Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé de l'examen final

6 Janvier 2012 - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Les loxodromies sont des lignes de courbure de la sphère.

Rép.– Vrai, toute courbe de la sphère est une ligne de courbure.

2.– Les loxodromies sont des courbes asymptotiques de la sphère.

Rép.– Faux, la courbure normale de la sphère est strictement positive, en toute direction et en tout point.

3.– Il existe sur le tore de révolution une courbe asymptotique fermée.

Rép.– Vrai, les deux courbes fermées correspondant aux points où la courbure de Gauss est nulle conviennent.

4.– Il existe sur le tore de révolution une courbe géodésique fermée.

Rép.– Vrai, les méridiens des surfaces de révolutions sont des géodésiques et pour les tores ces méridiens sont des cercles.

5.– Sur toute surface réglée il existe un point où la courbure de Gauss est strictement positive.

Rép.– Faux. La courbure de Gauss d'une surface réglée est toujours négative ou nulle (ceci a été vu en TD).

6.– Sur toute surface de rotation il existe un point où la courbure de Gauss est strictement positive.

Rép.– Faux, penser à la caténoïde.

7.– On dit que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est doublement périodique (de période 2π) si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x + 2\pi, y) = f(x, y)$ et $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$. Soit $\alpha = h(x, y)dx \wedge dy$ une 2-forme de $\mathbb{R}^2$ avec h doublemement périodique (de période 2π). Si $\beta = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ est une 1-forme de $\mathbb{R}^2$ telle que $\alpha = d\beta$ alors P et Q sont doublemement périodiques (de période 2π).

Rép.– Faux. Supposons que P et Q soient doublement périodiques et que $\alpha = d\beta$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ non doublement périodique alors $\beta_1 = \beta + df$ est une primitive de α dont les fonctions $P_1 := P + f_x$ et $Q_1 := Q + f_y$ ne sont pas doublement périodiques.

8.– Soit $\beta = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ une 1-forme de $\mathbb{R}^2$ avec P et Q doublemement périodiques (de période 2π). Soit $\alpha = d\beta = h(x, y)dx \wedge dy$, alors la fonction h est nécessairement doublement périodique (de période 2π).

Rép.– Vrai, puisque $h = Q_x - P_y$.

9.– Si les cœfficients de la première forme fondamentale d'une surface paramétrée régulière sont des fonctions constantes alors la courbure de Gauss est identiquement nulle.

Rép.– Vrai. C'est une conséquence immédiate de la formule de Brioschi.

10.– Si les cœfficients de la première forme fondamentale d'une surface paramétrée régulière sont des fonctions constantes alors la courbure moyenne est identiquement nulle.

Rép.– Faux, penser au cylindre.

Problème. – Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée C^∞ dont la première forme fondamentale s'écrit

$$\forall (u, v) \in \mathcal{U}, \quad E(u, v) \equiv 1, \quad F(u, v) = \cos\theta(u, v), \quad G(u, v) \equiv 1$$

avec $\theta : \mathcal{U} \xrightarrow{C^\infty}]0,\pi[$. Une telle surface paramétrée est dite *de Tchebychev*.

1) Montrer que f est régulière.

Rép.– On a

$$\|f_u \wedge f_v\|^2 = EG - F^2 = (1-\cos^2(\theta))^2$$

et puisque $\theta \in]0,\pi[$, ceci implique $\|f_u \wedge f_v\|^2 > 0$. Par conséquent, f est régulière.

2) En utilisant la formule de Brioschi, démontrer que la courbure de Gauss K de f est donnée par $K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin\theta}$.

Rép.– En appliquant la formule de Brioschi il vient :

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \cos\theta}{\partial u \partial v} & 0 & \frac{\partial \cos\theta}{\partial u} \\ \frac{\partial \cos\theta}{\partial u} & 1 & \cos\theta \\ 0 & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & \cos\theta & 1 \end{vmatrix}}{(1-\cos^2(\theta))^2}$$

soit encore

$$K = \frac{1}{\sin^4\theta} \begin{vmatrix} -\theta_{uv}\sin\theta - \theta_u\theta_v\cos\theta & 0 & -\theta_u\sin\theta \\ -\theta_v\sin\theta & 1 & \cos\theta \\ 0 & \cos\theta & 1 \end{vmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à développer pour obtenir $K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin\theta}$.

3) Montrer que f_{uv} est un vecteur normal à la surface.

Rép.– En prenant la dérivée partielle par rapport à v de

$$E(u,v) = \langle f_u, f_u \rangle = 1$$

on obtient

$$2\langle f_{uv}, f_u \rangle = 0.$$

De même

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2\langle f_{uv}, f_v \rangle = 0.$$

Ainsi f_{uv} est orthogonal à f_u et à f_v, c'est donc un vecteur normal à la surface.

4) On s'intéresse à la réciproque de la question précédente. On se donne une surface paramétrée régulière

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (s,t) & \longmapsto & \tilde{f}(s,t) \end{array}$$

telle que $\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial s \partial t}$ soit normale à $\tilde{f}$.

a) Montrer que les cœfficients $\widetilde{E}$ et $\widetilde{G}$ de la première forme fondamentale de $\tilde{f}$ ne dépendent que d'une variable.

b) Soit (s_0, t_0) un point quelconque de $\mathcal{V}$ et $\Phi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\Phi(s,t) = (\int_{s_0}^{s} \sqrt{\widetilde{E}(x,t_0)}dx, \int_{t_0}^{t} \sqrt{\widetilde{G}(s_0,x)}dx).$$

Ecrire la différentielle de Φ en (s_0, t_0). Montrer que Φ est un difféomorphisme sur un voisinage $\mathcal{V}_0$ de (s_0, t_0).

c) On note $\mathcal{U} = \Phi(\mathcal{V}_0)$ et Φ^{-1} la réciproque de $\Phi_{|\mathcal{V}_0}$. On pose aussi $(u_0, v_0) = \Phi(s_0, t_0)$. Déterminer $d\Phi^{-1}_{(u_0,v_0)}$. Montrer que la surface paramétrée $f := \tilde{f} \circ \Phi^{-1} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est de Tchebychev.

Rép.– a) Puisque $\tilde{f}_{st}$ est normale à $\tilde{f}$, on a $\langle \tilde{f}_{st}, \tilde{f}_s \rangle = 0$ d'où $\frac{\partial}{\partial t}\Big(\langle \tilde{f}_s, \tilde{f}_s \rangle\Big) = 0$ et par conséquent $\widetilde{E}$ ne dépend que de s. De même, la relation $\langle \tilde{f}_{st}, \tilde{f}_t \rangle = 0$ implique que $\widetilde{G}$ ne dépend que de t.

b) La différentielle

$$d\Phi_{(s_0,t_0)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\widetilde{E}(s_0,t_0)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\widetilde{G}(s_0,t_0)} \end{pmatrix}.$$

est inversible. Le théorème de la fonction implicite montre alors qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}_0$ de (s_0, t_0) sur lequel Φ est inversible.

c) Pour tout $(u, v) \in \mathcal{U}$, on a

$$d\Phi^{-1}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \widetilde{E}^{-\frac{1}{2}}(\Phi^{-1}(u,v)) & 0 \\ 0 & \widetilde{G}^{-\frac{1}{2}}(\Phi^{-1}(u,v)) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} df_{(u,v)} & := & d\widetilde{f}_{(s,t)} \circ d\Phi^{-1}_{(u,v)} \\ & = & \Big(\tilde{f}_u(s,t), \tilde{f}_v(s,t)\Big) . \begin{pmatrix} \widetilde{E}^{-\frac{1}{2}}(\Phi^{-1}(u,v)) & 0 \\ 0 & \widetilde{G}^{-\frac{1}{2}}(\Phi^{-1}(u,v)) \end{pmatrix} \\ & = & \Big(\widetilde{E}^{-\frac{1}{2}}(\Phi^{-1}(u,v)).\tilde{f}_u(\Phi^{-1}(u,v)), G^{-\frac{1}{2}}(\Phi^{-1}(u,v)).\tilde{f}_v(\Phi^{-1}(u,v))\Big) . \end{array}$$

Par conséquent $E(u, v) = \langle \tilde{f}_u, \tilde{f}_u \rangle = 1$ et $G(u, v) = \langle \tilde{f}_v, \tilde{f}_v \rangle = 1$. Puisque la surface paramétrée $\tilde{f}$ est régulière et que Φ est un difféomorphisme, la composée est nécessairement régulière. Ainsi $EG - F^2 > 0$. Cette relation implique ici $0 \leq F^2 < 1$. Donc, il existe $\theta : \mathcal{U} \longrightarrow]0, \pi[$ tel que $F = \cos\theta$. Ainsi f est une surface paramétrée de Tchebychev.

5) Soit $\tilde{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière injective dont la courbure de Gauss K est constante et égale à -1. Montrer l'existence en tout point p de $S = \tilde{f}(\mathcal{V})$ de deux directions asymptotiques.

Rép.– Soit (e_1, e_2) une base orthonormée directe qui diagonalise l'opérateur de Weingarten W. Notons λ_1, λ_2 ses valeurs propres. Puisque $K = \lambda_1\lambda_2 = -1$, nécessairement $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = -\lambda_1^{-1}$. Quitte à changer les indices, on peut toujours supposer que $\lambda_1 > 0$. Un vecteur $v = Xe_1 + Ye_2$ est asymptotique si $0 = \langle W(v), v\rangle$, c'est-à-dire si $\lambda_1 X^2 - \lambda_1^{-1} Y^2 = 0$. La résolution de cette équation fait apparaître deux directions asymptotiques distinctes, l'une portée par $v_1 = \alpha^{-1}e_1 + \alpha e_2$ et l'autre par $v_2 = \alpha^{-1}e_1 - \alpha e_2$ avec $\alpha := \sqrt{\lambda_1} > 0$.

6) On note v_1 et v_2 des vecteurs directeurs des deux directions asymptotiques. Montrer que $dn(v_1) \perp v_1$ et $dn(v_2) \perp v_2$ puis déterminer $n \wedge dn(v_1)$ et $n \wedge dn(v_2)$ où $n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une normale unitaire.

Rép.– D'une part, on a

$$W(v_1) = -dn(v_1) = \lambda_1\alpha^{-1}e_1 - \lambda_1^{-1}\alpha e_2 = \alpha e_1 - \alpha^{-1}e_2$$

et

$$W(v_2) = -dn(v_2) = \lambda_1\alpha^{-1}e_1 + \lambda_1^{-1}\alpha e_2 = \alpha e_1 + \alpha^{-1}e_2.$$

Il est ensuite immédiat de vérifier que $\langle W(v_1), v_1\rangle = 0$ et $\langle W(v_2), v_2\rangle = 0$. D'autre part, dire que (e_1, e_2) est directe, c'est dire que (e_1, e_2, n) est directe dans $\mathbb{R}^3$. En particulier $n \wedge e_1 = e_2$ et $n \wedge e_2 = -e_1$. On calcule alors sans peine

$$v_1 = -n \wedge dn(v_1) \quad \text{et} \quad v_2 = n \wedge dn(v_2).$$

7) On suppose désormais que $\tilde{f}$ est telle que, en tout point $(s, t) \in \mathcal{V}$, $\tilde{f}_s$ est proportionnelle à v_1 et $\tilde{f}_t$ est proportionnelle à v_2. On pose $N = n \circ \tilde{f}$. Montrer que

$$\tilde{f}_s = -N \wedge N_s \quad \text{et} \quad \tilde{f}_t = N \wedge N_t.$$

Rép.– Supposons $\tilde{f}_s = g.v_1$ et $\tilde{f}_t = h.v_2$ où $h, g : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a

$$N_s = \frac{\partial N}{\partial s} = dn(\tilde{f}_s) = dn(g.v_1) = g.dn(v_1).$$

Ainsi

$$v_1 = -n \wedge dn(v_1) \Longrightarrow g.v_1 = -g.\left(n \wedge dn(v_1)\right) \Longrightarrow g.v_1 = -n \wedge dn(g.v_1) \Longrightarrow \tilde{f}_s = -N \wedge N_s$$

et de même pour $\tilde{f}_t = N \wedge N_t$.

8) Montrer que $\tilde{f}_{st} = N_s \wedge N_t$. En déduire que $\tilde{f}$ admet localement un reparamétrage en une surface paramétrée de Tchebychev.

Rép.– En dérivant par rapport à t la première égalité de la question 7, puis en dérivant la seconde par rapport à s et en sommant les deux résultats on obtient $\tilde{f}_{st} = N_s \wedge N_t$. Les vecteurs N_s et N_t sont orthogonaux à N et ils ne sont pas colinéaires d'après la question 6, donc $N_s \wedge N_t$ est un vecteur normal. Il s'en suit que $\tilde{f}_{st}$ est lui aussi un vecteur normal. D'après la question 4, $\tilde{f}$ admet localement un reparamétrage en une surface paramétrée de Tchebychev.