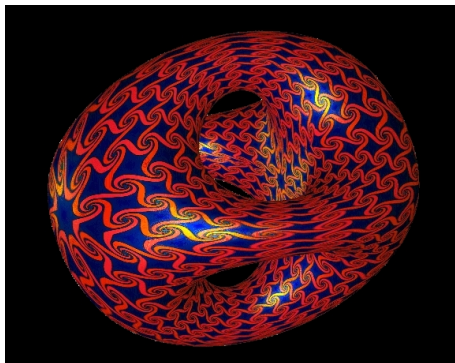


# CM-S6 : Sous-variétés

Vincent Borrelli

Université de Lyon



*Une sous-variété de genre trois*

## Sous-variétés

**Définition.**— Une partie  $S \subset \mathbb{R}^3$  est une  $C^k$ -SOUS-VARIÉTÉ DE DIMENSION 2 DE  $\mathbb{R}^3$ ,  $k \geq 1$  si pour tout  $p \in S$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$ , un voisinage ouvert  $V$  de 0 dans  $\mathbb{R}^3$  et un  $C^k$ -difféomorphisme  $\phi : U \rightarrow V$  tel que

$$\phi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

**Exemple : la sphère.**— Montrons que

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

une sous-variété de dimension 2.

- Soit  $p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ , on note  $\pi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Vect}(p)^\perp$  la projection orthogonale et  $U$  la boule ouverte de centre  $p$  et de rayon 1. On note encore  $L$  n'importe quel isomorphisme vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $L(\text{Vect}(p)^\perp) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ .

# Sous-variétés

- On pose

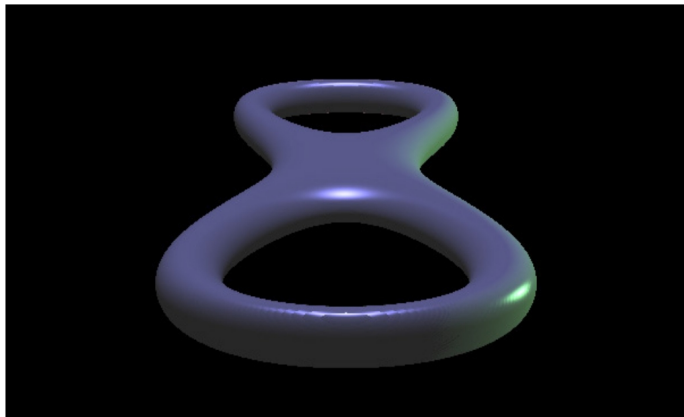
$$\begin{aligned} \phi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (L \circ \pi_p(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 - 1) \end{aligned}$$

- Il est facile (mais fastidieux !) de vérifier que  $\phi$  est un difféomorphisme de  $U$  sur son image  $V = \phi(U)$ .
- En revanche, la propriété

$$\phi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$$

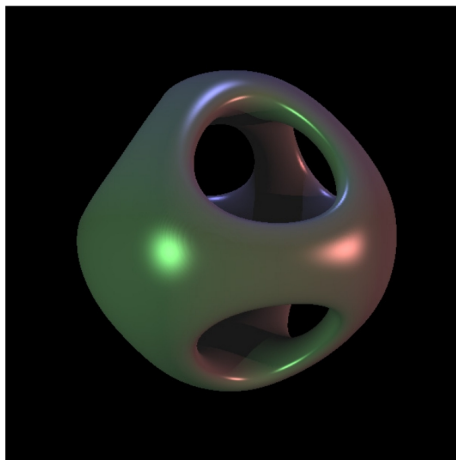
est immédiate.

# Sous-variétés



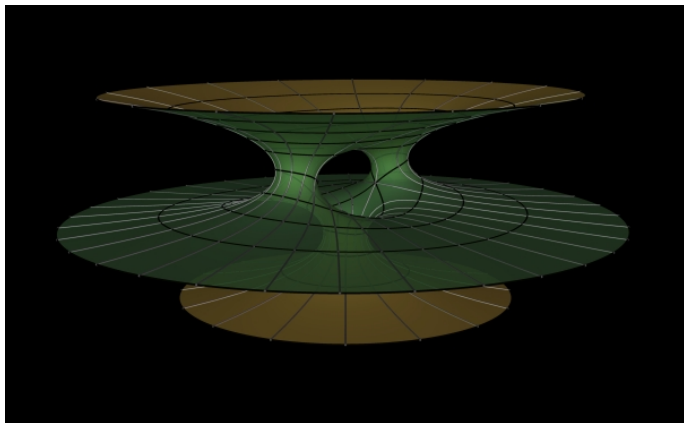
*Un exemple de sous-variété : le tore à deux trous ou  
« bretzel »*

# Sous-variétés



*Un autre exemple de sous-variété : la surface  
« orthocercles »*

# Sous-variétés



*Encore un exemple de sous-variété : la surface de Costa*

# Sous-variétés

Sous-variétés

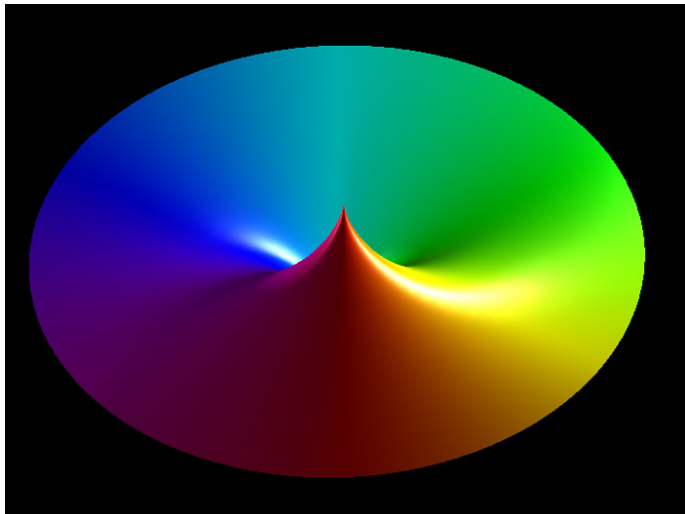
Architecture et  
sous-variétés

Difféomor-  
phismes

Sculptures et  
sous-variétés

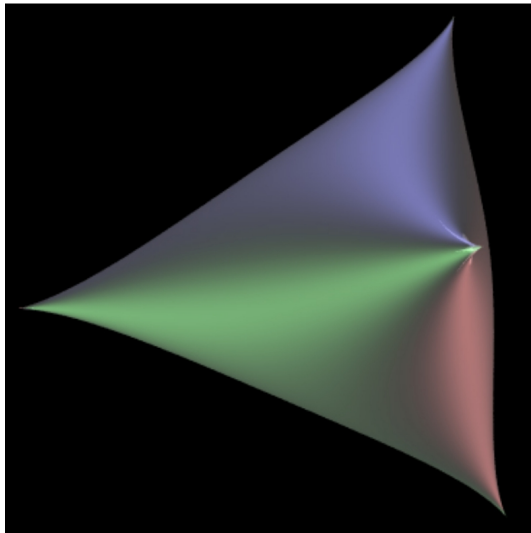
Orientation

Joyeux Noël ?



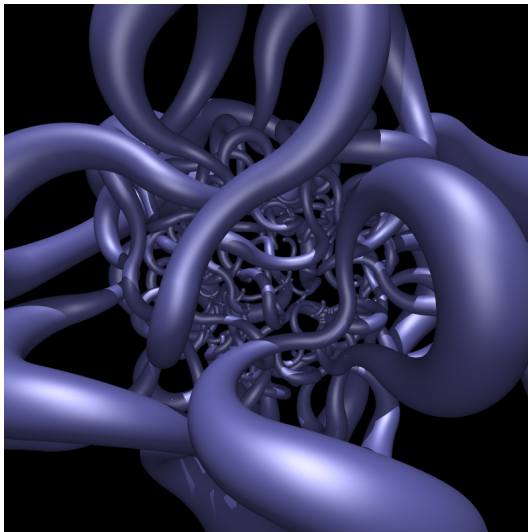
*Un contre-exemple : ceci n'est pas une sous-variété*

# Sous-variétés



*Ni ceci !*

# Sous-variétés



*Une sous-variété ?*

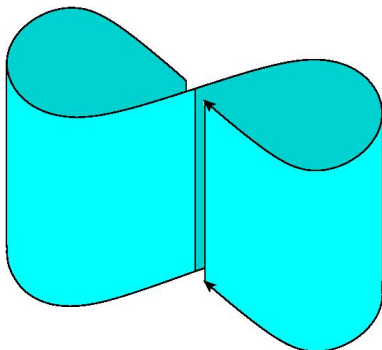
**Mise en garde.**— Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière et injective, en général  $f(\mathcal{U})$  n'est pas une sous-variété.

• **Exemple.**— Soit

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \left( \frac{u + u^3}{1 + u^4}, \frac{u - u^3}{1 + u^4}, v \right) \end{aligned}$$

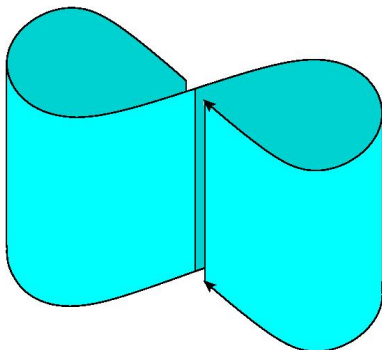
• On vérifie aisément que  $f$  est injective et régulière et que, de plus, l'image  $S = f(\mathbb{R}^2)$  est un cylindre de base une lemniscate de Bernoulli.

# Sous-variétés



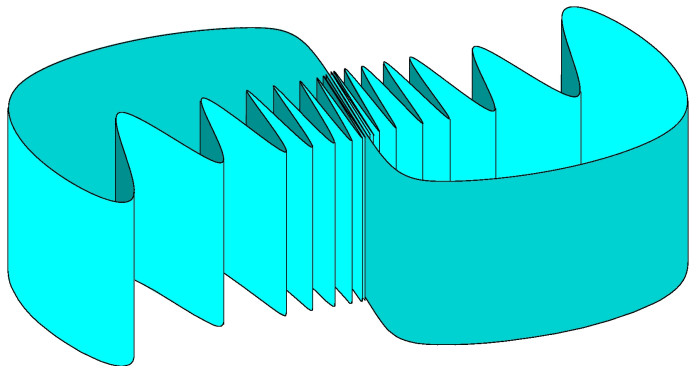
- Soit  $U$  une boule de centre  $p = f(0, v)$  et de rayon petit. L'intersection  $U \cap S$  est homéomorphe à une union de deux plans sécants. L'espace  $S$  ne peut être une sous-variété.

# Sous-variétés



- Le support  $S = f(\mathcal{U})$  de  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  régulière et injective est une sous-variété si  $f$  s'étend en un difféomorphisme de  $\mathcal{U} \times ]-\epsilon, \epsilon[$  sur un voisinage de  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

# Sous-variétés



*Autre exemple de support de surface paramétrée régulière  
et injective qui n'est pas une sous-variété*

## Sous-variétés

**Définition.**— On dit que  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est une IMMERSION de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}^n$  si, en tout point  $p \in \mathcal{U}$ , la différentielle  $df_p : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est injective.

- Notons que nécessairement  $m \leq n$ .

**Exemple 1.**— Si  $m = 2$  les immersions de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}^3$  sont précisément les surfaces paramétrées  $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  régulières.

**Exemple 2.**— Si  $m = 1$  les immersions de l'intervalle ouvert  $I$  dans  $\mathbb{R}^3$  sont précisément les courbes paramétrées  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  régulières.

- On a constaté que l'image d'un ouvert par une immersion injective n'est pas nécessairement une sous-variété.

## Sous-variétés

- En revanche cette image est *localement* une sous-variété que  $f$  soit injective ou non.



**Théorème.**— Soit  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une immersion  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , et  $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ . Alors, il existe un ouvert  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$  de  $(u_0, v_0)$  tel que  $S_0 = f(\mathcal{U}_0)$  soit une  $C^k$ -sous-variété.

## Sous-variétés

**Démonstration.**— Soit  $(f_1, f_2, f_3)$  les composantes de  $f$ .  
Puisque  $df_{(u_0, v_0)}$  est de rang deux, et quitte à permuter les  
coordonnées dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut supposer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

est inversible.

- Soit

$$\begin{aligned} g : \quad U \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) &\longmapsto (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v) + w) \end{aligned}$$

- La matrice jacobienne de  $g$  en  $(u_0, v_0)$  est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u_0, v_0) & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u_0, v_0) & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(u_0, v_0) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est donc inversible.

- D'après le théorème d'inversion local, il existe un voisinage  $V \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}$  de  $(u_0, v_0)$  tel que  $g|_V$  soit un difféomorphisme sur son image  $U = g(V)$ . On pose  $\phi = g|_V^{-1} : U \rightarrow V$ .

## Sous-variétés

- Soit  $\mathcal{U}_0 = V \cap (\mathcal{U} \times \{0\})$ . Puisque  $V \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ , on a

$$\mathcal{U}_0 = V \cap (\mathcal{U} \times \{0\}) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

- Soit  $S_0 = f(\mathcal{U}_0)$ . On a

$$g(\mathcal{U}_0) = S_0$$

puisque

$$\forall (u, v) \in \mathcal{U}_0, \quad g(u, v, 0) = f(u, v).$$

Donc  $\phi(S_0) = \mathcal{U}_0 = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$

- Bien sûr  $S_0 \subset U = g(V)$  donc  $S_0 = S_0 \cap U$  et finalement

$$\phi(U \cap S_0) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

L'image  $S_0$  est donc bien une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . □

# Sous-variétés

**Corollaire (en exo).**– *Une partie  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  est une sous-variété de dimension deux ssi pour tout point  $p \in S$  il existe un voisinage  $U$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$ , un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^2$  et une application  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui est à la fois une immersion et un homéomorphisme de  $\mathcal{U}$  sur  $U \cap S$ .*

## Sous-variétés

**Définition.**— On dit que  $h : U \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^n$  est une  $C^k$ -SUBMERSION de  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$  ( $k \geq 1$ ) si, en tout point  $p \in U$ , la différentielle  $df_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est surjective.

- Notons que nécessairement  $m \geq n$ .

**Exemple 1.**— La projection orthogonale  $\mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^1$ .

**Exemple 2.**— La fonction *distance au carré*

$$\begin{aligned} h : \mathbb{E}^3 \setminus \{O\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longrightarrow x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

**Exemple 3.**— Plus généralement  $h : U \subset \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une submersion ssi, pour tout  $p \in U$ ,  $\text{grad}_p h \neq 0$ .

## Sous-variétés

**Théorème.**— Soit  $h : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une  $C^k$ -submersion,  $k \geq 1$ , et  $a$  un point de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $h^{-1}(a) \neq \emptyset$ , alors

$$S = h^{-1}(a)$$

est une  $C^k$ -sous-variété de dimension 2 de  $\mathbb{R}^3$ .

**Démonstration.**— Soit  $p \in h^{-1}(a)$ . Puisque  $dh_p$  est non nul, quitte à permuter les coordonnées dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut supposer

$$\frac{\partial h}{\partial z}(p) \neq 0.$$

- On pose

$$\begin{aligned} g : \quad W &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, h(x, y, z)) \end{aligned}$$

- La matrice jacobienne de  $g$  en  $p$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x}(p) & \frac{\partial h}{\partial y}(p) & \frac{\partial h}{\partial z}(p) \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible.

- D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert  $U \subset W \subset \mathbb{R}^3$  tel que  $g|_U$  soit un difféomorphisme sur son image  $V = g(U)$ . On pose  $\phi := g|_U : U \longrightarrow V$ .

## Sous-variétés

- On a

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) \in V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) &\iff h(x, y, z) = 0 \\ &\quad \text{et } (x, y, z) \in U \\ &\iff (x, y, z) \in S = h^{-1}(a) \\ &\quad \text{et } (x, y, z) \in U \\ &\iff (x, y, z) \in U \cap S \end{aligned}$$

- Autrement dit  $\phi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$  i. e.  $S$  est une sous-variété de dimension deux de  $\mathbb{R}^3$ . □

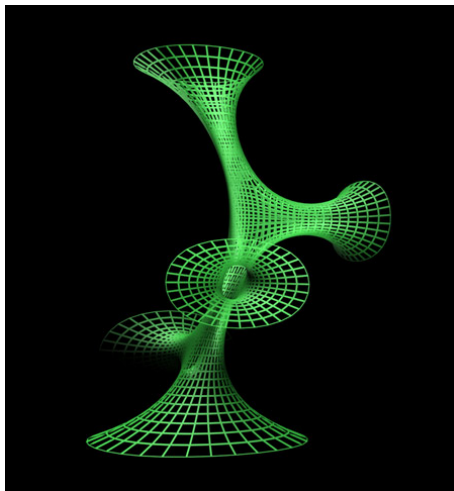
**Application : la sphère (toujours et encore).**– Puisque

$$h : (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

est une submersion de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $S^2 = h^{-1}(0)$ , on déduit du théorème que  $S^2$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ .



# Architecture et sous-variétés



# Architecture et sous-variétés

CM-S6 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Architecture et  
sous-variétés

Difféomor-  
phismes

Sculptures et  
sous-variétés

Orientation

Joyeux Noël ?



# Architecture et sous-variétés



# Architecture et sous-variétés



# Architecture et sous-variétés

CM-S6 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Architecture et  
sous-variétés

Difféomor-  
phismes

Sculptures et  
sous-variétés

Orientation

Joyeux Noël ?



# Architecture et sous-variétés

CM-S6 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Architecture et  
sous-variétés

Difféomor-  
phismes

Sculptures et  
sous-variétés

Orientation

Joyeux Noël ?



# Architecture et sous-variétés

Sous-variétés

Architecture et  
sous-variétés

Difféomor-  
phismes

Sculptures et  
sous-variétés

Orientation

Joyeux Noël ?



# Architecture et sous-variétés

CM-S6 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Architecture et  
sous-variétés

Difféomor-  
phismes

Sculptures et  
sous-variétés

Orientation

Joyeux Noël ?



## Difféomorphismes

**Définition.**— On appelle  $C^k$ -DIFFÉOMORPHISME LOCAL,  $k \geq 1$  (ou encore APPLICATION ÉTALE) toute application de classe  $C^k$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et dont la différentielle est inversible en tout point.

**Théorème d'inversion locale (reformulation).**— Soit  $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une application  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) et  $a \in U$  un point où la différentielle  $d\phi_a$  est inversible, alors il existe un ouvert  $U_0 \subset U$  tel que  $a \in U_0$  et  $\phi|_{U_0}$  soit un difféomorphisme de classe  $C^k$ .

**Exemple 1.**— L'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

est un  $C^\infty$ -difféomorphisme local puisque  $d\phi_x = \phi'(x)dx = 2xdx$ .

# Difféomorphismes

## Exemple 2.– L'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z = x + iy &\longmapsto z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy \end{aligned}$$

est un  $C^\infty$ -difféomorphisme local.

- En effet la matrice de la différentielle  $d\phi_{(x,y)}$  vaut

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

et son déterminant vaut  $4(x^2 + y^2) > 0$ .

**Exemple 3.**– L'application

$$\begin{aligned}\phi : ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) &\longmapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)\end{aligned}$$

est un  $C^\infty$ -difféomorphisme local.

- En effet la matrice de la différentielle  $d\phi_{(\rho, \theta)}$  dans la base des coordonnées est

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix},$$

et son déterminant vaut  $\rho > 0$ .

# Difféomorphismes

**Exercice.**– Montrer qu'un difféomorphisme local  $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est une APPLICATION OUVERTE : l'image de tout ouvert de  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

- Un difféomorphisme local injectif est un homéomorphisme sur son image puisque, dire que  $\phi$  est ouverte, c'est dire que  $\phi^{-1}$  est continue.
- En fait on a plus, une application directe du TIL montre le résultat suivant :

**Corollaire.**– Soit  $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un  $C^k$ -difféomorphisme local,  $k \geq 1$ . Si  $\phi$  est injectif alors  $\phi$  est un  $C^k$ -difféomorphisme sur son image.

## Difféomorphismes

**Proposition.**— Soit  $S$  une  $C^k$ -sous-variété de dimension 2 ( $k \geq 1$ ) de  $\mathbb{R}^3$  et soient  $f_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow S$  et  $f_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow S$  deux immersions de classe  $C^k$  injectives alors

$$f_2^{-1} \circ f_1 : \mathcal{U}_1 \cap f_1^{-1}(f_2(\mathcal{U}_2)) \rightarrow \mathcal{U}_2 \cap f_2^{-1}(f_1(\mathcal{U}_1))$$

est un  $C^k$ -difféomorphisme.

- Ce résultat clé est manquant dans la théorie des surfaces paramétrées. En effet, deux paramétrisations régulières et injectives

$$f_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad f_2 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

peuvent avoir le même support  $S$  sans que  $f_2^{-1} \circ f_1$  soit un difféomorphisme.

- Dans ce cas, la proposition implique que ce support n'est pas une sous-variété.

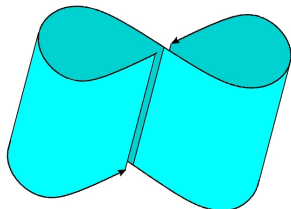
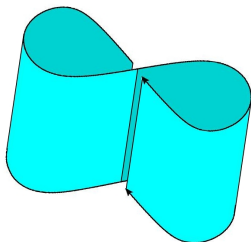
# Difféomorphismes

**Contre-exemple.**— Soient

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto \left( \frac{u + u^3}{1 + u^4}, \frac{u - u^3}{1 + u^4}, v \right)$$

et

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto \left( \frac{u + u^3}{1 + u^4}, -\frac{u - u^3}{1 + u^4}, v \right)$$



# Difféomorphismes

- On a

$$f_2^{-1} \circ f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(u, v) \longmapsto \begin{cases} (u^{-1}, v) & \text{si } u \neq 0 \\ (0, v) & \text{sinon.} \end{cases}$$

qui n'est même pas continue.

**Démonstration.**— On suppose  $f_1(\mathcal{U}_1) \cap f_2(\mathcal{U}_2) \neq \emptyset$  sinon, il n'y a rien à démontrer.

- Soit  $p \in f_1(\mathcal{U}_1) \cap f_2(\mathcal{U}_2)$ . Puisque  $S$  est une sous-variété, il existe  $U$  contenant  $p$  et un difféomorphisme  $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tel que

$$\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

# Difféomorphismes

- Les composées  $\phi \circ f_1$  et  $\phi \circ f_2$  sont des immersions injectives de  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$  dans  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ , autrement dit, des difféomorphismes locaux injectifs.
- Ce sont donc des difféomorphismes sur leurs images. Il en est donc de même de

$$f_2^{-1} \circ f_1 = (\phi \circ f_2)^{-1} \circ (\phi \circ f_1).$$



## Difféomorphismes

**Définition.**— Soit  $S$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . On dit qu'un vecteur  $X \in \mathbb{R}^3$  est TANGENT À  $S$  en un point  $p \in S$  s'il existe

$$\bar{\gamma} : ]-\epsilon, \epsilon[ \xrightarrow{C^1} S \subset \mathbb{R}^3$$

telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma'(0) = X$ .

**Lemme (facile et admis).**— *Les vecteurs tangents en un point  $p \in S$  forment un espace vectoriel de dimension  $p$ . Il est noté  $\overrightarrow{T_p S}$ .*

**Définition.**— L'ESPACE TANGENT en  $p$  à  $S$ , noté  $T_p S$ , est l'ensemble des points  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $P - p$  soit dans  $\overrightarrow{T_p S}$ .

- Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière et injective et  $p = f(u, v)$ . L'espace tangent de  $f$  en  $(u, v)$  et l'espace tangent de  $S$  en  $p$  coïncident (choisir  $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ ).

## Difféomorphismes

**Définition.**— Soient  $p \in S$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  contenant  $p$  et  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un difféomorphisme qui redresse  $S$  :

$$\phi(U \cap S) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}.$$

On note  $\mathcal{U} := \phi(U \cap S)$  puis  $f = \phi|_{\mathcal{U}}^{-1}$  et  $(u, v)$  tel que  $f(u, v) = p$ . Une application  $h : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  est dite DE CLASSE  $C^k$  en  $p$  ( $k \geq 1$ ) si  $h \circ f$  est de classe  $C^k$  en  $(u, v)$ .

- Cette définition ne dépend pas du choix du difféomorphisme qui redresse  $S$ . En effet, soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  deux tels difféomorphismes alors

$$f_1 = (\phi_1^{-1})|_{\mathcal{U}_1} \quad \text{et} \quad f_2 = (\phi_2^{-1})|_{\mathcal{U}_2}$$

sont deux immersions injectives et donc  $f_2^{-1} \circ f_1$  est un  $C^k$ -difféomorphisme.

## Difféomorphismes

- Puisque

$$\begin{aligned} h \circ f_1 &= h \circ (f_2 \circ f_2^{-1}) \circ f_1 \\ &= (h \circ f_2) \circ (f_2^{-1} \circ f_1) \end{aligned}$$

on déduit que  $h \circ f_1$  est différentiable en  $(u, v)$  ssi  $h \circ f_2$  est différentiable en  $(f_1^{-1} \circ f_2)(u, v)$ .

- Ceci montre également que  $h : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  est de classe  $C^k$  en  $p$  si  $h \circ f$  est de classe  $C^k$  en  $(u, v)$  où  $f : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  une immersion injective telle que  $f(u, v) = p$

**Exemple.**– Soit  $S$  une  $C^2$ -sous-variété. Si elle existe, l'application normale  $n : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  est de classe  $C^1$ .

- En effet, soit  $f : U \rightarrow S$  est une immersion injective de classe  $C^2$  alors  $n \circ f = N$  et

$$N(u, v) = \pm \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}(u, v).$$

# Difféomorphismes

**Définition.**— Soit  $h : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$ . On définit la DIFFÉRENTIELLE en  $p \in S$  de  $h$  par

$$\forall X \in \overrightarrow{T_p S}, \quad dh_p(X) := d(h \circ f)_{(u,v)}(U)$$

où  $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$  est une immersion injective telle que  $p = f(u, v)$  et  $U$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $df_{(u,v)}(U) = X$ .

- Cette définition ne dépend pas de l'immersion injective  $f$  que l'on a choisi.
- En effet, soit  $g : \mathcal{V} \longrightarrow S$  une autre immersion injective, soit  $(u', v')$  un point tel que  $g(u', v') = p$  et soit  $V \in \mathbb{R}^2$  tel que  $dg_{(u',v')}(V) = X$ .

## Difféomorphismes

- D'après la proposition  $\varphi = g^{-1} \circ f$  est un difféomorphisme et on a  $f = g \circ \varphi$ . Puisque

$$X = dg_{(u',v')}(V) = df_{(u,v)}(U)$$

et que

$$df_{(u,v)}(U) = dg_{(u',v')} \circ d\varphi_{(u,v)}(U)$$

c'est que

$$V = d\varphi_{(u,v)}(U).$$

- Par conséquent

$$\begin{aligned} dh_p(X) &= d(h \circ f)_{(u,v)}(U) \\ &= d(h \circ g \circ \varphi)_{(u,v)}(U) \\ &= d(h \circ g)_{(u',v')} \circ d\varphi_{(u,v)}(U) \\ &= d(h \circ g)_{(u',v')}(V). \end{aligned}$$

# Difféomorphismes

**Application 1 : l'opérateur de Weingarten.**— A partir d'une application normale unitaire  $n : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on définit pour tout  $p \in S$  l'opérateur de Weingarten

$$W_p = -dn_p : T_p S \rightarrow T_p S.$$

Ses valeurs propres donnent les courbures principales de la sous-variété en  $p$ , puis leur demi-somme et leur produit, la courbure moyenne et la courbure de Gauss.

- Bien sûr tout ceci coïncide en un sens évident avec les mêmes courbures définies pour une surface paramétrée  $f : \mathcal{U} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ .

## Difféomorphismes

**Application 2 : l'application exponentielle.**— Soient  $p \in S$  et  $v \in \overrightarrow{T_p S}$ . La courbe paramétrée

$$t \longmapsto \bar{\gamma}(t) := \exp_p(tv)$$

est la géodésique passant par  $p = \bar{\gamma}(0)$  et telle que

$$\bar{\gamma}'(0) = v.$$

Soit

$$\begin{array}{ccc} \gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ & \longrightarrow & D(0, \epsilon) \subset \overrightarrow{T_p S} \\ t & \longmapsto & tv \end{array}$$

Evidemment  $\gamma(0) = 0$  et  $\gamma'(0) = v$ .

• On a  $\bar{\gamma} = \exp_p \circ \gamma$ , d'où

$$\bar{\gamma}'(0) = d(\exp_p)_0(\gamma'(0))$$

par conséquent

$$d(\exp_p)_0(v) = v.$$

# Difféomorphismes

**Proposition (en exo).**— Soient  $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$  et  $p = f(u, v) \in S$ . Si  $df_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \overrightarrow{T_p S}$  est un isomorphisme alors  $f$  est un difféomorphisme local en  $p$ .

- L'application  $\exp_p$  est un difféomorphisme local en l'origine.

**Définition.**— Un voisinage  $\mathcal{V} \subset S$  de  $p \in S$  est dit NORMAL s'il est l'image  $\mathcal{V} = \exp_p(\mathcal{U})$  d'un voisinage  $\mathcal{U} \subset \overrightarrow{T_p S}$  de  $O$  sur lequel  $\exp_p$  est un difféomorphisme.

# Sculptures et sous-variétés

CM-S6 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Architecture et  
sous-variétés

Difféomor-  
phismes

**Sculptures et  
sous-variétés**

Orientation

Joyeux Noël ?



Robert Longhurst

# Sculptures et sous-variétés

CM-S6 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Architecture et  
sous-variétés

Difféomor-  
phismes

**Sculptures et  
sous-variétés**

Orientation

Joyeux Noël ?



# Sculptures et sous-variétés



# Sculptures et sous-variétés

CM-S6 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Architecture et  
sous-variétés

Difféomor-  
phismes

**Sculptures et  
sous-variétés**

Orientation

Joyeux Noël ?



# Sculptures et sous-variétés



# Sculptures et sous-variétés

CM-S6 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Architecture et  
sous-variétés

Difféomor-  
phismes

**Sculptures et  
sous-variétés**

Orientation

Joyeux Noël ?



# Orientation

- On suppose que l'espace euclidien  $\mathbb{E}^3$  est orienté.

**Définition.**— On dit qu'une sous-variété de dimension deux  $S \subset \mathbb{R}^3$  est ORIENTABLE si existe une application normale

$$n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

continue. Une sous-variété orientable est ORIENTÉE lorsque l'on a choisi l'une des deux applications normales unitaires pour induire une orientation sur tous les plans tangents de  $S$ .

- L'orientation induite est la suivante : soit  $p \in S$ , une base  $(X, Y)$  de  $\overrightarrow{T_p S}$  est dite directe si  $(X, Y, n(p))$  est directe dans  $\mathbb{E}^3$ .

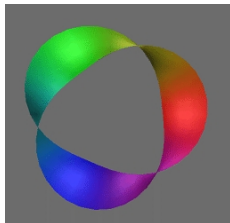
## Orientation

**Exemple 1.**– La sphère est orientable. Prendre par exemple  $n(p) = p$ .

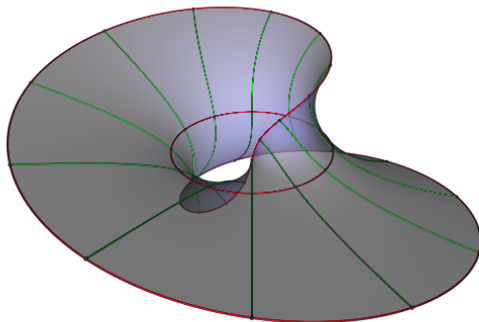
**Exemple 2.**– Le ruban de Möbius  $M = f(]0, 1[ \times ]0, 2\pi])$  est une variété de dimension deux qui n'est pas orientable.

$$f : ]0, 1[ \times ]0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \theta) \longmapsto \begin{pmatrix} (1 + r \cos \frac{\theta}{2}) \cos \theta \\ (1 + r \cos \frac{\theta}{2}) \sin \theta \\ r \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

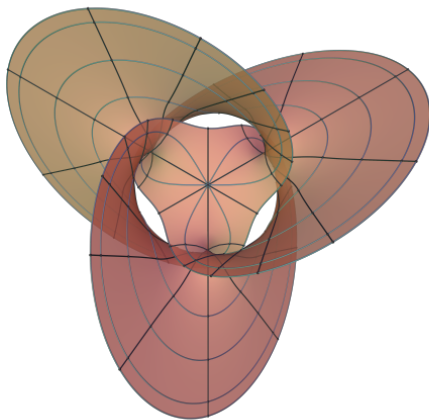


# Orientation



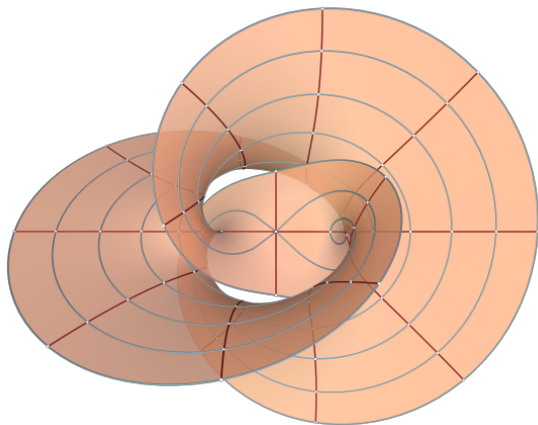
*La surface de Möbius-Meeks*

# Orientation



*La surface de Kusner*

# Orientation



*La surface de Lopez*

# Orientation

**Théorème.**— Soient  $h : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une submersion et  $a \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $h^{-1}(a) \neq \emptyset$  alors  $S = h^{-1}(a)$  est sous-variété de dimension deux orientable.

**Démonstration.**— Une normale unitaire est donnée par

$$n(p) = \frac{\text{grad } h}{\|\text{grad } h\|}(p).$$



- Autrement dit, on ne peut pas simplifier la définition des sous-variétés en les caractérisant comme le lieu des zéros des submersions : on éliminerait toutes les sous-variétés non orientables !

# Orientation

**Une remarque.**— Un changement d'orientation transforme l'endomorphisme de Weingarten, la seconde forme fondamentale, les courbures normales et la courbure moyenne en leurs opposés. En revanche la première forme fondamentale et la courbure de Gauss restent inchangées.

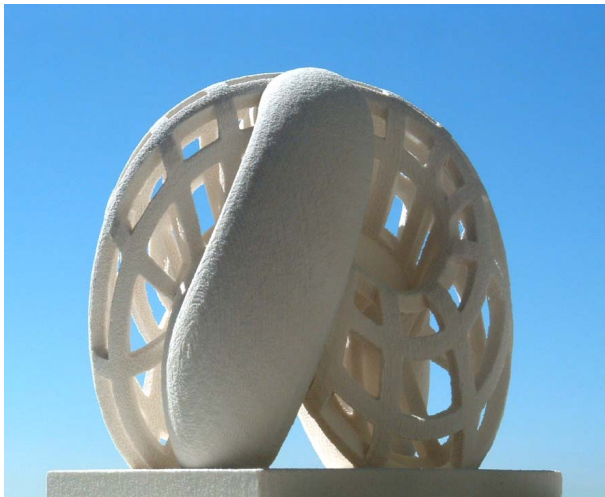
# Joyeux Noël ?



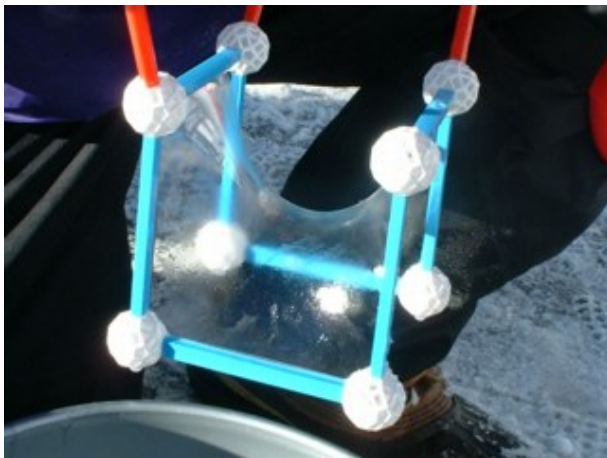
# Joyeux Noël ?



# Joyeux Noël ?



# Joyeux Noël ?



# Joyeux Noël ?



# Joyeux Noël ?

