Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé du contrôle partiel du 24 novembre 2011

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Il n'existe pas de courbe polaire $\theta \longmapsto r(\theta)$ (régulière ou non) dont le support soit le carré $[0,1] \times \{0\} \cup [0,1] \times \{1\} \cup \{0\} \times [0,1] \cup \{1\} \times [0,1]$.

Rép.– Vrai, le support de la courbe polaire ne peut contenir ni $[0,1] \times \{0\}$ ni $\{0\} \times [0,1]$.

2.– La courbe polaire $r(\theta) = \dfrac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$ où $\theta \in \,]0,\pi[$ a pour support une parabole.

Rép.– Vrai, faire le changement de variable $t = \cot\theta$ pour s'en convaincre.

3.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière admettant une droite bitangente D (i.e. il existe deux points distincts $p, q \in \Gamma = \gamma(I)$ tels que D soit tangente en p et en q). On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par $h(x,y,z) = (100x, 10y+10, z+100)$. Alors la courbe $h \circ \gamma$ admet une droite bitangente.

Rép.– Vrai, car h est une application affine, en particulier elle envoie droite sur droite.

4.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière. On note $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ la projection orthogonale sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que la courbe $\pi \circ \gamma$ est régulière et admet une droite bitangente. Alors γ admet une droite bitangente.

Rép.– Faux, la préimage de la droite bitangente de $\pi \circ \gamma$ peut être une union de deux tangentes distinctes de γ.

5.– L'aire de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x^2\}$ vaut $\frac{2}{3}$.

Rép.– Vrai, appliquer la formule de Green-Riemann pour le vérifier.

6.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane birégulière fermée. Si $Ind(\gamma) = 2$ alors le support Γ de γ sépare $\mathbb{R}^2$ en trois composantes connexes au moins.

Rép.– Faux, considérer $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$.

7.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \overset{C^1}{\longrightarrow} \mathbb{C}^*$ régulière et fermée et soit $h : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ donnée par $h(z) = z^2$. Alors le nombre de tours de $h \circ \gamma$ par rapport à l'origine O vaut $N(\gamma, O) + 2$.

Rép.– Faux, il vaut $2N(\gamma, O)$ ce qui se vérifie facilement en passant en polaire : la courbe $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ devient $\gamma^2(t) = r^2(t)e^{2i\theta(t)}$. Le nombre de tours est donc doublé.

8.– Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe une courbe fermée birégulière γ_n telle que $Ind(\gamma_n) = n$.

Rép.– Faux. Le cas $n = 0$ pose problème. En effet, si γ est birégulière alors k_{alg} ne change pas de signe. Par conséquent

$$Ind(\gamma) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_{alg}(t) \|\gamma'(t)\| dt$$

ne peut valoir zéro.

9.– Soient γ_1 et γ_2 deux courbes régulières fermées. Si $\gamma_1 + \gamma_2$ est régulière alors $Ind(\gamma_1 + \gamma_2) = Ind(\gamma_1) + Ind(\gamma_2)$.

Rép.– Faux, si $\gamma_2 = \gamma_1$ alors $\gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma_1$ et par conséquent $Ind(\gamma_1 + \gamma_2) = Ind(\gamma_1)$.

10.– Il n'existe pas de courbe birégulière fermée dans $\mathbb{R}^3$ qui soit à courbure et à torsion (non nulle) constantes.

Rép.– Vrai. Les hélices sont certes à courbure constante (non nulle) et à torsion (non nulle) constante mais elles ne sont pas fermées. Or, d'après le théorème fondamental des courbes gauches, ce sont les seules courbes birégulières à courbure et à torsion constantes.

Problème. – Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la *néphroïde* :

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & a\begin{pmatrix} 3\cos t - \cos 3t \\ 3\sin t - \sin 3t \end{pmatrix} \end{array}$$

où $a > 0$.

1) Déterminer les points réguliers de γ.

Rép.– On a

$$\gamma'(t) = 3a\begin{pmatrix} -\sin t + \sin 3t \\ \cos t - \cos 3t \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= 9a^2(\sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2 3t + \cos^2 3t - 2\sin t \sin 3t - 2\cos t \cos 3t) \\ &= 9a^2(2 - 2\cos 2t) \\ &= 36a^2 \sin^2 t. \end{aligned}$$

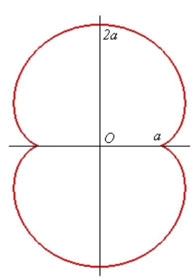
Par conséquent, la courbe est régulière en tout point sauf en $t = 0$ et $t = \pi$.

2) Montrer que le support Γ de γ est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et par rapport à l'axe (Oy). Tracer sommairement Γ.

Rép.– Posons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. On a

$$\gamma(-t) = (x(t), -y(t)) \quad \text{et} \quad \gamma(\pi - t) = (-x(t), y(t))$$

ce qui montre que Γ est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et par rapport à l'axe (Oy).



Le support de γ

3) Déterminer la longueur et l'aire enclose par γ

Rép.– En utilisant les symétries de γ on a

$$Long(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'(t)\|dt.$$

Ainsi

$$Long(\gamma) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6a|\sin t|dt = 24a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t = 24a.$$

D'autre part γ est une courbe fermée simple, on note D la composante bornée du complémentaire de Γ, l'application de la formule de Green-Riemann donne :

$$\begin{aligned} Aire(D) &= \int_{\partial D^+} x(t)y'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3a^2(3\cos t - \cos 3t)(\cos t - \cos 3t)dt \\ &= 3a^2\int_0^{2\pi} (3\cos^2 t + \cos^2 3t)dt \end{aligned}$$

car $\cos t$ et $\cos 3t$ sont orthogonales. Finalement

$$Aire(D) = 3a^2\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = 12\pi a^2.$$

4) Montrer que, en les points réguliers, la courbure principale k de γ est, à un cœfficient près, inversement proportionnel à la vitesse $\|\gamma'\|$ de γ.

Rép.– On a

$$\begin{aligned} x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) &= 9a^2\{(-\sin t + \sin 3t)(-\sin t + 3\sin 3t) - (\cos t - \cos 3t)(-\cos t + 3\cos 3t)\} \\ &= 9a^2\{4 - 4\cos 2t\} \\ &= 72a^2\sin^2 t \\ &= 2\|\gamma'(t)\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{2}{\|\gamma'(t)\|}.$$

5) En tout point régulier t de γ, on pose $N(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(-y'(t), x'(t))$. Déterminer, en les points réguliers, la développée $\beta := \gamma + \frac{1}{k}N$ de γ. Comparer $\gamma\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ avec $\beta(t)$. En déduire que l'on passe du support de γ à celui de β au moyen d'une similitude directe dont on précisera l'angle et le rapport.

Rép.– En tout point $t \neq 0$ et $t \neq \pi$, on a $\beta(t) = (u(t), v(t))$ avec

$$u(t) := x(t) - \frac{1}{k(t)}\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}y'(t), \qquad v(t) := y(t) + \frac{1}{k(t)}\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}x'(t)$$

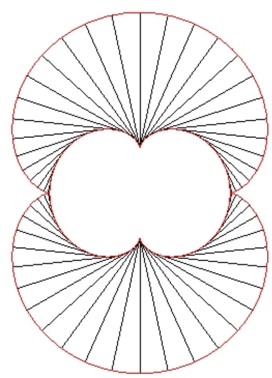
Ainsi

$$\begin{array}{rcl} u(t) & = & x(t) - \frac{1}{2}y'(t) \\ & = & a(3\cos t - \cos 3t) - \frac{3}{2}a(\cos t - \cos 3t) \\ & = & \dfrac{a}{2}(3\cos t + \cos 3t) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} v(t) & = & y(t) + \frac{1}{2}x'(t) \\ & = & a(3\sin t - \sin 3t) + \frac{3}{2}a(-\sin t + \sin 3t) \\ & = & \dfrac{a}{2}(3\sin t + \sin 3t). \end{array}$$

On vérifie sans peine que $x(t+\frac{\pi}{2}) = -2Y(t)$ et $y(t+\frac{\pi}{2}) = 2X(t)$. Par conséquent, en tout point régulier, $\beta(t) = (f \circ \gamma)(t + \frac{\pi}{2})$ où f est la similitude d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.



La développée d'une néphroïde est une néphroïde

6) Soient C le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $p \in C$. On note $\Delta_p := p + p\mathbb{R}$ la droite normale à C passant par p. On note également D_p l'image de la droite horizontale passant par le point p par la réflexion d'axe Δ_p. Montrer que la courbe enveloppe de la famille de droites $(D_p)_{p\in C}$ est une néphroïde.

Rép.– Convenons de noter D_t la droite D_p avec $p = (\cos t, \sin t)$ et posons $\overrightarrow{u} = (\cos t, \sin t)$ et $\overrightarrow{v} = (-\sin t, \cos t)$. Le vecteur $e_1 = (1, 0)$ se décompose dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en

$$e_1 = \cos t\ \overrightarrow{u} - \sin t\ \overrightarrow{v}.$$

La réflexion vectorielle r d'axe $p\mathbb{R}$ transforme donc e_1 en

$$\begin{array}{rcl} r(e_1) & = & \cos t\ \overrightarrow{u} + \sin t\ \overrightarrow{v} \\ & = & (\cos 2t, \sin 2t) \end{array}$$

Une équation cartésienne de D_t est donc donnée par

$$-\sin 2t(X - \cos t) + \cos 2t(Y - \sin t) = 0.$$

soit encore

$$-\sin 2t\ X + \cos 2t\ Y + \sin t = 0.$$

Posons $a(t) := -\sin 2t$, $b(t) := \cos 2t$, $c(t) := \sin t$ et $\delta(t) := a(t)b'(t) - a'(t)b(t)$. On a

$$\delta = (-\sin 2t)(-2\sin 2t) - (-2\cos 2t)\cos 2t = 2 \neq 0.$$

D'après le cours, la courbe enveloppe est le support de la courbe paramétrique donnée par les formules

$$x(t) = \frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} b(t) & c(t) \\ b'(t) & c'(t) \end{vmatrix}, \quad y(t) = -\frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} a(t) & c(t) \\ a'(t) & c'(t) \end{vmatrix}.$$

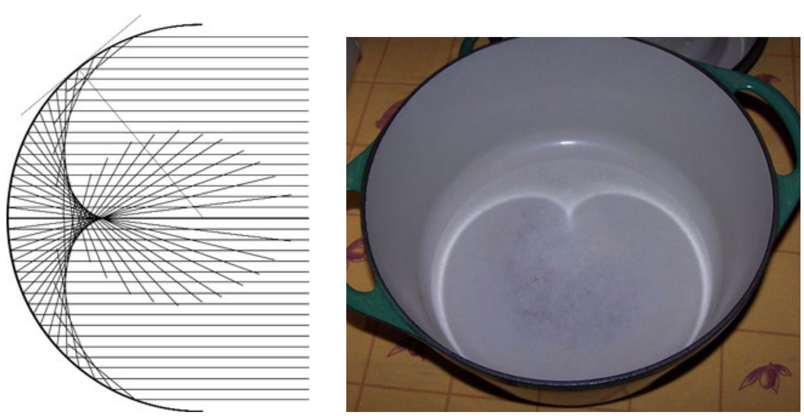
Or

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b(t) & c(t) \\ b'(t) & c'(t) \end{vmatrix} &= \cos 2t \cos t - (-2\sin 2t)\sin t \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos t + \cos 3t) + (\cos t - \cos 3t) \\ &= \tfrac{1}{2}(3\cos t - \cos 3t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a(t) & c(t) \\ a'(t) & c'(t) \end{vmatrix} &= (-\sin 2t)\cos t - (-2\cos 2t)\sin t \\ &= -\tfrac{1}{2}(\sin t + \sin 3t) + (-\sin t + \sin 3t) \\ &= -\tfrac{1}{2}(3\sin t - \sin 3t). \end{aligned}$$

Ainsi la courbe enveloppe est une néphroïde.



La néphroïde est une caustique

7) On identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$. On considère deux points

$$M_1(t) = e^{i\omega_1 t} \quad \text{et} \quad M_2(t) = e^{i\omega_2 t}$$

parcourant le cercle C avec des vitesses angulaires ω_1 et ω_2. On suppose que $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ et on note $G(t)$ le barycentre du système $\{(M_1(t), \omega_2), (M_2(t), \omega_1)\}$. Montrer que $G'(t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{M_1(t)M_2(t)}$.

Rép.– Par définition

$$(\omega_1 + \omega_2)\overrightarrow{OG(t)} = \omega_2 \overrightarrow{OM_1(t)} + \omega_1 \overrightarrow{OM_2(t)}$$

et donc

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} i \left(e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t}\right) \\ &= 2i \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} e^{i \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t}. \end{aligned}$$

On a également

$$\overrightarrow{M_1(t)M_2(t)} = e^{i\omega_2 t} - e^{i\omega_1 t} = 2i \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) e^{i \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t}.$$

Ainsi $G'(t)$ et $\overrightarrow{M_1(t)M_2(t)}$ sont colinéaires.

8) On choisit $\omega_2 = 3$ et $\omega_1 = 1$. Déduire de la question précédente que l'enveloppe des droites $(M_1(t)M_2(t))_{t \in [0, 2\pi]}$ est une néphroïde.

Rép.– Le point $G(t)$ est évidemment sur la droite $(M_1(t)M_2(t))$ et puisque $G'(t)$ et $\overrightarrow{M_1(t)M_2(t)}$ sont colinéaires, c'est que $t \longmapsto G(t)$ est une courbe paramétrée dont le support est l'enveloppe des droites $(M_1(t)M_2(t))$. Si on note $m = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, on a

$$G(t) = \frac{m}{m+1} e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{m+1} e^{im\omega_1 t}.$$

Le choix $\omega_1 = 1$ et $m = 3$ conduit à

$$G(t) = \frac{1}{4}\left(3e^{it} + e^{i3t}\right).$$

Le changement de variable $u = t - \frac{\pi}{2}$ donne

$$G(u + \frac{\pi}{2}) = \frac{i}{4}\left(3e^{iu} - e^{i3u}\right)$$

et l'on reconnaît une néphroïde.

Note.– On rappelle quelques formules trigonométriques :

$$\begin{aligned}\sin A \sin B &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))\\ \cos A \cos B &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))\\ \sin A \cos B &= \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B)).\end{aligned}$$