondamentale

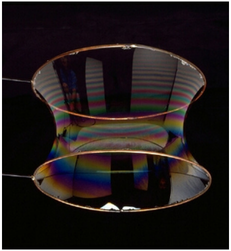
- On a

$$\|\frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v)\|^2 = \|\frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v)\|^2 = ch^2 v$$

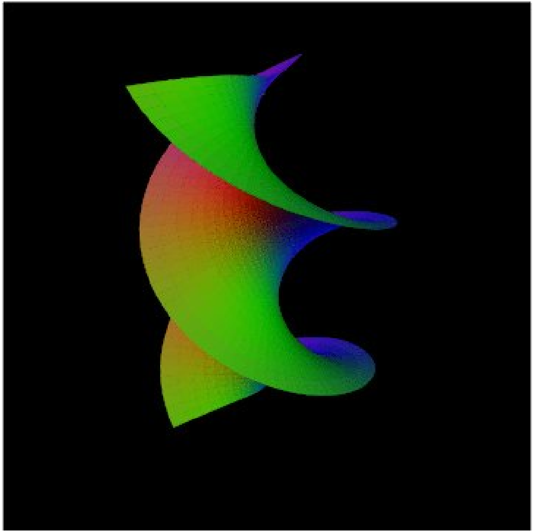
$$\|\frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v)\|^2 = \|\frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v)\|^2 = ch^2 v$$

$$\langle\frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v)\rangle = \langle\frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v)\rangle = 0$$

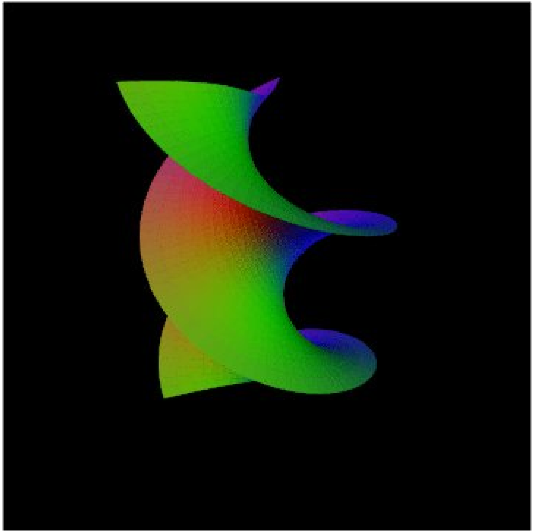
donc f_1 et f_2 sont isométriques.



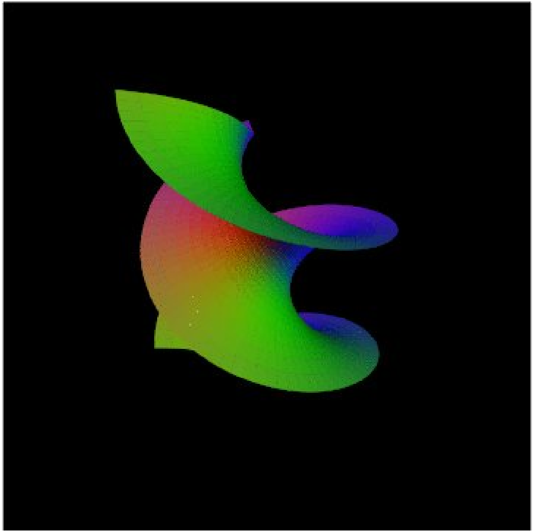
Première forme fondamentale



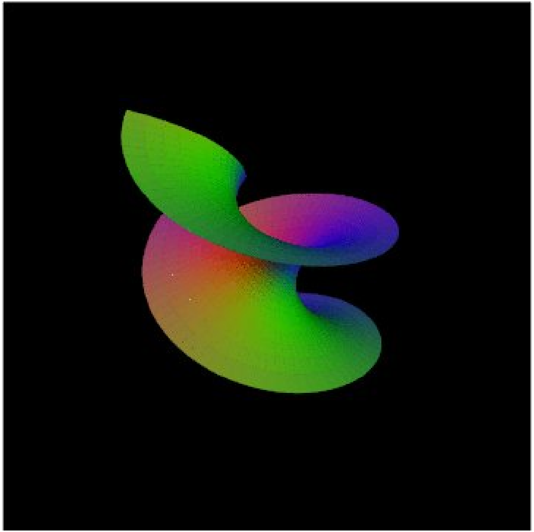
Première forme fondamentale



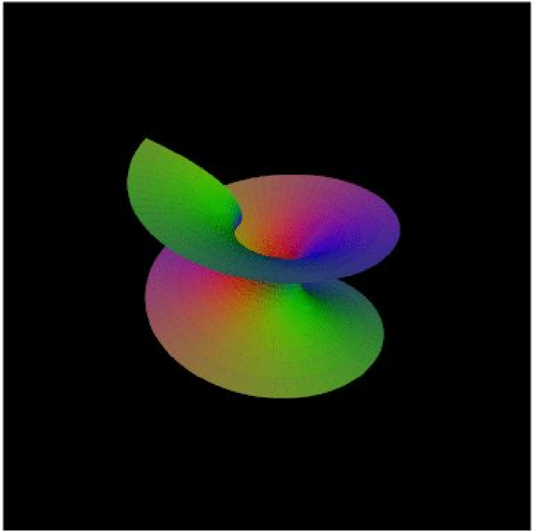
Première forme fondamentale



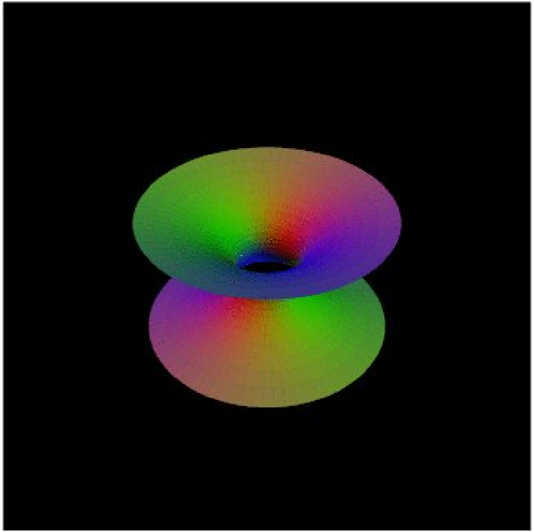
Première forme fondamentale



Première forme fondamentale



Première forme fondamentale



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

• L'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, un véritable génie.

• Gauss n'ayant publié qu'une partie infime de ses découvertes, la postérité découvre la profondeur et l'étendue de son œuvre uniquement lorsque son journal intime, publié en 1898, est découvert et exploité.

• Distant et austère, il détestait enseigner et ne travailla jamais comme professeur de mathématiques.

• Gauss était profondément pieux et conservateur. Il soutint la monarchie et s'opposa à Napoléon qu'il vit comme un semeur de révolution.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

• Il apporta des contributions majeures en théorie des nombres, en statistiques, en analyse, en géométrie differentielle, en geophysique, en electrostatique, en astronomie et en optique.

• Concernant cette séance, c'est lui le premier qui a compris l'importance de la première forme fondamentale : elle détermine complètement la géométrie intrinsèque de la surface.

• A ce sujet il découvre un théorème merveilleux, le célébrissime *Theorema egregium* que nous verrons dans la leçon intitulée *Courbure*.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

• Une histoire apocryphe : prévenu au milieu d'un problème que sa femme était en train de mourir Gauss aurait répondu : « Dites lui d'attendre un moment que j'aie fini. »

Aire d'une surface paramétrée

Définition.– Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ une surface paramétrée régulière. On appelle AIRE DE f le nombre

$$Aire(f) := \int_{\mathcal{U}} \|f_u \wedge f_v\| dudv.$$

• Rappelons que $\|X \wedge Y\|$ est l'aire du parallélogramme formé par X et Y.

• L'identité de Lagrange

$$\|X\|^2\|Y\|^2 = \|X \wedge Y\|^2 + \langle X, Y\rangle^2$$

donne ici

$$\begin{aligned} \|X \wedge Y\|^2 &= \|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2 \\ &= EG - F^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Aire d'une surface paramétrée

• Ainsi

$$Aire(f) := \int_{\mathcal{U}} \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

• Notons que

$$EG - F^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|f_u \wedge f_v\| = 0.$$

Par conséquent :

Lemme.– *Une surface paramétrée $f : \mathcal{U} \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ est régulière en $p \in \mathcal{U}$ ssi*

$$(EG - F^2)(p) \neq 0.$$

Aire d'une surface paramétrée

Proposition.– *Soit* $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ *un* C^1*-difféomorphisme et* $g = f \circ \varphi$ *une reparamétrisation alors*

$$Aire(g) = Aire(f).$$

Démonstration.– On écrit

$$dg_{(u',v')} = df_{\varphi(u',v')} \circ d\varphi_{(u',v')}$$

sous forme matricielle :

$$(g_u, g_v)\,(u', v') = (f_u, f_v)_{\varphi(u',v')} \begin{pmatrix} (\varphi_1)_{u'} & (\varphi_1)_{v'} \\ (\varphi_2)_{u'} & (\varphi_2)_{v'} \end{pmatrix}_{(u',v')}$$

où bien sûr $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

Aire d'une surface paramétrée

- Ainsi

$$g_{u'}(u',v') = (\varphi_1)_{u'}(u',v').f_u\circ\varphi(u',v')+(\varphi_2)_{u'}(u',v').f_v\circ\varphi(u',v')$$

$$g_{v'}(u',v') = (\varphi_1)_{v'}(u',v').f_u\circ\varphi(u',v')+(\varphi_2)_{v'}(u',v').f_v\circ\varphi(u',v')$$

- Puis

$$\begin{aligned} g_{u'} \wedge g_{v'} &= \left((\varphi_1)_{u'}(\varphi_2)_{v'} - (\varphi_1)_{v'}(\varphi_2)_{u'}\right)(f_u \wedge f_v) \circ \varphi \\ &= (\det d\varphi_{(u',v')}).(f_u \wedge f_v) \circ \varphi \end{aligned}$$

- Par conséquent

$$\begin{aligned} Aire(g) &= \int_{\mathcal{V}} \|g_{u'} \wedge g_{v'}\| du'dv' \\ &= \int_{\mathcal{V}} |\det d\varphi_{(u',v')})|.\|(f_u \wedge f_v) \circ \varphi\| du'dv' \end{aligned}$$

Aire d'une surface paramétrée

• La formule du changement de variables dans les intégrales permet de conclure

$$\begin{aligned} Aire(g) &= \int_{\mathcal{U}} \|f_u \wedge f_v\| dudv \\ &= Aire(f) \qquad \square \end{aligned}$$

Exemple.– Aire d'un cylindre. Soit

$$f : \begin{array}{ccc}]0,2\pi[\times]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u),\sin(u),v) \end{array}$$

On a $E = G = 1$ et $F = 0$, donc

$$Aire(f) = \int_{]0,2\pi[\times]0,1[} \sqrt{EG - F^2} dudv = 2\pi.$$

Mais $f(]0,2\pi[\times]0,1[)$ n'est pas tout à fait un cylindre...

Aire d'une surface paramétrée

• Bien sûr, on peut étendre la définition de l'aire au cas où $f : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow S$.

Lemme évident.– *Si $\overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$ est de mesure nulle alors*

$$Aire(f) = Aire(f_{|\mathcal{U}})$$

que f soit régulière ou non sur $\overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$.

• Dans l'exemple précédent, il est donc indifférent de travailler avec $\mathcal{U} =]0, 2\pi[\times]0, 1[$ ou $\overline{\mathcal{U}} = [0, 2\pi] \times [0, 1]$.

Aire d'une surface paramétrée

• Attention, contrairement à ce que l'intuition pourrait laisser penser il existe des ouverts $\mathcal{U}$ avec $\overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$ de mesure non nulle.

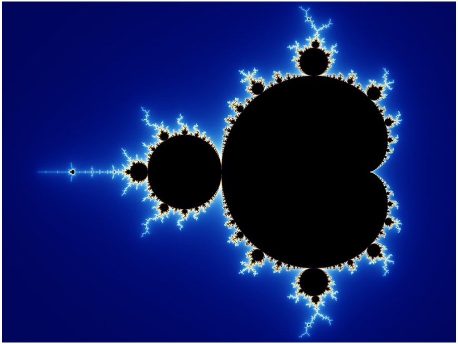
• Un exemple en dimension un : prendre $\mathcal{U} =$ le complémentaire dans $[0, 1]$ de l'ensemble *SVC* de Smith–Volterra–Cantor.

Ce complémentaire est ouvert car réunion de tous les ouverts que l'on a ôtés lors de la construction du *SVC*. On montre que $\overline{\mathcal{U}} = [0, 1]$ et que la mesure de Lebesgue de $SVC = \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$ vaut $\dfrac{1}{2}$.

Aire d'une surface paramétrée

- En général, déterminer la mesure de $\overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$ est un problème difficile.

- Voici une question ouverte : *le bord de l'ensemble de Mandelbrot est-il de mesure nulle ?*



On sait depuis 1998 que la dimension de Hausdorff du bord vaut 2

Aire d'une surface paramétrée

Application : l'aire de la sphère.– On considère

$$\begin{array}{rcl} f : [0,2\pi]\times[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u)\sin(v),\sin(u)\sin(v),\cos(v)). \end{array}$$

Restreinte à $\mathcal{U} =]0,2\pi[\times]0,\pi[$, cette paramétrisation est injective et régulière et on a déjà calculé :

$$E = \sin^2(v), \quad F = 0, \quad G = 1.$$

• On a donc

$$\begin{aligned} Aire(f) &= \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \sqrt{EG - F^2}dudv \\ &= 2\pi\int_0^\pi \sin(v)dv \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

Aire d'une surface paramétrée

• En se permettant un léger abus de notation consistant à confondre f et son support, on écrit

$$Aire(\mathbb{S}^2) = 4\pi.$$

• Attention toutefois, en général $Aire(f)$ n'est pas l'aire du support au sens intuitif. Par exemple

$$\begin{array}{rcl} g : [0, 4\pi] \times [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)). \end{array}$$

a pour support $\mathbb{S}^2$ mais

$$Aire(g) = 8\pi.$$

Aire d'une surface paramétrée

Définition.– Soit f une surface paramétrée. La fonction $\sqrt{EG - F^2}$ est appelée l'ÉLÉMENT D'AIRE de f.

• On note également d^2S pour $\sqrt{EG - F^2}dudv$. Ainsi

$$Aire(f) := \int_{\mathcal{U}} d^2S$$

• Supposons f injective et soit $\overline{h} : S \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Définition.– On appelle INTÉGRALE DE $\overline{h}$ SUR $S = f(\mathcal{U})$ le nombre

$$\int_S \overline{h}\, d^2S := \int_{\mathcal{U}} h(u,v)\sqrt{EG - F^2}dudv$$

où $h := \overline{h} \circ f$.

• On vérifie comme pour l'aire que ce nombre est invariant par reparamétrage.

Définition.– Deux surfaces paramétrées régulières et injectives

$$f_i : \mathcal{U} \longrightarrow S_i$$

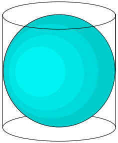
$i = 1$ ou 2, sont dites SYMPLECTOMORPHES si elles ont même élément d'aire.

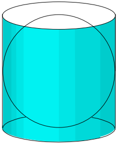
• Dans ce cas, pour tout borélien $A \subset \mathcal{U}$, on a :

$$Aire(f_{1|A}) = Aire(f_{2|A}).$$

Aire d'une surface paramétrée

Un exemple : Le théorème d'Archimède.– *La projection radiale de la sphère sur son cylindre circonscrit préserve les aires. En particulier l'aire de la sphère est égale à celle du cylindre circonscrit.*





La projection radiale est l'application

$$\begin{array}{rccc} proj : & \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times]-1, 1[\\ & (x, y, z) & \longmapsto & \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right). \end{array}$$

Aire d'une surface paramétrée

• Soit

$$\begin{array}{rcl} f : [0,2\pi]\times]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\} \\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u)\sin(v),\sin(u)\sin(v),\cos(v)). \end{array}$$

la paramétrisation usuelle de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\}$.

• Soit $g = proj \circ f$:

$$\begin{array}{rcl} g : [0,2\pi]\times]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{S}^1\times]-1,1[\\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u),\sin(u),\cos(v)). \end{array}$$

• Dans le langage de la théorie des surfaces paramétrées le théorème d'Archimède s'énonce ainsi :

Théorème.– *Les paramétrisations f et g sont symplectomorphes.*

Aire d'une surface paramétrée

Démonstration.– La matrice de la première forme fondamentale de f dans la base (f_u, f_v) est

$$\begin{pmatrix} \sin^2(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent $\sqrt{EG - F^2} = sin(v)$.

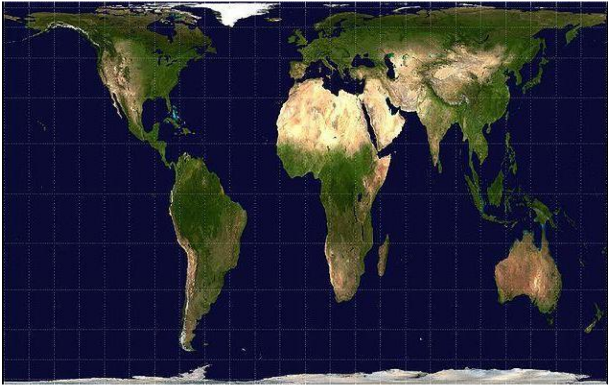
• La matrice de la première forme fondamentale de g dans la base (g_u, g_v) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(v) \end{pmatrix}$$

et par conséquent $\sqrt{EG - F^2} = sin(v)$. □

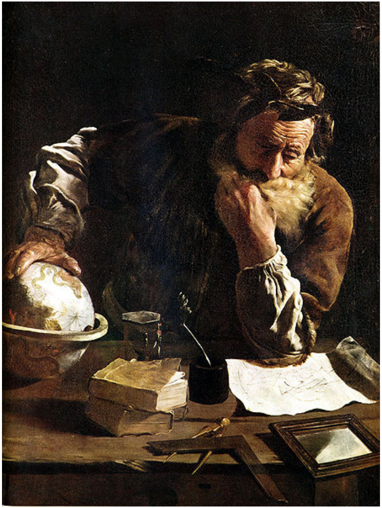
• Notons que f et g ne sont pas isométriques.

Aire d'une surface paramétrée



La projection radiale : une carte qui ne ment pas sur les aires

Archimède (-287/-212)



Archimède par Domenico Fetti (1620)

Archimède (-287/-212)

- Considéré comme le plus grand mathématicien de l'Antiquité et l'un des plus grands de tous les temps.

- Calcule l'aire sous un arc de parabole, donne un encadrement de π d'une remarquable précision, établit des formules pour les volumes des surfaces de révolution.

- Egalement physicien (poussée d'Archimède) et ingénieur (vis d'Archimède).

- Il vivait à Syracuse, en Sicile, alors dans la Grande Grèce.

Archimède (-287/-212)

La mort d'Archimède par Thomas Degeorge

Archimède (-287/-212)

Jean-Etienne Montucla,
né à Lyon en 1725.

≪ *Archimède avait désiré que l'on gravât [sur son tombeau] une sphère inscrite dans un cylindre en mémoire de sa découverte sur le rapport de ces corps.*
Cela fut exécuté, et c'est à ce signe que Ciceron, étant questeur en Sicile, retrouva ce monument au milieu des ronces et des épines qui le dérobaient à la vue ≫