Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé du contrôle partiel du 26 novembre 2012

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et $\delta = \pi \circ \gamma$ où $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est la projection $(x, y, z) \longmapsto (x, y)$. Si $t \in I$ est un point régulier de δ alors $k_\gamma(t) \leq k_\delta(t)$.

Rép.– Faux. Si $\gamma(t) = (0, t, t^2)$ alors $k_\gamma > 0$ mais $\delta(t) = (0, t)$ et donc $k_\delta \equiv 0$.

2.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et $\delta = \pi \circ \gamma$ comme ci-dessus. Si $t \in I$ est un point régulier de δ alors $k_\gamma(t) \geq k_\delta(t)$.

Rép.– Faux. Si γ est une paramétrisation régulière d'un cercle et que le support de γ est dans un plan oblique par rapport π alors l'image de δ est une ellipse dont la courbure aux sommets du grand axe est plus grande que k_γ.

3.– L'enveloppe de la famille de droites d'équation $x - \cos(t)y - \sin(t) = 0$, $t \in [0, 2\pi]$, est l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$.

Rép.– Vrai, le vérifier avec les formules du cours.

4.– Soit $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t(1 + \cos t))$ avec $t \in [0, 2\pi]$. L'aire enclose par γ vaut π.

Rép.– Vrai, appliquer la formule de Green-Riemann pour le vérifier.

5.– L'indice de $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$t \longmapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

vaut l'infini.

Rép.– Faux, pour parler d'indice la courbe doit être fermée ! Notez que γ' n'est pas surjective sur le cercle unité.

6.– Soient $\alpha > 0$ et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple d'indice $Ind(\gamma) = 1$. Si pour tout $t \in I$ on a $k_{alg}(t) \geq \alpha$ alors l'aire enclose par γ est plus petite ou égale à $\frac{\pi}{\alpha^2}$.

Rép.– Vrai. De

$$Ind(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_I k_{alg}(t)\|\gamma'(t)\|dt$$

on déduit

$$1 \geq \frac{\alpha}{2\pi}\int_I \|\gamma'(t)\|dt$$

et donc, si $L = Long(\gamma)$ on a $L \leq \frac{2\pi}{\alpha}$. Notons C_{int} la composante bornée du complémentaire du support de γ. L'inégalité isopérimétrique $L^2 \geq 4\pi Aire(C_{int})$ implique

$$Aire(C_{int}) \leq \frac{L^2}{4\pi} \leq \frac{\pi}{\alpha^2}.$$

7.– Soit α une 1-forme non nulle de $\mathbb{R}^2$. Si $d\alpha = 0$ alors pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ on a $d(f\alpha) = 0$.

Rép.– Faux, on a

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha = df \wedge \alpha$$

et donc

$$d(f\alpha)_{(x,y)}(X,Y) = df_{(x,y)}(X)\alpha_{(x,y)}(Y) - df_{(x,y)}(Y)\alpha_{(x,y)}(X)$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Puisque α est non nulle, il existe $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ et Y un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha_{(x_0,y_0)}(Y) = 1$. Soit $X \in \ker\ \alpha_{(x_0,y_0)}$ non nul, on a

$$d(f\alpha)_{(x_0,y_0)}(X,Y) = df_{(x_0,y_0)}(X).$$

Il suffit donc de choisir f telle que $df_{(x_0,y_0)}(X) \neq 0$ pour contredire l'égalité $d(f\alpha) = 0$. Par exemple $f(.) = \langle X, . \rangle$ convient.

8.– Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Si $A^*(dx \wedge dy) = dx \wedge dy$ alors $A \in SO(2)$.

Rép.– Faux. Considérer
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$
avec $\lambda \neq 0$ et $\neq \pm 1$.

9.– L'ensemble $\{\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \gamma \text{ est régulière}\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Rép.– Faux, l'application nulle n'est pas régulière.

10.– Soient $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (e^x, e^y)$ et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière. Alors $\varphi \circ \gamma$ est régulière.

Rép.– Vrai. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$d\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$$
et en particulier $\ker\ d\varphi_{(x,y)} = \{0\}$. Donc $\gamma'(t) \neq 0$ implique $(\varphi \circ \gamma)'(t) = d\varphi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \neq 0$.

Problème. – Soient $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $r > 0$ et :
$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & x(t) + iy(t) = re^{i\alpha\cos 2\pi t}. \end{array}$$

1) Déterminer les points réguliers de f. Quel est le support de f ?

Rép.– On a
$$f'(t) = -2i\pi r\alpha \sin(2\pi t) e^{i\alpha\cos 2\pi t}$$
d'où
$$\|f'(t)\|^2 = 2\pi r\alpha |\sin(2\pi t)|.$$
Par conséquent, si $\alpha = 0$, tous les points sont singuliers. Si $\alpha \neq 0$, la courbe est régulière en tout point sauf en $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ et $t = 1$. Le support de f est un arc de cercle de centre l'origine, de rayon r, contenant le point $(r, 0)$ et dont les extrémités sont les points $(r\cos\alpha, \pm r\sin\alpha)$.

2) Soit $\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe C^∞ fermée et paramétrée par la longueur d'arc. On note $T_0 = \gamma_0'$ et $N_0 = iT_0$. Puis, pour tout $(u, t) \in [0,1]^2$ on définit
$$h(u, t) := x(t)T_0(u) + y(t)N_0(u).$$

Soit n un entier pair non nul. Pour tout $t \in [0,1]$ on pose

$$\gamma(t) = \gamma_0(0) + \int_0^t h(u, nu)du.$$

a) Montrer que la courbe γ est paramétrée à vitesse constante.

b) Montrer que si, pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$, on a $\gamma_0'(t + \frac{1}{2}) = -\gamma_0'(t)$ alors γ est fermée, i.e. $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Rép.– a) Pour tout $t \in [0,1]$, on a $\gamma'(t) = h(t, nt)$ et donc $\|\gamma'(t)\| = r$.
b) Notons que $\gamma(1) = \gamma(0)$ si et seulement si

$$\int_0^1 h(u, nu)du = 0.$$

On va montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} h(u, nu)du = -\int_{\frac{1}{2}}^1 h(u, nu)du$. D'une part on a

$$h(u + \frac{1}{2}, n.(u + \frac{1}{2})) = h(u + \frac{1}{2}, nu)$$

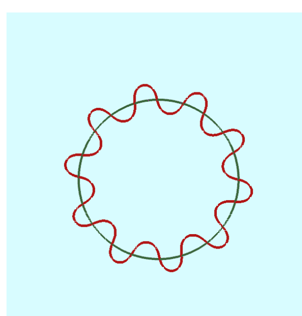
car n est pair et $t \mapsto x$, $t \mapsto y$ sont 1-périodiques. D'autre part

$$T_0(u + \frac{1}{2}) = -T_0(u) \quad \text{et} \quad N_0(u + \frac{1}{2}) = -N_0(u)$$

donc

$$h(u + \frac{1}{2}, n.(u + \frac{1}{2})) = -h(u, nu)$$

et par conséquent $\int_0^1 h(u, nu)du = 0$.



Un exemple de courbe γ avec $n = 10$ et Supp γ_0 = un cercle

On suppose désormais que γ_0 satisfait à la condition de la question 2. b.

3) On note $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ et $N(t) = iT(t)$. Montrer que

$$\forall t \in [0,1], \quad T(t) = e^{i\alpha\cos 2\pi nt}T_0(t) \quad \text{et} \quad N(t) = e^{i\alpha\cos 2\pi nt}N_0(t).$$

Rép.– Posons $\theta = \alpha\cos 2\pi nt$. On a

$$e^{i\theta}T_0(t) = (\cos\theta + i\sin\theta)T_0 = \cos\theta\ T_0 + \cos\theta\ N_0.$$

Or

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{r}h(t,nt) = (\cos\theta\ T_0(t) + \sin\theta\ N_0(t)) = \cos\theta\ T_0 + \cos\theta\ N_0.$$

D'où la première égalité. La deuxième égalité découle de la première puisque $N_0 = iT_0$ et $N = iT$.

4) On note k_{alg} la courbure algébrique de γ. Déduire des formules de Frenet que

$$\frac{dT}{dt}(t) = rk_{alg}(t)N(t) \quad \text{et} \quad \frac{dN}{dt}(t) = -rk_{alg}(t)T(t).$$

Rép.– La courbe γ est paramétrée à vitesse constante r donc $t \mapsto \delta(t) := \gamma\left(\frac{t}{r}\right)$ est paramétrée par la longueur d'arc. On a d'une part $\delta''(t) = \frac{1}{r^2}\gamma''\left(\frac{t}{r}\right)$ et d'autre part, en appliquant la formule de Frenet

$$\delta''(t) = k_{alg}\left(\frac{t}{r}\right)N\left(\frac{t}{r}\right).$$

Ainsi

$$\frac{1}{r^2}\gamma''(u) = k_{alg}(u)N(u)$$

en posant $u = \frac{t}{r}$. Puisque $\gamma'(u) = rT(u)$ on a $\gamma''(u) = rT'(u)$ et en fin de compte $T'(u) = rk_{alg}(u)N(u)$. Un raisonnement similaire conduit à $N'(u) = -rk_{alg}(u)T(u)$.

5) On note k^0_{alg} la courbure algébrique de γ_0. Montrer que

$$\forall t \in [0,1], \quad rk_{alg}(t) = -2\pi n\alpha\sin(2\pi nt) + k^0_{alg}(t).$$

Rép.– De

$$T(t) = e^{i\alpha\cos 2\pi nt}T_0(t)$$

on déduit

$$\begin{aligned}
T'(t) &= -2i\pi\alpha n\sin(2\pi nt)e^{i\alpha\cos 2\pi nt}T_0(t) + e^{i\alpha\cos 2\pi nt}T_0'(t)\\
&= -2i\pi\alpha n\sin(2\pi nt)e^{i\alpha\cos 2\pi nt}N_0(t) + e^{i\alpha\cos 2\pi nt}k^0_{alg}(t)N_0(t)\\
&= (-2i\pi\alpha n\sin(2\pi nt) + k^0_{alg}(t))N(t)
\end{aligned}$$

ainsi

$$rk_{alg}(t) = -2\pi n\alpha \sin 2\pi nt + k^0_{alg}(t).$$

6) Donner un exemple de choix de γ_0 et des paramètres α et r conduisant à une courbe paramétrée fermée γ dont la courbure algébrique a pour expression

$$k_{alg}(t) = 1 + \sin 2\pi nt$$

où n est un entier pair non nul.

Rép.– Soit

$$\gamma_0(t) = \frac{e^{2i\pi t}}{2\pi}.$$

Cette courbe est paramétrée par la longueur d'arc, elle est fermée et satisfait à la condition de la question 2. b. Sa courbure algébrique est constante et vaut $k^0_{alg} \equiv 2\pi$. La courbe γ est donc fermée et sa courbure algébrique vaut

$$k_{alg}(t) = -\frac{2\pi n\alpha \sin 2\pi nt}{r} + \frac{2\pi}{r}.$$

ce qui force le choix $r = 2\pi$ puis $\alpha = -\frac{1}{n}$,

7) Montrer que $Ind(\gamma) = Ind(\gamma_0)$.

Rép.– D'après la formule de l'indice on a

$$Ind(\gamma) = -\int_0^1 k_{alg}(u)\|\gamma'(u)\|du = -\int_0^1 rk_{alg}(u)du$$

d'où, d'après la question précédente,

$$Ind(\gamma) = -\int_0^1 \left(-2\pi n\alpha \sin 2\pi nu + k^0_{alg}(u)\right) du = -\int_0^1 k^0_{alg}(u)du = Ind(\gamma_0).$$

8) Montrer qu'il existe une application C^∞ :

$$\begin{array}{rccc} H: & [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (v,t) & \longmapsto & H(v,t) \end{array}$$

telle que $t \mapsto H(0,t)$ est la courbe γ_0, $t \mapsto H(1,t)$ est la courbe γ et pour tout $v \in]0,1[$, $t \mapsto H(v,t)$ est une courbe régulière fermée (qu'on notera γ_v).

Rép.– Pour tout $v \in [0,1]$, on définit

$$\begin{array}{rccl} f_v : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & x_v(t) + iy_v(t) = re^{iv\alpha\cos 2\pi t} \end{array}$$

puis

$$h_v(u,t) := x_v(t)T_0(u) + y_v(t)N_0(u).$$

Et on pose

$$H(v,t) := \gamma_0(0) + \int_0^t h_v(u,nu)du.$$

Il est évident que H est C^∞ sur $[0,1]^2$. Remarquons que $h_0(u,t) = T_0(u)$ car $x_0(t) \equiv 1$ et $y_0(t) \equiv 0$. Donc $H(0,.)$ est la courbe γ_0. Il est aussi évident que $H(1,.) = \gamma$. Notons désormais $\gamma_v := H(v,.)$. On a $\|\gamma_v'(t)\| = r$ donc γ_v est régulière. D'après la question 2.b, elle est également fermée.