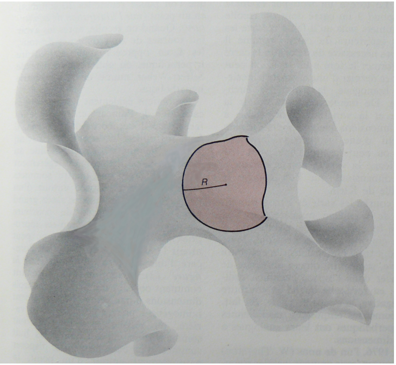
CM-S3 : Courbures

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Une surface hyperbolique

Applications tangentes

Définition.– Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière et injective de support S et soit $\overline{h} : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que $\overline{h}$ est DIFFÉRENTIABLE si $\overline{h} \circ f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'est. On définit de façon analogue les applications de classe C^k.

• Soit $p = f(u, v)$. Si $X \in T_pS$, on pose

$$d\overline{h}_p(X) := d(\overline{h} \circ f)_{(u,v)}(\xi)$$

où ξ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $df_{(u,v)}(\xi) = X$.

• Il est clair que

$$d\overline{h}_p : \overrightarrow{T_pS} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est linéaire, on l'appelle l'APPLICATION TANGENTE de $\overline{h}$ en p.

Applications tangentes

Proposition.– *L'application tangente $d\overline{h}_p$ est indépendante d'un reparamétrage de f.*

Démonstration.– Soit $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ un reparamétrage, on pose $g = f \circ \varphi$ et on note (u', v') le point tel que $\varphi(u', v') = (u, v)$. En particulier $p = f(u, v) = g(u', v')$.

- Soit η l'unique vecteur tel que $dg_{(u',v')}(\eta) = X$. Puisque $g = f \circ \varphi$ on a nécessairement $\xi = d\varphi_{(u',v')}(\eta)$.

- On a

$$\begin{aligned} d(\overline{h} \circ g)_{(u',v')}(\eta) &= d(\overline{h} \circ f \circ \varphi)_{(u',v')}(\eta) \\ &= d(\overline{h} \circ f)_{\varphi(u',v')}(d\varphi_{(u',v')}(\eta)) \\ &= d(\overline{h} \circ f)_{(u,v)}(\xi) \end{aligned}$$

$\square$

Applications tangentes

Exemple : l'application normale.– Il s'agit de l'application

$$\begin{array}{rccl} n: & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p & \longmapsto & N(u,v) = \frac{f_u(u,v)\wedge f_v(u,v)}{|f_u(u,v)\wedge f_v(u,v)|} \end{array}$$

où (u, v) est tel que $f(u, v) = p$. En particulier $N = n \circ f$.

• Il est clair que n est à valeur dans $\mathbb{S}^2$.

• Puisque, pour tout (u, v) et tout $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle dN_{(u,v)}(\xi), N(u, v)\rangle = 0$$

on a

$$dn_p : \overrightarrow{T_pS} \longrightarrow Vect(n(p))^{\perp}.$$

Applications tangentes

• Puisque $\overrightarrow{T_pS} = Vect(n(p))^{\perp}$, la différentielle

$$dn_p : Vect(n(p))^{\perp} \longrightarrow Vect(n(p))^{\perp}$$

est un endomorphisme.

Définition.– L'opposée de la différentielle dn_p est appelée ENDOMORPHISME DE WEINGARTEN. On note $W_p := -dn_p$.

Courbures

Définition.– On appelle COURBURE DE GAUSS en p et on note $K(p)$, le déterminant $det(W_p)$ de l'endomorphisme de Weingarten. On appelle COURBURE MOYENNE et on note $H(p)$ sa demi-trace $\frac{1}{2}tr(W_p)$.

Courbures

Proposition.– *L'endomorphisme de Weingarten est auto-adjoint. En particulier, il est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Démonstration.– Il faut montrer que

$$\forall\, p \in S,\ \ \forall\, X, Y \in Vect(n(p))^{\perp},\quad \langle dn_p(X), Y\rangle = \langle X, dn_p(Y)\rangle.$$

• Soit (e_1, e_2) une base de $Vect(n(p))^{\perp}$. Par (bi)linéarité, il suffit de montrer la relation pour les couples (e_1, e_1), (e_2, e_2) et (e_1, e_2). Seul le dernier cas est non trivial.

• Soit (e_u, e_v) la base canonique de $\mathbb{R}^2 \supset \mathcal{U}$. On choisit

$$e_1(p) = df_{(u,v)}(e_u) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$$

$$e_2(p) = df_{(u,v)}(e_v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v).$$

Courbures

- On a

$$\begin{aligned} dn_p(e_1) &= d(n \circ f)_{(u,v)}(e_u) \\ &= dN_{(u,v)}(e_u) \\ &= \frac{\partial N}{\partial u}(u,v) \end{aligned}$$

- De même

$$dn_p(e_2) = \frac{\partial N}{\partial v}(u,v).$$

- Ainsi

$$\langle dn_p(e_1), e_2 \rangle = \langle \frac{\partial N}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \rangle$$

Courbures

- De $\langle N, \dfrac{\partial f}{\partial v}\rangle = 0$, on déduit

$$\langle \frac{\partial N}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle = -\langle N(u,v), \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v)\rangle$$

- Finalement

$$\langle dn_p(e_1), e_2\rangle = -\langle N(u,v), \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v)\rangle.$$

- De même

$$\langle e_1, dn_p(e_2)\rangle = -\langle N(u,v), \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u,v)\rangle.$$

- L'égalité recherchée se déduit du caractère C^2 de f. $\square$

Courbures

Définition.– Les valeurs propres de W_p sont appelées les COURBURES PRINCIPALES et notées $\lambda_1(p)$ et $\lambda_2(p)$ (éventuellement $\lambda_1(p) = \lambda_2(p)$). Les vecteurs propres sont appelés les DIRECTIONS PRINCIPALES.

• En particulier $K = \lambda_1\lambda_2$ et $H = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

Définition.– La forme bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} T_pS \times T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & \langle W_p(X), Y\rangle \end{array}$$

est appelée la SECONDE FORME FONDAMENTALE, elle se note II_p.

Propriété.– *Puisque W_p est auto-adjoint, II_p est symétrique.*

Courbures

- Soient

$$\mathcal{L} = -\langle N_u, f_u \rangle = \langle N, f_{uu} \rangle \quad \mathcal{N} = -\langle N_v, f_v \rangle = \langle N, f_{vv} \rangle$$

$$\mathcal{M} = -\langle N_u, f_v \rangle = -\langle N_v, f_u \rangle = \langle N, f_{uv} \rangle$$

- La matrice de II_p dans la base (f_u, f_v) est donc

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

- En particulier

$$II_p(X, Y) = (X_u, X_v) \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_u \\ Y_v \end{pmatrix}$$

Courbures

• La relation

$$\forall X, Y \in T_pS, \quad II_p(Y, X) = \langle Y, W_p(X) \rangle$$

s'écrit sous forme matricielle dans la base (f_u, f_v)

$$(Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$(Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

est la matrice de W_p dans la base (f_u, f_v).

Courbures

• Ainsi

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

• La paramétrisation f étant régulière on a $EG - F^2 > 0$. La matrice de la première forme fondamentale dans la base (f_u, f_v) est donc inversible et

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\mathcal{L} - F\mathcal{M} & G\mathcal{M} - F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M} - F\mathcal{L} & E\mathcal{N} - F\mathcal{M} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Courbures

Proposition.– *La matrice de l'opérateur de Weingarten W_p dans la base (f_u, f_v) est*

$$\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G\mathcal{L}-F\mathcal{M} & G\mathcal{M}-F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M}-F\mathcal{L} & E\mathcal{N}-F\mathcal{M} \end{pmatrix}.$$

En particulier

$$K(p)=\frac{\mathcal{L}\mathcal{N}-\mathcal{M}^2}{EG-F^2} \quad et \quad H(p)=\frac{1}{2}\frac{E\mathcal{N}+G\mathcal{L}-2F\mathcal{M}}{EG-F^2}$$

et les courbures principales $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$ sont les solutions de

$$\lambda^2-2H(p)\lambda+K(p)=0$$

(éventuellement $\lambda_1(p)=\lambda_2(p)$ en cas de racine double).

Courbures

Démonstration.– Il suffit de calculer la trace de

$$\frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G\mathcal{L} - F\mathcal{M} & G\mathcal{M} - F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M} - F\mathcal{L} & E\mathcal{N} - F\mathcal{M} \end{pmatrix}$$

pour obtenir H. Pour le calcul du déterminant, il est plus malin de partir de l'expression

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

pour obtenir directement celle de K. Enfin, W_p étant auto-adjoint pour I_p, il est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On est donc assuré que le polynôme caractéristique

$$\lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0$$

possède deux racines réelles ou une double. $\square$

Courbures

Proposition.– *En tout point $p \in S$, on a :*

$$H^2(p) \geq K(p).$$

Démonstration.– Le polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0$$

possède deux racines réelles ou une double, par conséquent son discriminant $\Delta(P)$ est positif ou nul, or

$$\Delta(P) = 4(H^2(p) - K(p)).$$

$\square$

Courbures

Exemple 1 : le plan.– Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u, v, 0). \end{array}$$

Un calcul direct montre que $E = G = 1$, $F = 0$, puis $\mathcal{L} = \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0$. Donc $W_p = 0$ pour tout $p \in P := f(\mathbb{R}^2)$. Par conséquent $K(p) = H(p) = 0$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Enfin, toute direction de P est direction principale.

Courbures

Exemple 2 : le cylindre.– Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\cos(u), \sin(u), v). \end{array}$$

Courbures

- On a déjà vu que $E = G = 1$ et $F = 0$.
- On a
$$N(u, v) = (\cos(u), \sin(u), 0)$$

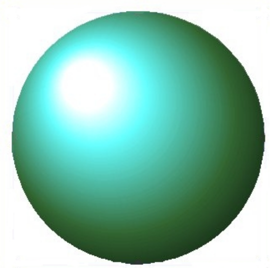
d'où
$$\mathcal{L} = 1, \quad \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0.$$

- Dans la base (f_u, f_v) la matrice de W_p est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $K(p) = 0$, $H(p) = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_1(p) = 1$ et $\lambda_2(p) = 0$.

- Les directions principales sont données par f_u et f_v.

Courbures



Exemple 3 : la sphère.– Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u)\sin(v),\sin(u)\sin(v),\cos(v)). \end{array}$$

Courbures

- On a déjà vu que $E = \sin^2(v)$, $F = 0$ et $G = 1$.
- On a

$$N(u,v) = -f(u,v)$$

d'où

$$\mathcal{L} = sin^2(v), \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{N} = 1.$$

- Dans la base (f_u, f_v) la matrice de W_p est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Par conséquent $W_p = Id$ d'où $K(p) = 1$, $H(p) = 1$ et $\lambda_1(p) = \lambda_2(p) = 1$.
- Toute direction est direction principale.

Courbures

Exercice 1.– Refaire ces calculs pour une sphère de rayon R et constater que

$$W_p = \frac{1}{R} Id, \quad K(p) = \frac{1}{R^2} \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{1}{R}.$$

Exercice 2.– Refaire également ces calculs pour un cylindre dont la base un cercle de rayon R ?

Julius Weingarten (1836-1910)

Julius Weingarten (1836-1910)

• D'origine très modeste, il n'obtient pas de poste universitaire à la hauteur de son talent.

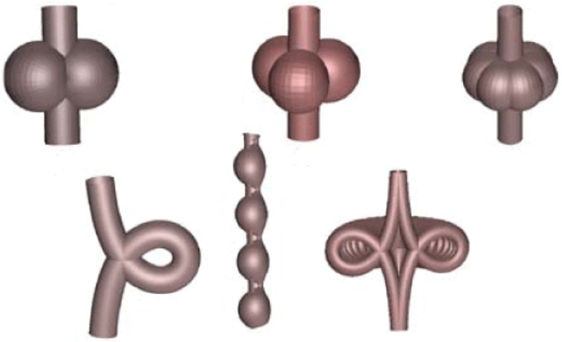
• Il est connu pour ses recherches sur les familles de surfaces isométriques entre elles.

• Une surface S pour laquelle il existe une fonction $F(.,.)$ telle que

$$\forall p \in S, \quad F(\lambda_1(p), \lambda_2(p)) = 0$$

est appelée *surface de Weingarten*.

Julius Weingarten (1836-1910)



Quelques surfaces de Weingarten

Julius Weingarten (1836-1910)

Jean Darboux *et* *Luigi Bianchi*

Ses potes !

Le *Theorema egregium*

Théorème (*Theorema egregium***, Gauss 1827).–** *Soient $f_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1$ ou 2, deux surfaces paramétrées de classe C^3. Si elles sont isométriques alors elles ont même courbure de Gauss.*

• On l'a constaté pour le cas du plan et du cylindre. Ces deux surfaces paramétrées sont isométriques (même première forme fondamentale) et leur courbure de Gauss est effectivement la même (=0). En revanche, les courbures moyennes sont différentes.

• Le plan et la sphère n'ont pas la même courbure de Gauss (l'une est nulle, l'autre non), donc ils ne sont pas isométriques.

Le *Theorema egregium*

• Il n'existe pas de carte plane C^3 non menteuse de la Terre !

• La réciproque du *Theorema egregium* est fausse. Deux surfaces paramétrées peuvent avoir la même courbure sans être isométriques.

Exercice.– Montrer que

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u\sin(v), u\cos(v), \ln(u)). \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u\cos(v), u\sin(v), v). \end{array}$$

ont même courbure de Gauss mais qu'elles ne sont pas isométriques.

Le *Theorema egregium*

Démonstration.– C'est un long calcul qui exprime K en termes de E, F et G et de leurs dérivées. Il existe une démonstration plus conceptuelle mais elle n'est pas accessible à ce niveau du cours.

• Puisque

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

la formule

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2}$$

s'écrit

$$\begin{aligned} K(EG - F^2)^2 &= \langle f_{uu}, f_u \wedge f_v\rangle\langle f_{vv}, f_u \wedge f_v\rangle - \langle f_{uv}, f_u \wedge f_v\rangle^2 \\ &= det(f_{uu}, f_u, f_v)det(f_{vv}, f_u, f_v) - det^2(f_{uv}, f_u, f_v). \end{aligned}$$

Le *Theorema egregium*

- D'autre part, on a

$$\begin{aligned} det(X,Y,Z).det(X',Y,Z) &= det(X,Y,Z).det^t(X',Y,Z) \\ &= det((X,Y,Z)^t(X',Y,Z)) \\ &= det\begin{pmatrix} X.X' & X.Y & X.Z \\ Y.X' & Y.Y & Y.Z \\ Z.X' & Z.Y & Z.Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$det^2(X,Y,Z) = det\begin{pmatrix} X.X & X.Y & X.Z \\ Y.X & Y.Y & Y.Z \\ Z.X & Z.Y & Z.Z \end{pmatrix}$$

Le *Theorema egregium*

- En remplaçant, on trouve

$$K(EG-F^2)^2 =$$

$$\begin{vmatrix} \langle f_{uu}, f_{vv}\rangle & \langle f_{uu}, f_u\rangle & \langle f_{uu}, f_v\rangle \\ \langle f_u, f_{vv}\rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{vv}\rangle & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle & \langle f_{uv}, f_u\rangle & \langle f_{uv}, f_v\rangle \\ \langle f_u, f_{uv}\rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{uv}\rangle & F & G \end{vmatrix}$$

Le *Theorema egregium*

- D'autre part

$$\begin{vmatrix} a & \blacklozenge \\ \bigstar & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a' & \spadesuit \\ \clubsuit & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - a' + a' & \blacklozenge \\ \bigstar & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a' & \spadesuit \\ \clubsuit & A \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a - a' & \blacklozenge \\ \bigstar & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & \blacklozenge \\ 0 & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a' & \spadesuit \\ \clubsuit & A \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a - a' & \blacklozenge \\ \bigstar & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \spadesuit \\ \clubsuit & A \end{vmatrix}$$

Le *Theorema egregium*

- Au bilan

$$K(EG-F^2)^2 =$$

$$\begin{vmatrix} \langle f_{uu}, f_{vv}\rangle - \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle & \langle f_{uu}, f_u\rangle & \langle f_{uu}, f_v\rangle \\ \langle f_u, f_{vv}\rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{vv}\rangle & F & G \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & \langle f_{uv}, f_u\rangle & \langle f_{uv}, f_v\rangle \\ \langle f_u, f_{uv}\rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{uv}\rangle & F & G \end{vmatrix}$$

Le *Theorema egregium*

- En dérivant $E = \langle f_u, f_u \rangle$ on obtient $\langle f_{uu}, f_u \rangle = \dfrac{1}{2} E_u$.
- De même

$$\langle f_{vv}, f_v \rangle = \frac{1}{2} G_v, \quad \langle f_{uv}, f_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \ \text{ et } \ \langle f_{vu}, f_v \rangle = \frac{1}{2} G_u.$$

- Dérivons maintenant $F = \langle f_u, f_v \rangle$, on obtient

$$F_u = \langle f_{uu}, f_v \rangle + \langle f_u, f_{uv} \rangle$$

d'où

$$\langle f_{uu}, f_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v.$$

- De même

$$\langle f_{vv}, f_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u.$$

Le *Theorema egregium*

- Reste le terme le plus délicat :

$$\langle f_{uu}, f_{vv}\rangle - \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle.$$

Pour le traiter on va dériver les relations précédentes.

- On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}\langle f_{uu}, f_v\rangle &= \langle f_{uuv}, f_v\rangle + \langle f_{uu}, f_{vv}\rangle \\
\frac{\partial}{\partial u}\langle f_{vv}, f_u\rangle &= \langle f_{vvu}, f_u\rangle + \langle f_{uu}, f_{vv}\rangle \\
\frac{\partial}{\partial v}\langle f_{uv}, f_u\rangle &= \langle f_{vvu}, f_u\rangle + \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle \\
\frac{\partial}{\partial u}\langle f_{uv}, f_v\rangle &= \langle f_{uuv}, f_v\rangle + \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle
\end{aligned}$$

Le *Theorema egregium*

• Par conséquent

$$\langle f_{uu}, f_{vv}\rangle - \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v}\langle f_{uu}, f_v\rangle + \frac{\partial}{\partial u}\langle f_{vv}, f_u\rangle - \frac{\partial}{\partial v}\langle f_{uv}, f_u\rangle - \frac{\partial}{\partial u}\langle f_{uv}, f_v\rangle\right).$$

• En remplaçant, il vient

$$\langle f_{uu}, f_{vv}\rangle - \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle = -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv}.$$

• Ainsi K ne s'exprime qu'en fonction de E, F, G et de leurs dérivées premières et secondes. $\square$

Le *Theorema egregium*

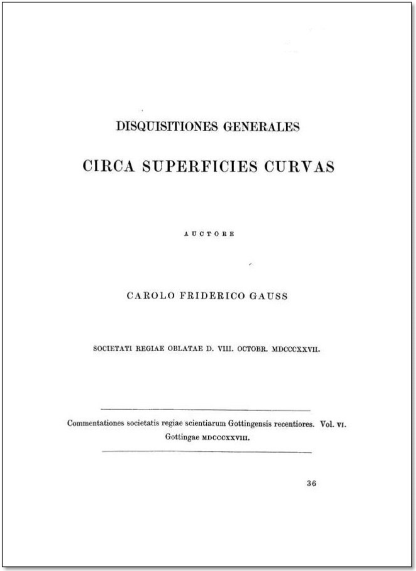
• Au passage nous venons d'établir la **formule de Brioschi** :

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}$$

... qui n'est pas à apprendre par cœur, on s'en doute !

Le *Theorema egregium* dans le texte !


DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. VIII. OCTOBR. MDCCCXXVII.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VI.
Gottingae MDCCCXXVIII.

36

Le *Theorema egregium* dans le texte !

tas x, y, z tamquam functiones indeterminatarum p, q exhibeant, sed sufficere expressionem generalem pro magnitudine cuiusvis elementi linearis. Progrediamur ad aliquot applicationes huius gravissimi theorematis.

Supponamus, superficiem nostram curvam explicari posse in aliam superficiem, curvam seu planam, ita ut cuivis puncto prioris superficiei per coordinatas x, y, z determinato respondeat punctum determinatum superficiei posterioris, cuius coordinatae sint x', y', z'. Manifesto itaque x', y', z' quoque considerari possunt tamquam functiones indeterminatarum p, q, unde pro elemento $\sqrt{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)}$ prodibit expressio talis

$$\sqrt{(E'dp^2+2F'dp.dq+G'dq^2)}$$

denotantibus etiam E', F', G' functiones ipsarum p, q. At per ipsam notionem *explicationis* superficiei in superficiem patet, elementa in utraque superficie correspondentia necessario aequalia esse, adeoque identice fieri

$$E=E', \quad F=F', \quad G=G'$$

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

Theorema. *Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

Manifesto quoque *quaevis pars finita superficiei curvae post explicationem in aliam superficiem eandem curvaturam integram retinebit.*

Casum specialem, ad quem geometrae hactenus investigationes suas restrinxerunt, sistunt superficies in planum explicabiles. Theoria nostra sponte docet, talium superficierum mensuram curvaturae in quovis puncto fieri $=0$, quocirca, si earum indoles secundum modum tertium exprimitur, ubique erit

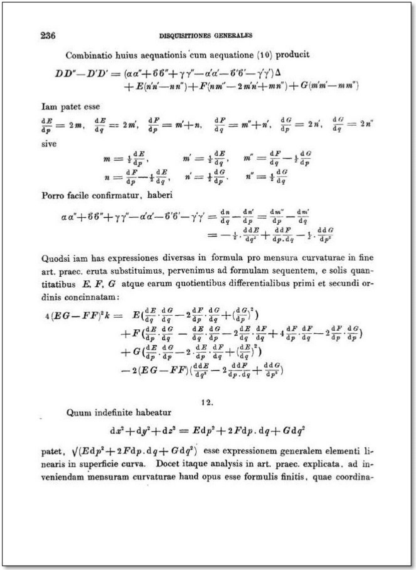
$$\frac{ddz}{dx^2}\cdot\frac{ddz}{dy^2}-\left(\frac{ddz}{dx.dy}\right)^2=0$$

quod criterium, dudum quidem notum, plerumque nostro saltem iudicio haud eo rigore qui desiderari posset demonstratur.

13.

Quae in art. praec. exposuimus, cohaerent cum modo peculiari superficies considerandi, summopere digno, qui a geometris diligenter excolatur. Scilicet quatenus superficies consideratur non tamquam limes solidi, sed tamquam soli-

Le *Theorema egregium* dans le texte !



236 DISQUISITIONES GENERALES

Combinatio huius aequationis cum aequatione (10) producit

$$DD''-D'D' = (\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''-\alpha'\alpha'-\beta'\beta'-\gamma'\gamma')\Delta + E(n'n'-nn'')+F(nm''-2m'n'+mn'')+G(m'm'-mm'')$$

Iam patet esse

$$\frac{dE}{dp}=2m,\quad \frac{dE}{dq}=2m',\quad \frac{dF}{dp}=m'+n,\quad \frac{dF}{dq}=m''+n',\quad \frac{dG}{dp}=2n',\quad \frac{dG}{dq}=2n''$$

sive

$$m=\tfrac{1}{2}\frac{dE}{dp},\qquad m'=\tfrac{1}{2}\frac{dE}{dq},\qquad m''=\frac{dF}{dq}-\tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp}$$
$$n=\frac{dF}{dp}-\tfrac{1}{2}\frac{dE}{dq},\qquad n'=\tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp}.\qquad n''=\tfrac{1}{2}\frac{dG}{dq}$$

Porro facile confirmatur, haberi

$$\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''-\alpha'\alpha'-\beta'\beta'-\gamma'\gamma' = \frac{dn}{dq}-\frac{dn'}{dp} = \frac{dm''}{dp}-\frac{dm'}{dq} = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{ddE}{dq^2}+\frac{ddF}{dp.dq}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{ddG}{dp^2}$$

Quodsi iam has expressiones diversas in formula pro mensura curvaturae in fine art. praec. eruta substituimus, pervenimus ad formulam sequentem, e solis quantitatibus E, F, G atque earum quotientibus differentialibus primi et secundi ordinis concinnatam:

$$\begin{aligned}4(EG-FF)^2k = {} & E\left(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq}-2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dq}+\left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right)\\ & +F\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dq}-\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dp}-2\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dF}{dq}+4\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dF}{dq}-2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dp}\right)\\ & +G\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dp}-2\cdot\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dF}{dq}+\left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right)\\ & -2(EG-FF)\left(\frac{ddE}{dq^2}-2\frac{ddF}{dp.dq}+\frac{ddG}{dp^2}\right)\end{aligned}$$

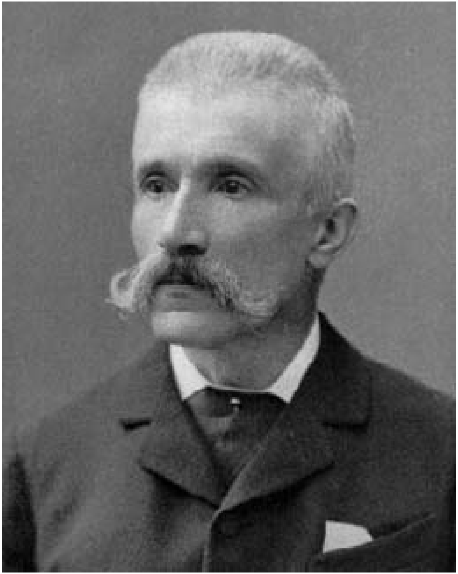
12.

Quum indefinite habeatur

$$dx^2+dy^2+dz^2 = Edp^2+2Fdp.dq+Gdq^2$$

patet, $\sqrt{(Edp^2+2Fdp.dq+Gdq^2)}$ esse expressionem generalem elementi linearis in superficie curva. Docet itaque analysis in art. praec. explicata, ad inveniendam mensuram curvaturae haud opus esse formulis finitis, quae coordina-

Francesco Brioschi (1824-1897)



Francesco Brioschi (1824-1897)

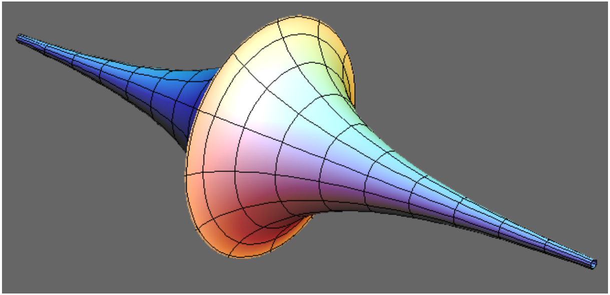
• Homme politique et mathématicien : il joua un rôle de premier plan dans la formation de l'État italien.

• Convaincu de la nécessité de régénérer l'université et en particulier l'enseignement scientifique et technique sur le modèle de la Révolution française, Brioschi fut impliqué dans des émeutes et fut brièvement incarcéré.

• Au cours de la période d'unification de l'Italie, il devient ministre de l'instruction publique.

• Il s'impliqua largement dans le fonctionnement des institutions scientifiques, s'assura la la collaboration d'**Enrico Betti** et de **Luigi Cremona**. Il encouragea la carrière de jeunes scientifiques dont **Eugenio Beltrami**.

Francesco Brioschi (1824-1897)



Surface de Beltrami ou pseudo-sphère.