Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie : Courbes et surfaces

Partiel du 19 novembre 2014 - durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ une courbe régulière de la sphère et $\pi : (x,y,z) \longmapsto (x,y)$ la projection orthogonale sur (Oxy). Alors la courbe $\pi \circ \gamma$ est régulière.

2.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ une courbe de la sphère et $\pi : (x,y,z) \longmapsto (x,y)$ la projection orthogonale sur (Oxy). Alors $Long(\pi \circ \gamma) \leq Long(\gamma)$.

3.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ un lacet birégulier de la sphère. Alors sa torsion τ ne s'annule jamais.

4.– Soit la courbe polaire $\rho(\theta) = \tan \frac{\theta}{2}$ avec $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. L'aire enclose par γ vaut π.

5.– Soient $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux courbes birégulières dont la torsion est identiquement nulle. Alors, partout où elle est définie, la torsion de $\gamma_1 + \gamma_2$ est nulle.

6.– Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Alors $A^*(dx \wedge dy) = dx \wedge dy$ si et seulement si $det\ A = 1$.

7.– Soient

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : & I & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \theta & \longmapsto & \rho_1(\theta)e^{i\theta} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \gamma_2 : & I & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \theta & \longmapsto & \rho_2(\theta)e^{i\theta} \end{array}$$

deux courbes polaires régulières. Alors le produit $\gamma_1.\gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est une courbe régulière.

8.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière fermée. Alors $Ind(-\gamma) = Ind(\gamma)$.

9.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple régulière. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $k_{alg}(t) \geq c$ et on note A l'aire enclose par γ. Alors on a : $A \leq \frac{\pi}{c^2}$.

10.– Soit une courbe polaire C^∞

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \theta & \longmapsto & \rho(\theta)e^{i\theta} \end{array}$$

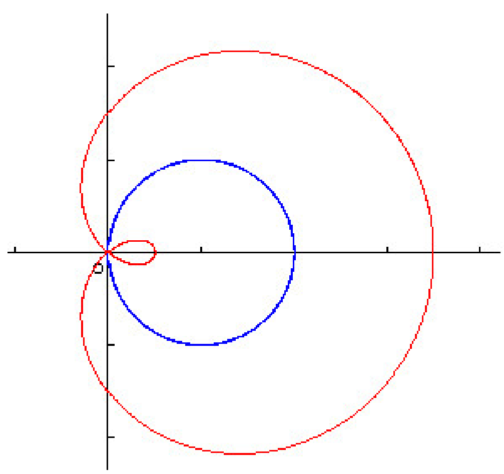
où $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est 2π-périodique. Alors

$$\left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta\right)^2 \geq 2\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta.$$

Problème. – Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞. Pour tout $a \neq 0$, on note

$$\begin{array}{rccc} \gamma_a : & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \theta & \longrightarrow & (\rho(\theta) + a)e^{i\theta}. \end{array}$$

Une telle courbe γ_a s'appelle une *conchoïde de pôle l'origine O et de module a*.



Une conchoïde de cercle. Le pôle est l'origine et le module vaut deux fois le rayon.

1) i) Montrer que γ_a est régulière si et seulement si $-a$ n'est pas une valeur critique pour ρ.

ii) On suppose que $\theta \in I$ est un point singulier de γ_a. Montrer que si $\rho''(\theta) \neq 0$ alors θ est un point de rebroussement de première espèce de γ_a.

2) Soit

$$\begin{array}{rccl} \Gamma : & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \theta & \longmapsto & \gamma_a(\theta) + i\gamma_a'(\theta). \end{array}$$

i) Montrer que la courbe Γ ne dépend pas de $a \in \mathbb{R}^*$.

ii) Soit θ un point régulier de γ_a, $a \neq 0$. On note $N_{a,\theta}$ la droite normale de γ_a en θ. Montrer que l'intersection $N_{a,\theta} \cap \Gamma(I)$ n'est jamais vide.

iii) Soit $\theta \in I$. On note $A_\theta = \{a \in \mathbb{R}^* \mid \gamma_a \text{ est régulière en } \theta\}$. Montrer que si A_θ n'est pas vide, il en est de même de l'intersection

$$\bigcap_{a \in A_\theta} N_{a,\theta}.$$

3) Soit $\theta \in I$ et $a \in A_\theta$.

i) Montrer que $N_{a,\theta}$ passe par l'origine si et seulement si $\gamma_a(\theta) = O$ ou $\Gamma(\theta) = O$.

ii) On suppose que $a \in A_\theta$ est telle que $-a \in A_\theta$ et que les droites $N_{a,\theta}$ et $N_{-a,\theta}$ ne passent pas par O. Montrer que les trois droites $N_{a,\theta}$, $N_{-a,\theta}$ et $(\gamma_{-a}(\theta)\gamma_a(\theta))$ dessinent un triangle non plat.

iii) Montrer que la hauteur issue de $N_{a,\theta} \cap N_{-a,\theta}$ passe par l'origine O.

4) Les *conchoïdes de Nicomède* sont les conchoïdes obtenues en choisissant

$$\begin{array}{rccl} \rho : &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & \theta & \longmapsto & \dfrac{1}{\cos\theta}. \end{array}$$

On note

$$\begin{array}{rccl} \gamma : &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \theta & \longrightarrow & \rho(\theta)e^{i\theta}. \end{array}.$$

i) Quelle est la nature de $\gamma(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$?

ii) Montrer qu'il existe une seule valeur de $a \in \mathbb{R}^*$ pour laquelle γ_a est singulière. Montrer que pour cette valeur la courbe γ_a n'admet qu'un seul point singulier.

iii) Montrer que ce point singulier est un point de rebroussement de première espèce.

5) i) Montrer que

$$\lim_{\theta \longrightarrow \pm\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma_a'(\theta)}{\|\gamma_a'(\theta)\|} = i$$

ii) On note $\varphi_a(\theta)$ l'angle entre $\gamma_a'(\theta) = x_a'(\theta) + iy_a'(\theta)$ et l'horizontale. On note également $k_a = \dfrac{x_a' y_a'' - x_a'' y_a'}{(x_a'^2 + y_a'^2)^{\frac{3}{2}}}$ la courbure algébrique de γ_a. Montrer que, en tout point régulier θ, on a

$$k_a(\theta)\|\gamma_a'(\theta)\| = \varphi_a'(\theta).$$

iii) Soit $a \neq -1$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\int_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} k_a(\theta)\|\gamma_a'(\theta)\| d\theta = k\pi.$$

6) Dans cette question, on suppose que $a < -1$.

i) Montrer que pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $2\rho'^2 - (\rho + a)\rho'' \geq 0$.

ii) En déduire que pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $k_a(\theta) > 0$.

iii) Montrer que $\gamma_a'(\theta)$ est verticale pour une unique valeur de $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

iv) En déduire que

$$\int_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} k_a(\theta)\|\gamma_a'(\theta)\| d\theta = 2\pi.$$

7) Soit $\theta_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Dans cette question on suppose que $a = \frac{2}{\cos\theta_0}$. Résoudre l'équation

$$y_a(\theta) = y(\theta_0)$$

où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est l'inconnue et où $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$ est la composante verticale de $\gamma(\theta)$.

Culture.– La résolution de cette équation est l'étape clef du raisonnement qui permet d'établir que les conchoïdes de Nicomède sont des *trisectrices*, i.e. elles permettent la trisection des angles.

8) Donner l'allure du support de γ_a avec $a = -2$.