Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé de l'examen final du 7 janvier 2014

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Les latitudes d'une surface de rotation sont des géodésiques.

Rép.– Faux, les géodésiques d'une sphère sont les grands cercles. Hormis l'équateur, les latitudes ne sont pas des géodésiques.

2.– Les longitudes d'une surface de rotation sont des géodésiques.

Rép.– Vrai, cela a été établi en TD.

3.– Les règles d'une surface réglée sont des géodésiques.

Rép.– Vrai, ce sont des géodésiques de $\mathbb{E}^3$.

4.– On suppose que les coefficients de la première forme fondamentale d'une paramétrisation $(u, v) \longrightarrow f(u, v)$ sont $E(u, v) = \varphi_1(u)$, $G(u, v) = \varphi_2(v)$ et $F(u, v) = 0$ avec pour tout (u, v), $\varphi_1(u) > 0$ et $\varphi_2(v) > 0$. Alors la courbure de Gauss de la surface est identiquement nulle.

Rép.– Vrai, il suffit d'appliquer la formule de Brioschi.

5.– Soit $(u, v) \longmapsto f(u, v)$ une paramétrisation régulière. On suppose qu'en un point (u_0, v_0) les coefficients de la seconde forme fondamentale valent $\mathcal{L}(u_0, v_0) = 1$, $\mathcal{M}(u_0, v_0) = \frac{1}{2}$ et $\mathcal{N}(u_0, v_0) = 1$ alors, en ce point, la courbure moyenne $H(u_0, v_0)$ ne peut s'annuler.

Rép.– Vrai. En ce point, on a $\mathcal{LN}-\mathcal{M}^2=\frac{3}{4}$ et donc $K(u_0,v_0)>0$. Par conséquent, les courbures principales sont différentes de zéro et de même signe, leur demi-somme $H(u_0,v_0)$ ne peut s'annuler.

6.– Si deux paramétrisations régulières $f_1, f_2 : \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ ont le même opérateur de Weingarten alors elles sont égales : $f_1=f_2$.

Rép.– Faux, si h est un déplacement de $\mathbb{E}^3$ et si $f_2=h\circ f_1$ alors les opérateurs de Weingarten de f_1 et de f_2 coïcident.

7.– Soient $f_1, f_2 : \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ deux paramétrisations régulières ayant les mêmes courbures principales en tout point. Alors il existe un déplacement h de $\mathbb{E}^3$ tel que $f_2=h\circ f_1$.

Rép.– Faux. Par exemple si $f_1 : \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ est la paramétrisation d'une portion de la sphère unité et $f_2=f_1\circ\varphi$ où $\varphi:\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{U}$ un difféomorphisme. Alors f_1 et f_2 ont les mêmes courbures principales en tout point (=1) mais en général il n'existe pas de déplacement h de $\mathbb{E}^3$ tel que $f_2=h\circ f_1$.

8.– Soit $f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière. On suppose qu'en tout point $K(u,v)\geq 1$ alors l'aire de $f(\mathcal{U})$ est plus petite que la somme $\int_{\mathcal{U}}|H(u,v)|d^2S$ où H est la courbure moyenne de f.

Rép.– Vrai. En effet, de l'inégalité $H^2\geq K$ on déduit $H^2\geq 1$ et donc $|H|\geq 1$. Par conséquent

$$\int_{\mathcal{U}}|H(u,v)|d^2S \geq \int_{\mathcal{U}} d^2S = Aire(f(\mathcal{U})).$$

9.– Soit S le support d'une surface paramétrée régulière. On suppose qu'il existe un point $p\in S$ où la courbure de Gauss s'annule : $K(p)=0$. Alors, il existe (au moins) un triangle géodésique[1] $D\subset S$ dont la somme des angles intérieurs vaut π.

Rép.– Faux. Si la surface est un paraboloïde par exemple, on aura $K(p)>0$ pour tout point p autre que le sommet. Ainsi, pour tout triangle géodésique D, on aura $\int_D Kd^2S>0$ ce qui implique que la somme des angles intérieurs du triangle D est différente de π d'après

1. C'est-à-dire un domaine simple dont le bord est formé de trois arcs géodésiques.

le théorème de Gauss-Bonnet.

10.– L'ensemble $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^3 + z^4 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Rép.– Vrai, il suffit de vérifier que $h : \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(x,y,z) \longrightarrow x^3 + y^3 + z^3$ est une submersion puis de constater que $S = h^{-1}(1)$.

Problème. – Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux courbes C^∞ paramétrées par la longueur d'arc et soit f la surface paramétrée définie par

$$\begin{array}{cccc} f : & [a,b] \times [c,d] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \alpha(u) + \beta(v). \end{array}$$

Une telle surface est dite *de translation.*

1) i) Déterminer les coefficients E, F et G de la première forme fondamentale de f ainsi que les points réguliers de f en fonction de l'angle $\varphi(u,v)$ entre $\alpha'(u)$ et $\beta'(v)$.

ii) On suppose désormais qu'en tout point $\varphi(u,v) \in \,]0,\pi[$. On note $(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha)$ (resp.$(\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\beta, \mathbf{b}_\beta)$) le trièdre de Frenet de α (resp. de β). Déterminer une normale unitaire $N(u,v)$ en tout point régulier (u,v) de f.

Rép.– i) On a $f_u(u,v) = \alpha'(u)$ et $f_v(u,v) = \beta'(v)$ d'où $E \equiv G \equiv 1$ et $F(u,v) = \langle \alpha'(u), \beta'(v) \rangle = \cos\varphi(u,v)$. Ainsi (u,v) est régulier ssi $\varphi(u,v) \neq 0 \bmod \pi$.
ii) On a

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\mathbf{t}_\alpha \wedge \mathbf{t}_\beta}{|\sin\varphi|} = \frac{\mathbf{t}_\alpha \wedge \mathbf{t}_\beta}{\sin\varphi}$$

puisque $\varphi(u,v) \in \,]0,\pi[$ en tout point.

2) i) Déterminer les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la seconde forme fondamentale de f en fonction des courbures principales k_α et k_β de α et de β et de l'angle entre N et $\mathbf{n}_\alpha$ et entre N et $\mathbf{n}_\beta$.

ii) Quel théorème est illustré ici ?

Rép.– i) On a $f_{uu} = k_\alpha \mathbf{n}_\alpha$, $f_{uv} = 0$ et $f_{vv} = k_\beta \mathbf{n}_\beta$. Ainsi

$$\mathcal{L} = \langle f_{uu}, N \rangle = k_\alpha \langle N, \mathbf{n}_\alpha \rangle, \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{N} = \langle f_{vv}, N \rangle = k_\beta \langle N, \mathbf{n}_\beta \rangle.$$

ii) Il s'agit du théorème de Meusnier.

3) Soient θ_α et θ_β tels que $\langle N, \mathbf{n}_\alpha\rangle = \cos\theta_\alpha$ et $\langle N, \mathbf{n}_\beta\rangle = \cos\theta_\beta$.

i) Déterminer la matrice A de l'opérateur de Weingarten W de f dans la base (f_u, f_v).

ii) En déduire les expressions de la courbure de Gauss K et de la courbure moyenne H de f en fonction de θ_α, θ_β, k_α, k_β et φ.

Rép.– i) On a

$$\begin{aligned} A &= Mat_{(f_u,f_v)}W \\ &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G\mathcal{L}-F\mathcal{M} & G\mathcal{M}-F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M}-F\mathcal{L} & E\mathcal{N}-F\mathcal{M} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-\cos^2\varphi}\begin{pmatrix} \mathcal{L} & -\cos\varphi\mathcal{N} \\ -\cos\varphi\mathcal{L} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin^2\varphi}\begin{pmatrix} k_\alpha\cos\theta_\alpha & -k_\beta\cos\theta_\beta\cos\varphi \\ -k_\alpha\cos\theta_\alpha\cos\varphi & k_\beta\cos\theta_\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ii) On en déduit

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N}}{\sin^4\varphi} = \frac{k_\alpha k_\beta\cos\theta_\alpha\cos\theta_\beta}{\sin^2\varphi}$$

et

$$H = \frac{k_\alpha\cos\theta_\alpha + k_\beta\cos\theta_\beta}{2\sin^2\varphi}.$$

4) Montrer que si la courbure de Gauss K de f est nulle alors α ou β est une courbe asymptotique de f.

Rép.– L'égalité $K = 0$ implique que $\mathcal{L} = 0$ ou $\mathcal{N} = 0$ i. e. α ou β sont des courbes asymptotiques de f.

5) Pour cette question seulement on suppose que la courbure principale de α est identiquement nulle : $k_\alpha \equiv 0$. Montrer que f est une surface réglée.

Rép.– Par définition de la courbure principale, on a

$$\mathbf{t}'_\alpha(u) = k_\alpha(u)\mathbf{n}_\alpha(u) = 0.$$

Ainsi $\mathbf{t}'_\alpha(u) = \alpha''(u) = 0$ d'où $\alpha'(u) = \alpha_0$ où $\alpha_0 \in \mathbb{R}^3$. Puis $\alpha(u) = u\alpha_0 + \alpha_1$ avec $\alpha_1 \in \mathbb{R}^3$. Finalement

$$f(u,v) = u\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta(v))$$

ce qui est l'expression d'une surface réglée, les règles étant les supports de $u \longmapsto f(u,v)$.

On suppose désormais que α est une courbe birégulière i. e. que l'application k_α ne s'annule jamais.

6) Soit $v_0 \in [c,d]$. On suppose que $u \longmapsto f(u,v_0)$ est une courbe asymptotique de f.

i) Montrer que $u \longmapsto f(u,v_0)$ est une ligne de courbure.

ii) Montrer que la normale à la surface N ne dépend pas de u. *Suggestion.–* On pourra considérer le trièdre de Darboux $(\mathbf{t}_\alpha, N, V_\alpha)$ avec $V_\alpha = N \wedge \mathbf{t}_\alpha$.

iii) Déterminer les courbures principales. Que vaut K ?

Rép.– i) Puisque $u \longmapsto f(u,v_0)$ est une courbe asymptotique alors $\mathcal{L}(u,v_0) = 0$ pour tout $u \in [a,b]$. La matrice A de l'opérateur de Weingarten a la forme suivante

$$A = \frac{1}{\sin^2\varphi}\begin{pmatrix} 0 & -k_\beta \cos\theta_\beta \cos\varphi \\ 0 & k_\beta \cos\theta_\beta \end{pmatrix}$$

ce qui montre que la direction portée par $\mathbf{t}_\alpha$ est principale et que la courbure principale associée vaut 0.
ii) Une des trois équations de Darboux s'écrit

$$N_u(u,v) = -k_{\mathbf{t}_\alpha}\mathbf{t}_\alpha + \tau_g V_\alpha.$$

Puisque $u \longmapsto f(u,v_0)$ est une courbe asymptotique $k_{\mathbf{t}_\alpha} \equiv 0$ et puisque que c'est une ligne de courbure $\tau_g \equiv 0$. Par conséquent $N_u \equiv 0$.
iii) D'après i), une courbure principale vaut 0. La considération de la trace de W livre l'autre courbure principale : $k_\beta \cos\theta_\beta$ (qui peut éventuellement être nulle). Quoi qu'il en soit, la courbure de Gauss K est nulle.

7) On suppose toujours que $u \longmapsto f(u,v_0)$ est une courbe asymptotique de f.

i) Déduire de la question 2 que pour tout $u \in [a,b]$ on a

$$\mathbf{t}_\beta(v_0) = \cos\varphi(u,v_0)\mathbf{t}_\alpha(u) \pm \sin\varphi(u,v_0)\mathbf{n}_\alpha(u).$$

ii) Déterminer $\mathcal{L}$ en fonction de k_α, φ, $\mathbf{b}_\alpha$ et $\mathbf{t}_\beta$.

iii) En déduire que la torsion τ_α de α est identiquement nulle et donc que la courbe α est plane.

Rép.– i) Puisque $u \longmapsto f(u,v_0)$ est une courbe asymptotique alors $\mathcal{L}(u,v_0) = 0$ pour tout $u \in [a,b]$. Or $\mathcal{L} = k_\alpha\langle N, \mathbf{n}_\alpha\rangle$ et $k_\alpha(u) \neq 0$ car α est birégulière. Par conséquent $(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha)$ est

une base orthonormée de $N^{\perp}$. Puisque $\langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta\rangle = \cos\varphi$, on en déduit la formule demandée.
ii) On a

$$\mathcal{L} = \frac{k_\alpha}{\sin\varphi}\langle \mathbf{t}_\alpha \wedge \mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\alpha\rangle = \frac{k_\alpha}{\sin\varphi}\langle \mathbf{n}_\alpha \wedge \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta\rangle = -\frac{k_\alpha}{\sin\varphi}\langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta\rangle.$$

iii) Puisque $u \longmapsto f(u, v_0)$ est une courbe asymptotique alors $\mathcal{L}(u, v_0) = 0$ pour tout $u \in [a, b]$. Et puisque α est birégulière, on a nécessairement $\langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta\rangle = 0$ pour tout $u \in [a, b]$. En dérivant par rapport à u, il vient

$$0 = \langle \mathbf{b}'_\alpha(u), \mathbf{t}_\beta(v_0)\rangle = \langle -\tau_\alpha(u)\mathbf{n}_\alpha(u), \mathbf{t}_\beta(v_0)\rangle$$

d'après les formules de Frenet. Puis, en utilisant le résultat de la question i)

$$0 = \pm\tau_\alpha(u)\sin\varphi(u, v_0)$$

et puisque $\sin\varphi(u, v_0) \neq 0$ c'est que $\tau_\alpha \equiv 0$.

8) Dans cette question, on suppose que $u \longmapsto f(u, v_0)$ est une ligne de courbure de f qui n'est pas une courbe asymptotique. Montrer qu'en tout point (u, v_0) la matrice de la première forme fondamentale est l'identité.

Rép.– Rappelons que Si $u \longmapsto f(u, v_0)$ est une ligne de courbure de f alors la considération de la matrice A de l'opérateur de Weingarten

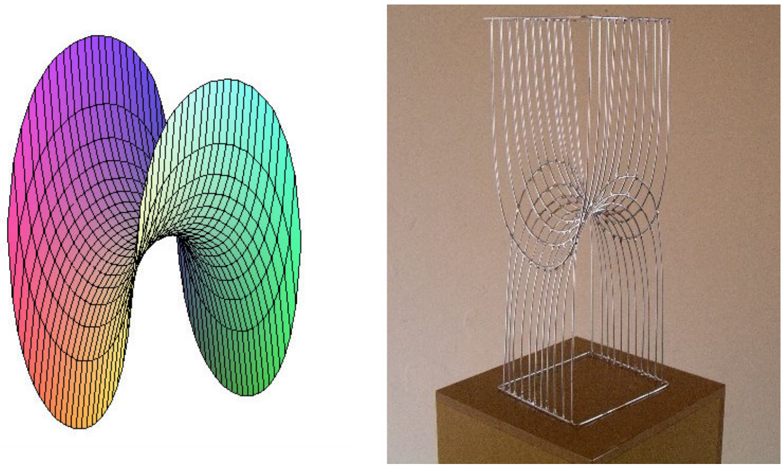
$$A = \frac{1}{\sin^2\varphi}\begin{pmatrix} \mathcal{L} & -\cos\varphi\mathcal{N} \\ -\cos\varphi\mathcal{L} & \mathcal{N}\end{pmatrix}.$$

Si $u \longmapsto f(u, v_0)$ est une ligne de courbure de f alors $-\cos\varphi\mathcal{L} = 0$ et puisque cette courbe n'est pas asymptotique $\mathcal{L} \neq 0$. Par conséquent $\cos\varphi(u, v_0) = 0$ ce qui implique $F(u, v_0) = 0$. Et on avait déjà $E \equiv 1$ et $G \equiv 1$...

9) On considère la *première surface de Scherk* :

$$\begin{array}{rccc} f : &]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (u, v, \ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right)). \end{array}$$

i) Montrer que f est une surface de translation.
ii) Déterminer les coefficients E, F et G de la première forme fondamentale de f. En déduire que f est régulière.
iii) Déterminer les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la seconde forme fondamentale de f.
iv) Montrer que f est une surface minimale, i e. $H \equiv 0$.



La première surface de Scherk

Rép.– i) On a $f(u,v)=(u,v,\ln\cos u-\ln\cos v)$ et donc $f(u,v)=\alpha(u)+\beta(v)$ avec $\alpha(u)=(u,0,\ln\cos u)$ et $\beta(v)=(0,v,-\ln\cos v)$.
ii) On a $f_u(u,v)=(1,0,-\tan u)$, $\quad f_v(u,v)=(0,1,\tan v)$ d'où

$$E=1+\tan^2 u,\quad F=-\tan u\tan v,\quad G=1+\tan^2 v.$$

En particulier

$$\begin{array}{rcl} EG-F^2 &=& (1+\tan^2 u)(1+\tan^2 v)-\tan^2 u\tan^2 v\\ &=& 1+\tan^2 u+\tan^2 v\\ &\geq& 1. \end{array}$$

Par conséquent f est régulière en tout point.
iii) On a

$$N=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u+\tan^2 v}}\begin{pmatrix}\tan u\\ -\tan v\\ 1\end{pmatrix}$$

et

$$f_{uu}(u,v)=(0,0,-1-\tan^2 u),\quad f_{uv}(u,v)=(0,0,0),\quad f_{vv}(u,v)=(0,0,1+\tan^2 v)$$

d'où

$$\mathcal{L}=\langle f_{uu},N\rangle=-\frac{1+\tan^2 u}{\sqrt{1+\tan^2 u+\tan^2 v}}$$

$$\mathcal{M}=\langle f_{uv},N\rangle=0$$

$$\mathcal{N}=\langle f_{vv},N\rangle=\frac{1+\tan^2 v}{\sqrt{1+\tan^2 u+\tan^2 v}}.$$

iv) Puisque $\mathcal{M}=0$, on a

$$A \quad = \quad \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G\mathcal{L} & -F\mathcal{N}\\ -F\mathcal{L} & E\mathcal{N}\end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit

$$H = \frac{1}{2(EG - F^2)}(G\mathcal{L} + E\mathcal{N})$$

or

$$G\mathcal{L} + E\mathcal{N} = -\frac{(1+\tan^2 v)(1+\tan^2 u)}{\sqrt{1+\tan^2 u+\tan^2 v}} + \frac{(1+\tan^2 u)(1+\tan^2 v)}{\sqrt{1+\tan^2 u+\tan^2 v}} = 0.$$