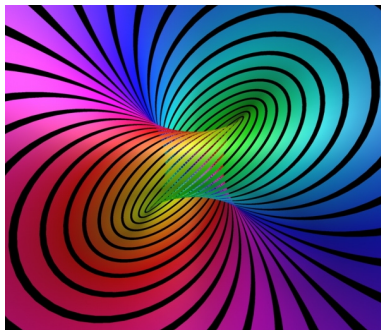


CM-S4 : Courbes remarquables sur les surfaces

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Une cyclide de Dupin

Courbure normale

- Soient $f : \mathcal{U} \rightarrow S$ une surface paramétrée régulière et injective, $p = f(u, v) \in S$ et $n(p)$ une normale unitaire en p .

Définition.— Soit $X \in T_p S$ unitaire. Le nombre $II_p(X, X)$ est appelée COURBURE NORMALE en p dans la direction X . Il est noté $k_X(p)$.

Théorème de Meusnier.— Soit $p \in S$ et soit $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow S$ une courbe régulière telle que $\gamma(0) = p$. On note $k(p)$ sa courbure principale, $n_{princ}(p)$ sa normale principale et X un vecteur tangent unitaire à γ en 0, alors

$$k_X(p) = \langle n_{princ}(p), n(p) \rangle k(p).$$

Courbure normale

Démonstration.— On peut toujours supposer que γ est paramétrée par la longueur d'arc et que $\gamma'(0) = X$.

- On a

$$\begin{aligned}k_X &= II_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) \\ &= \langle -dn_p(\gamma'(0)), \gamma'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \gamma'(0) \rangle\end{aligned}$$

où on a noté $N = n \circ \gamma$.

- Puisque, pour tout s , $\langle N(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, on en déduit

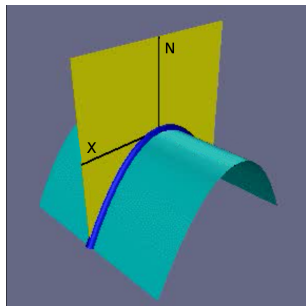
$$\langle N'(s), \gamma'(s) \rangle = -\langle N(s), \gamma''(s) \rangle.$$

- Donc

$$k_X = \langle N(0), \gamma''(0) \rangle = \langle n, kn_{princ} \rangle.$$



Courbure normale



- A tout $X \in T_p S$ unitaire on associe le plan affine

$$P_X = p + \text{Vect}(X, n(p)).$$

Courbure normale

- D'après un résultat du CM-S1, au voisinage de p , l'intersection de $P_X \cap S$ est le support d'une courbe paramétrée

$$\gamma :] - \epsilon, \epsilon[\longrightarrow P_X.$$

On peut toujours supposer qu'elle est paramétrée par la longueur d'arc et que de plus

$$\gamma(0) = p \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = X.$$

- On oriente le plan P_X par $(X, n(p))$ et on note k_{alg} la courbure algébrique de γ en 0. Alors

$$k_X = \langle n, kn_{princ} \rangle = \langle n, k_{alg} n_{alg} \rangle = \pm k_{alg}.$$

Courbure normale

Théorème (formule d'Euler pour les courbures).– *La fonction*

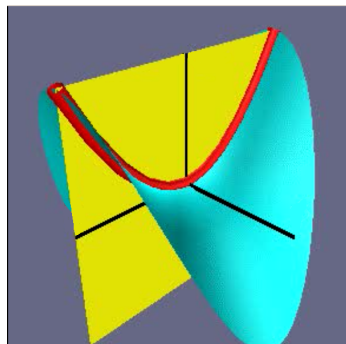
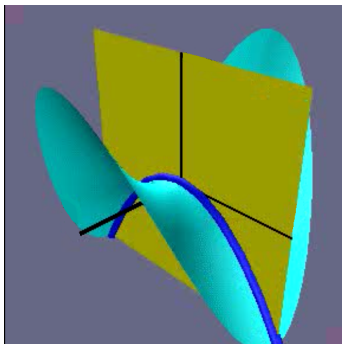
$$\begin{aligned} T_p^1 S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto k_X \end{aligned}$$

atteint ses extrema en les vecteurs propres (unitaires) de l'opérateur de Weingarten W_p . Si X_1 est un tel vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 et si X fait un angle θ avec X_1 alors on a

$$k_X = k_{X_1} \cos^2 \theta + k_{X_2} \sin^2 \theta$$

où X_2 est un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ_2 . De plus $\lambda_1 = k_{X_1}$ et $\lambda_2 = k_{X_2}$.

Courbure normale



Remarque.— Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors X_1 et X_2 sont orthogonaux.

Courbure normale

Démonstration.— Par définition

$$k_X = \mathbb{I}_p(X, X) = \langle -dn_p(X), X \rangle.$$

- Le vecteur X étant unitaire, on écrit

$$X = \cos \theta X_1 + \sin \theta X_2.$$

- On a

$$-dn_p(X) = \cos \theta . \lambda_1 X_1 + \sin \theta . \lambda_2 X_2$$

d'où

$$k_X = \cos^2 \theta . \lambda_1 + \sin^2 \theta . \lambda_2.$$



Courbure normale

Corollaire.— Soit $X_\theta = \cos \theta.X_1 + \sin \theta.X_2$. La moyenne de la fonction $\theta \mapsto k_{X_\theta}$ est la courbure moyenne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_{X_\theta} d\theta = H(p).$$

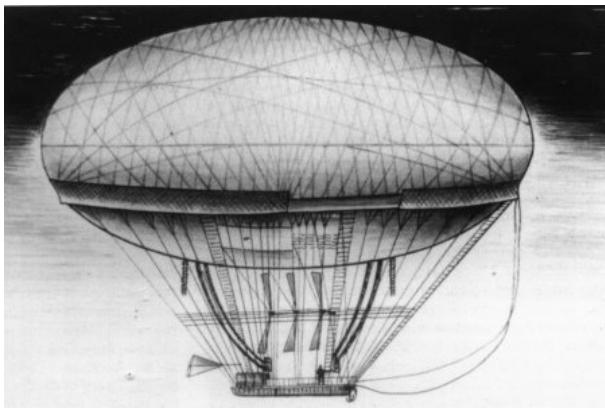
Démonstration.— C'est un calcul immédiat qui utilise la formule d'Euler pour les courbures :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_{X_\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta.\lambda_1 + \sin^2 \theta.\lambda_2 d\theta \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Jean-Baptiste Marie Meusnier de La Place (1754-1793)

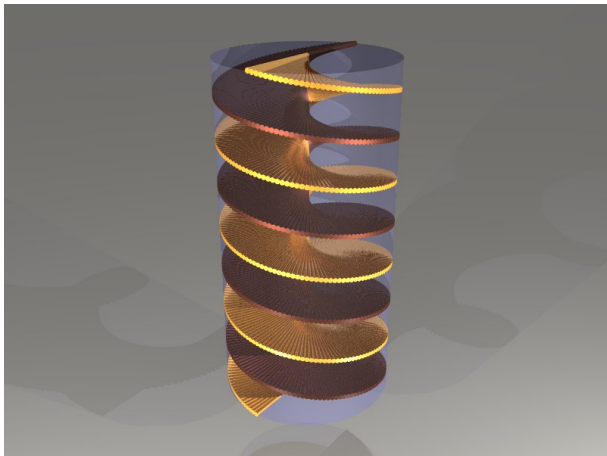
- Général de la Révolution, géomètre et ingénieur.
- Il découvre son théorème lors de son passage à l'école royale du génie. Il invente également à la même époque l'hélicoïde.
- Il collabore avec Antoine Lavoisier à des études sur la décomposition de l'eau et sur la fabrication de l'hydrogène.
- Il est présenté parfois comme l'inventeur du dirigeable du fait d'un projet, avorté par manque de moyens, qu'il proposa à l'Académie des sciences.
- Général de division dans l'armée du Rhin, il meurt de ses blessures au cours du siège de Mayence.

Jean-Baptiste Marie Meusnier de La Place (1754-1793)



Le projet d'aérostat de Meusnier La Place.

Jean-Baptiste Marie Meusnier de La Place (1754-1793)



L'inventeur de l'hélicoïde, une surface de courbure moyenne nulle.

CM-S4 :
Courbes
remarquables
sur les
surfaces

V. Borrelli

Courbure
normale

Jean-Baptiste
Meusnier

Courbes
asymptotiques

Charles Dupin

Lignes de
courbures

Géodésiques

Courbes asymptotiques

Définition.— Soit $p \in S$. On appelle DIRECTION ASYMPTOTIQUE de S au point p une direction de $T_p S$ pour laquelle la courbure normale est nulle. On appelle COURBE ASYMPTOTIQUE une courbe $\bar{\gamma} : I \rightarrow S$ régulière telle que, pour tout $t \in I$, on a $k_{\bar{\gamma}'(t)} = 0$, autrement dit, pour tout $t \in I$, l'espace affine $\bar{\gamma}(t) + \text{Vect}(\bar{\gamma}'(t))$ est une direction asymptotique

- Puisque

$$k_X = \cos^2 \theta \cdot \lambda_1 + \sin^2 \theta \cdot \lambda_2$$

il n'y a pas de direction asymptotique en un point où $K(p) > 0$ et si $K(p) < 0$ il y a deux directions asymptotiques sur $T_p S$.

Courbes asymptotiques

Lemme.— Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ une surface paramétrée régulière et injective et soit

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathcal{U} \\ t &\longmapsto (u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Alors $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ est une courbe asymptotique si et seulement si

$$\mathcal{L} \cdot (u')^2 + 2\mathcal{M} \cdot u'v' + \mathcal{N} \cdot (v')^2 = 0.$$

• **Démonstration.**— Puisque $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ on a

$$\bar{\gamma}'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

donc

$$\bar{\gamma}'(t) = u'(t)f_u(\gamma(t)) + v'(t)f_v(\gamma(t)).$$

Courbes asymptotiques

- D'autre part, si $X = X_u f_u + X_v f_v$ alors

$$k_X = II_p(X, X) = \mathcal{L}.X_u^2 + 2\mathcal{M}.X_u X_v + \mathcal{N}.X_v^2.$$

car la matrice de la seconde forme fondamentale dans la base (f_u, f_v) est précisément

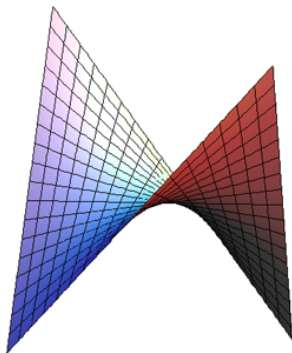
$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}.$$

- Par conséquent

$$k_{\bar{\gamma}} = \mathcal{L}.(u')^2 + 2\mathcal{M}.u'v' + \mathcal{N}.(v')^2.$$

- Enfin, $\bar{\gamma}$ est une courbe asymptotique ssi pour tout $t \in I$, on a $k_{\bar{\gamma}'}(t) = 0$. □

Courbes asymptotiques



Exemple : le paraboloïde hyperbolique.— Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \left(x, y, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right) \end{aligned}$$

Courbes asymptotiques

- Un calcul montre que

$$N(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Puis que

$$\mathcal{L} = 1, \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{N} = -1.$$

- L'équation

$$\mathcal{L} \cdot (x')^2 + 2\mathcal{M} \cdot x'y' + \mathcal{N} \cdot (y')^2 = 0$$

s'écrit donc

$$x'^2 - y'^2 = 0.$$

Courbes asymptotiques

- Ainsi $y' = x'$ ou $y' = -x'$. Les solutions sont donc les droites de \mathbb{R}^2

$$y = x + y_0 \quad \text{et} \quad y = -x + y_0$$

où $y_0 \in \mathbb{R}$.

- Les courbes asymptotes s'obtiennent en composant par f :

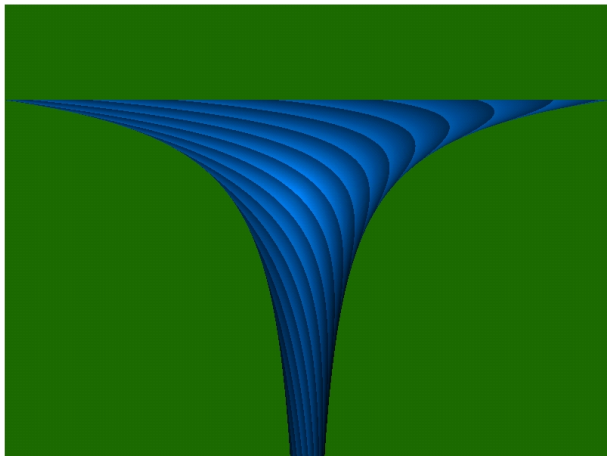
$$x \mapsto f(x, x + y_0) = (x, x + y_0, -\frac{y_0}{2}(2x + y_0))$$

et

$$x \mapsto f(x, -x + y_0) = (x, -x + y_0, \frac{y_0}{2}(2x - y_0)).$$

- Les lignes asymptotiques de f forment donc un réseau de droites dans $PH = f(\mathbb{R}^2)$: une autre façon de constater que PH est biréglé !

Courbes asymptotiques



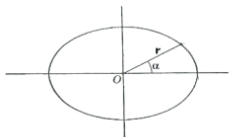
Courbes asymptotiques sur une surface de révolution : en général les courbes asymptotiques ne sont pas des droites

Courbes asymptotiques

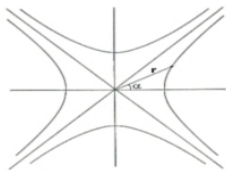
Définition.— Soit $p \in S$. On appelle INDICATRICE DE DUPIN de S en p l'ensemble

$$ID(p) = \{X \in T_p S \mid \|p(X, X) = \pm 1\} = ID_+(p) \cup ID_-(p)$$

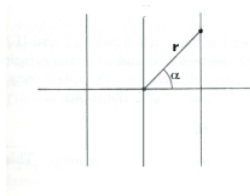
- D'après la formule d'Euler pour les courbures, cet ensemble est une conique.



$$K(p) > 0$$



$$K(p) < 0$$

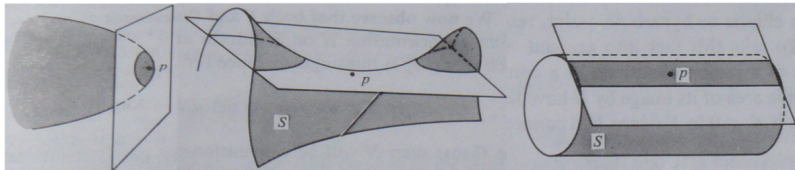


$$K(p) = 0 \\ \text{et } H(p) \neq 0.$$

Courbes asymptotiques

- Pour tout $r \in \mathbb{R}^*$, on note P_r le plan parallèle à $T_p S$ à distance signée r (grâce au choix d'une normale) de $T_p S$.
- Soit $ID_{\times}(p) := ID_+(p)$ si $ID_+(p) \neq \emptyset$, $ID_{\times}(p) := ID_-(p)$ sinon.

Théorème.— Soit $p \in S$ un point tel que $II_p \neq 0$. Alors, il existe un voisinage V de p dans \mathbb{R}^3 et un nombre $\epsilon > 0$ tels que, pour tout $0 < |r| < \epsilon$, si $P_r \cap S \cap V$ est non vide, alors il est difféomorphe à $ID_{\times}(p)$



$$K(p) > 0$$

$$K(p) < 0$$

$$K(p) = 0$$

$$\text{et } H(p) \neq 0.$$

Courbes asymptotiques

Idée de la démonstration.– On choisit un paramétrage cartésien de S :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S = f(\mathcal{U}) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, h(x, y)) \end{aligned}$$

et on suppose que $(0, 0) \in \mathcal{U}$ et $f(0, 0) = p$.

- On suppose en outre que :

$$h_x(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad h_y(0, 0) = 0.$$

Ainsi le plan (Oxy) est tangent à S en p .

- On suppose enfin que (Ox) et (Oy) sont les directions principales. Un calcul montre alors que $h_{xy}(0, 0) = 0$ et que

$$\lambda_1(p) = h_{xx}(0, 0) \quad \text{et} \quad \lambda_2(p) = h_{yy}(0, 0).$$

Courbes asymptotiques

- Un développement de Taylor en $(0, 0)$ et à l'ordre 2 de h s'écrit

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2) + o(x^2 + y^2).$$

- Soit $X = xf_x + yf_y \in T_p S$. Un calcul montre que :

$$\begin{aligned} II_p(X, X) &= h_{xx}(0, 0)x^2 + 2h_{xy}(0, 0)xy + h_{yy}(0, 0)y^2 \\ &= \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2. \end{aligned}$$

- Déterminer $P_r \cap S \cap V$ revient à résoudre

$$h(x, y) = r$$

une équation qui, après renormalisation, ressemble beaucoup à

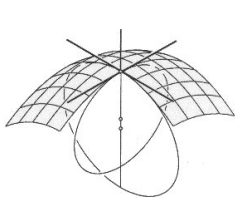
$$II_p(X, X) = \pm 1$$

le signe dépendant de celui de r .

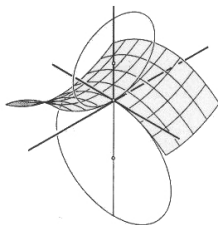
Courbes asymptotiques

- On déduit immédiatement de la démonstration du théorème précédent le :

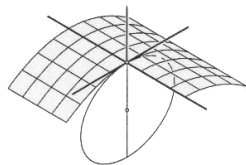
Corollaire.— *Si $K(p) > 0$ alors p est un point elliptique, si $K(p) < 0$ alors p est un point hyperbolique, si $K(p) = 0$ et $H(p) \neq 0$ alors p est parabolique.*



Point elliptique



Point hyperbolique



Point parabolique

Charles Dupin (1784-1873)



CM-S4 :
Courbes
remarquables
sur les
surfaces

V. Borrelli

Courbure
normale

Jean-Baptiste
Meusnier

Courbes
asymptotiques

Charles Dupin

Lignes de
courbures

Géodésiques

Charles Dupin (1784-1873)

CM-S4 :
Courbes
remarquables
sur les
surfaces

V. Borrelli

Courbure
normale

Jean-Baptiste
Meusnier

Courbes
asymptotiques

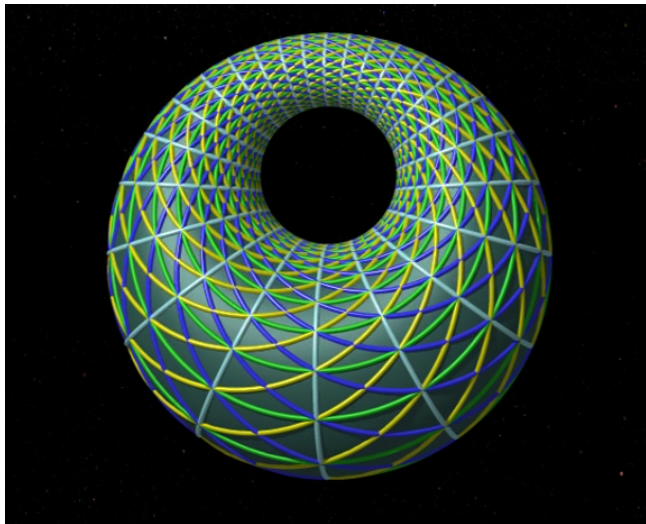
Charles Dupin

Lignes de
courbures

Géodésiques

- Mathématicien, ingénieur et homme politique.
- S'intéresse à la courbure des surfaces... et applique ses découvertes à la construction de vaisseaux de guerre et à la conception de fortifications !
- A servi tous les régimes : le Premier Empire, la Première Restauration, la monarchie de Juillet, la Deuxième République, le Second Empire.
- Il a été député (un des plus ardents membres de la majorité de droite) et ministre de la marine et des colonies. Louis XVIII le fit baron.
- Une famille de surfaces porte son nom : les *cyclides de Dupin*.

Charles Dupin (1784-1873)



Une cyclide de Dupin

CM-S4 :
Courbes
remarquables
sur les
surfaces

V. Borrelli

Courbure
normale

Jean-Baptiste
Meusnier

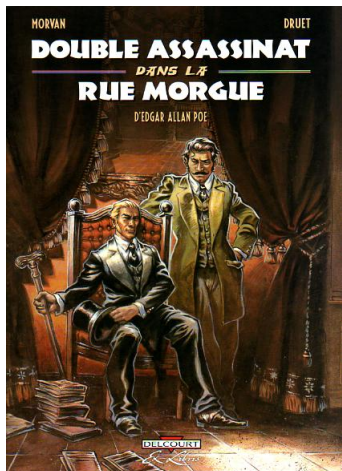
Courbes
asymptotiques

Charles Dupin

Lignes de
courbures

Géodésiques

Charles Dupin (1784-1873)



Le baron Charles Dupin serait le modèle du chevalier Auguste Dupin, le détective créé par Edgar Poe.

Lignes de courbures

Définition.— On appelle LIGNE DE COURBURE une courbe paramétrée régulière $\bar{\gamma} : I \rightarrow S$ telles que, pour tout $t \in I$, la tangente $\bar{\gamma}(t) + \text{Vect}(\bar{\gamma}'(t))$ soit une direction principale de S en $\gamma(t)$.

- Toute courbe paramétrée régulière dont le support est contenu dans un plan ou une sphère est une ligne de courbure.

Lignes de courbures

Définition.— On appelle POINT OMBILICAL un point $p \in S$ pour lequel $\lambda_1(p) = \lambda_2(p)$.

- Tous les points d'une sphère ou d'un plan sont ombilicaux.

Lemme.— Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow S$ une surface paramétrée régulière, injective et sans point ombilical et soit

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathcal{U} \\ t &\longmapsto (u(t), v(t)). \end{aligned}$$

une courbe régulière. Alors $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ est une ligne de courbure si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = 0$$

Lignes de courbures

Démonstration.— Puisque f est sans point ombilical, on peut définir sans ambiguïté deux fonctions courbures principales $\lambda_1, \lambda_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$.

- La courbe paramétrée $\bar{\gamma}$ est une ligne de courbure ssi il existe $i = 1$ ou 2 tel que

$$\forall t \in I, \quad -dn(\bar{\gamma}'(t)) = \lambda_i \bar{\gamma}'(t).$$

- Dans la base (f_u, f_v) l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\mathcal{L} - F\mathcal{M} & GM - FN \\ EM - F\mathcal{L} & EN - FM \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Lignes de courbures

- D'où, en multipliant la première ligne par v' et la seconde par u' :

$$\frac{G\mathcal{L} - F\mathcal{M}}{EG - F^2} u'v' + \frac{GM - FN}{EG - F^2} (v')^2 = \lambda_i u'v'$$

$$\frac{EM - F\mathcal{L}}{EG - F^2} (u')^2 + \frac{EN - FM}{EG - F^2} u'v' = \lambda_i v'u'$$

- En égalant on obtient une expression qui est, à un facteur près, le déterminant figurant dans le lemme. □

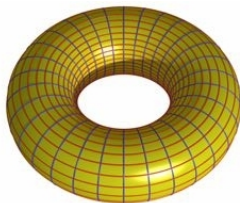
Corollaire.— *Si $F \equiv 0$ et $\mathcal{M} \equiv 0$ alors $u \mapsto f(u, v_0)$ et $v \mapsto f(u_0, v)$ sont des lignes de courbure.*

Démonstration.— Immédiate. □

Lignes de courbures

- **Exemple : le tore.**– Soit $0 < b < a$ et

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} (a + b \sin(v)) \cos(u) \\ (a + b \sin(v)) \sin(u) \\ b \cos(v) \end{pmatrix}$$



- Un calcul direct montre que $F = 0$ et $\mathcal{M} = 0$, les lignes de courbures sont donc les cercles

$$u \longmapsto f(u, v_0) \quad \text{et} \quad v \longmapsto f(u_0, v)$$

Lignes de courbures

- Plus généralement, les méridiens et les latitudes sont les supports de lignes de courbures des surfaces de rotation.

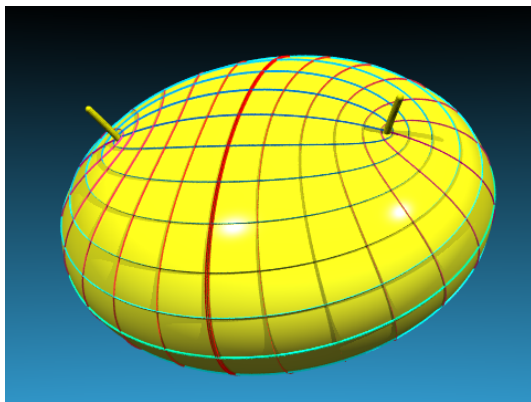
Définition.— On appelle **SYSTÈME TRIPLE ORTHOGONAL** sur V ouvert de \mathbb{R}^3 la donnée de trois familles de surfaces $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ telles que pour tout $p \in V$, il existe une unique surface de chaque famille contenant p et que, de plus, ces surfaces s'intersectent deux à deux orthogonalement.

Théorème de Dupin.— *Les surfaces d'un système triple orthogonal s'intersectent deux à deux le long de leurs lignes de courbure.*

Démonstration.— En td !

Lignes de courbures

- Une application : les lignes de courbure de l'ellipsoïde :



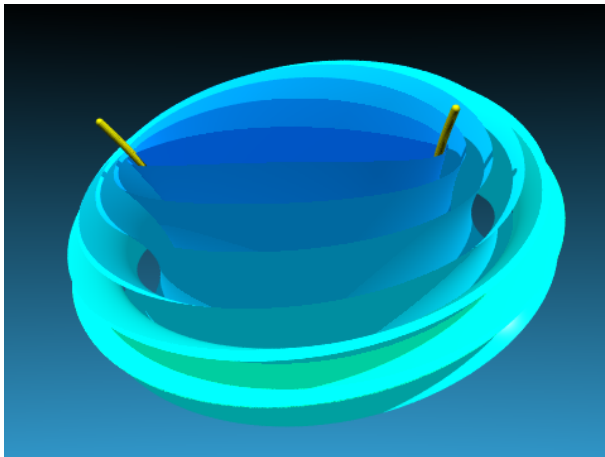
Les lignes de courbures de l'ellipsoïde.

Lignes de courbures



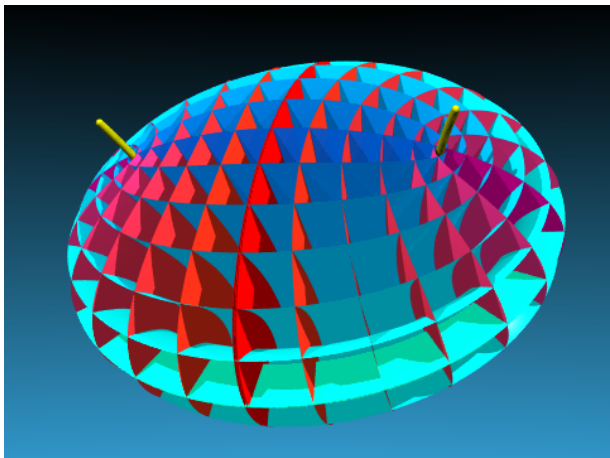
Hyperboloïdes confocales à deux nappes

Lignes de courbures



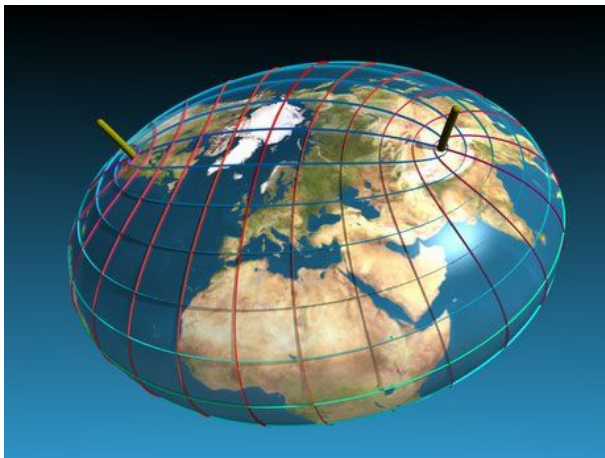
Hyperboloïdes confocales à une nappe

Lignes de courbures



Le système triple orthogonal dessine les lignes de courbure

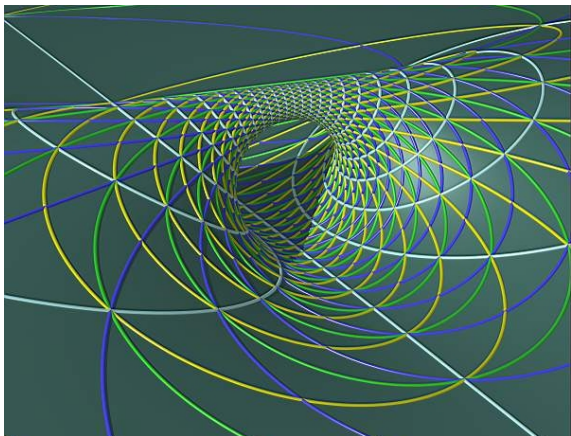
Lignes de courbures



Les quatre points où l'hyperbole intersecte la surface sont les points ombilicaux de l'ellipsoïde

Lignes de courbures

- Une autre application : les lignes de courbure des cyclides de Dupin.



Les lignes de courbures sont les courbes vertes et blanches : ce sont des cercles ou des droites.

Géodésiques

Définition.— Une courbe paramétrée $\bar{\gamma} : I \longrightarrow S$ à vitesse constante est dite GÉODÉSIQUE si

$$\forall t \in I, \quad (\bar{\gamma}''(t))^T = 0$$

où $(.)^T$ désigne la composante tangentielle de $\bar{\gamma}''(t)$ sur $T_{\bar{\gamma}(t)}S$.

- Dans le plan les géodésiques sont les courbes paramétrées à vitesse constante dont le support est une portion de droite.
- Dans la sphère les géodésiques sont les courbes paramétrées à vitesse constante dont le support est un arc de grand cercle.

Géodésiques



Elwin Bruno Christoffel (1829-1900)

Définition.— Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière. On appelle SYMBOLE DE CHRISTOFFEL les composantes tangentielles des dérivées secondes de f dans la base (f_u, f_v) , ils sont notés Γ_{ij}^k . Précisément :

$$f_{uu} = \Gamma_{11}^1 f_u + \Gamma_{11}^2 f_v + \mathcal{L}N$$

$$f_{uv} = \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v + \mathcal{M}N$$

$$f_{vv} = \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v + \mathcal{N}N$$

Géodésiques

Théorème.— *Les symboles de Christoffel ne dépendent que des coefficients E, F, G et de leurs dérivées premières. En particulier si $f_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1$ ou 2 , sont deux surfaces paramétrées de classe C^2 isométriques alors elles ont même symboles de Christoffel.*

Démonstration.— Traitons d'abord le cas des symboles Γ_{11}^1 et Γ_{11}^2 . On a

$$\begin{aligned} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 &= \langle f_{uu}, f_u \rangle = \frac{1}{2}E_u \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 &= \langle f_{uu}, f_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v \end{aligned}$$

- Le déterminant de ce système est $EG - F^2 > 0$, il est donc inversible. On agit similairement pour les autres symboles. □

Géodésiques

Proposition.— Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow S$ une surface paramétrée régulière, injective et soit

$$\begin{aligned}\gamma : I &\longrightarrow \mathcal{U} \\ t &\longmapsto (u(t), v(t)).\end{aligned}$$

une courbe régulière. Alors $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ est géodésique si et seulement si

$$\begin{aligned}u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 &= 0.\end{aligned}$$

Démonstration.— On a

$$\bar{\gamma}'(t) = u'(t)f_u(u(t), v(t)) + v'(t)f_v(u(t), v(t)).$$

d'où

$$\bar{\gamma}'' = u''f_u + u'(u'f_{uu} + v'f_{uv}) + v''f_v + v'(u'f_{uv} + v'f_{vv}).$$

- En exprimant f_{uu} , f_{uv} et f_{vv} dans la base (f_u, f_v) il vient

$$\begin{aligned}(\bar{\gamma}'')^T &= \left(u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 \right) f_u \\ &+ \left(v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 \right) f_v.\end{aligned}$$



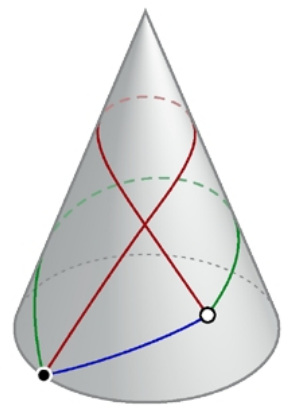
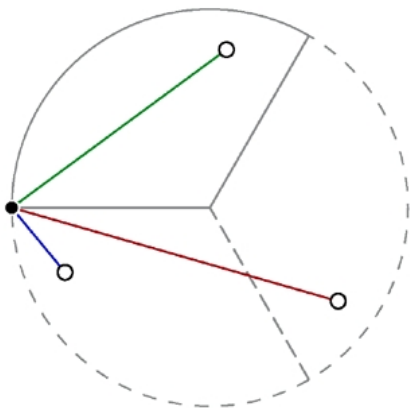
Géodésiques

Corollaire.— Soient $f_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1$ ou 2 , deux surfaces paramétrées de classe C^2 isométriques et soit $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$. Si $\overline{\gamma}_1 = f_1 \circ \gamma$ est une géodésique de $S_1 = f_1(\mathcal{U})$ alors $\overline{\gamma}_2 = f_2 \circ \gamma$ est une géodésique de $S_2 = f_2(\mathcal{U})$.

Démonstration.— L'EDO des géodésiques ne fait intervenir que les symboles de Christoffel qui sont invariants par isométrie. □

- Une application à la construction de géodésiques sur le cône.

Géodésiques



Comment construire des géodésiques sur le cône

Géodésiques

Corollaire.— Soit $p \in S$ et $v \in T_p S$, $v \neq 0$. Il existe $\epsilon > 0$ et une unique courbe géodésique $\bar{\gamma} :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow S$ telle que $\bar{\gamma}(0) = p$ et $\bar{\gamma}'(0) = v$.

Démonstration.— Il s'agit d'une application directe du théorème de Cauchy-Lipschitz.

- En effet le système

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u' v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u' v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 &= 0. \end{aligned}$$

s'écrit sous la forme

$$y'' = \phi(y, y')$$

avec $y = (u, v)$ (le système dépend effectivement de y via les symboles de Christoffel).

Géodésiques

- On pose $Y = (y, y')$ (truc classique), on a alors

$$Y' = \Phi(Y)$$

avec $\Phi(y_1, y_2) = (y_2, \phi(y_1, y_2))$.

- Il reste à vérifier que Φ est localement lipschitzienne ce qui est immédiat ici car f est aussi régulière qu'on le souhaite (la classe C^3 suffit). □

Remarque.– Dans le corollaire, on ne peut pas en général remplacer $] - \epsilon, \epsilon[$ par \mathbb{R} . En revanche, p étant fixé, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de choisir ϵ uniformément sur tout disque D centré en 0 de $T_p S$.

Géodésiques

- Si la solution $\bar{\gamma}$ existe jusqu'au temps $t = 1$, on note

$$\exp_p(v) := \bar{\gamma}(1).$$

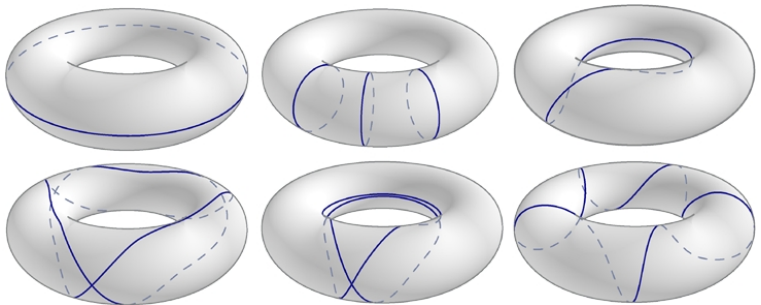
- D'après le théorème précédent et sa remarque, il existe $\epsilon > 0$ tel que l'application

$$\begin{array}{ccc} \exp_p : D(0, \epsilon) & \longrightarrow & S \\ v & \longmapsto & \exp_p(v) \end{array}$$

soit bien définie sur le disque $D(0, \epsilon)$ centré en 0 et de rayon ϵ de $T_p.S$

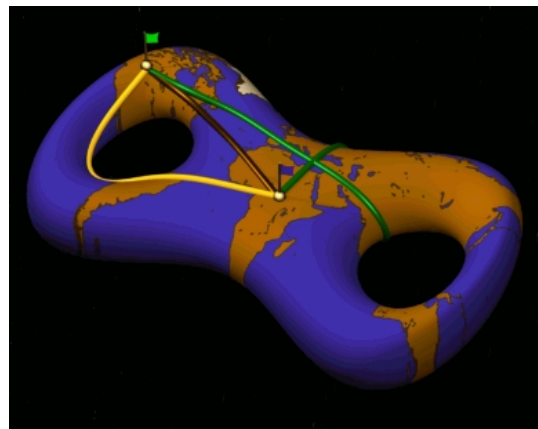
On appelle cette application l'APPLICATION EXPONENTIELLE en p de S .

Géodésiques



Les géodésiques peuvent s'auto-intersecter

Géodésiques



Plusieurs géodésiques pour aller d'un point à un autre

CM-S4 :
Courbes
remarquables
sur les
surfaces

V. Borrelli

Courbure
normale

Jean-Baptiste
Meusnier

Courbes
asymptotiques

Charles Dupin

Lignes de
courbures

Géodésiques

Géodésiques



*Le pavillon du Japon à l'exposition universelle d'Hanovre en
2000*

Géodésiques



La tour korkeasaari (Finlande)