Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé du contrôle partiel du 19 novembre 2014

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ une courbe régulière de la sphère et $\pi : (x,y,z) \longmapsto (x,y)$ la projection orthogonale sur (Oxy). Alors la courbe $\pi \circ \gamma$ est régulière.

Rép.– Faux. Considérer $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ donnée par $\gamma(\theta) = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$.

2.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ une courbe de la sphère et $\pi : (x,y,z) \longmapsto (x,y)$ la projection orthogonale sur (Oxy). Alors $Long(\pi \circ \gamma) \leq Long(\gamma)$.

Rép.– Vrai. On a

$$\|(\pi \circ \gamma)'\|^2 = x'^2 + y'^2 \leq x'^2 + y'^2 + z'^2 = \|\gamma'\|^2$$

d'où $Long(\pi \circ \gamma) \leq Long(\gamma)$.

3.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ un lacet birégulier de la sphère. Alors sa torsion τ ne s'annule jamais.

Rép.– Faux. Considérer $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ donnée par $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$.

4.– Soit la courbe polaire $\rho(\theta) = \tan\frac{\theta}{2}$ avec $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. L'aire enclose par γ vaut π.

Rép.– Faux. Soit D le domaine enclos par γ. D'après la formule de Green-Riemann, on a

$$Aire(D) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan^2\frac{\theta}{2} \, d\theta.$$

Notons que pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $0 \leq \tan^2 \frac{\theta}{2} \leq 1$. Donc $Aire(D) \leq \frac{\pi}{2}$ et on ne peut avoir $Aire(D) = \pi$.

Remarque.– Le calcul précis de $Aire(D)$ nécessite de déterminer une primitive de ρ^2. On a $\tan' \frac{\theta}{2} = \frac{1+\tan^2 \frac{\theta}{2}}{2}$ d'où l'on déduit $\frac{1}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2} = \tan' \frac{\theta}{2} - \left(\frac{\theta}{2}\right)'$ et $Aire(D) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

5.– Soient $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux courbes birégulières dont la torsion est identiquement nulle. Alors, partout où elle est définie, la torsion de $\gamma_1 + \gamma_2$ est nulle.

Rép.– Faux. Considérer $\gamma_1(t) = (2\cos t, \sin t, 0)$ et $\gamma_2(t) = (-\cos t, 0, t)$ avec $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors $\gamma_1 + \gamma_2$ est une hélice, sa torsion est constante et non nulle.

6.– Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Alors $A^*(dx \wedge dy) = dx \wedge dy$ si et seulement si $det\ A = 1$.

Rép.– Vrai. Soit
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$
On a
$$A^*(dx \wedge dy) = A^*dx \wedge A^*dy = (\alpha dx + \beta dy) \wedge (\gamma dx + \delta dy) = (\alpha\delta - \beta\gamma) dx \wedge dy.$$

7.– Soient
$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : & I & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \theta & \longmapsto & \rho_1(\theta)e^{i\theta} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \gamma_2 : & I & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \theta & \longmapsto & \rho_2(\theta)e^{i\theta} \end{array}$$
deux courbes polaires régulières. Alors le produit $\gamma_1.\gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est une courbe régulière.

Rép.– Vrai. Pour tout $\theta \in I$, on a
$$\gamma_1(\theta)\gamma_2(\theta) = \rho_1(\theta)\rho_2(\theta)e^{2i\theta}.$$
Or $\rho_1, \rho_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^*$ car $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{C}^*$, donc $\rho_1\rho_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^*$ et $\gamma_1\gamma_2$ est régulière.

8.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière fermée. Alors $Ind(-\gamma) = Ind(\gamma)$.

Rép.– Vrai. Notons $\beta = -\gamma$. On peut toujours supposer que γ est paramétrée par la longueur d'arc. D'une part, on a $n_{alg}(\beta) = Rot_{\pi/2}(\beta')$, donc $n_{alg}(\beta) = -n_{alg}(\gamma)$ puisque

$\beta' = -\gamma'$. D'autre part, $\beta'' = k_{alg}(\beta) n_{alg}(\beta)$, soit encore $-\gamma'' = k_{alg}(\beta)(-n_{alg}(\gamma))$. Donc $k_{alg}(\beta) = k_{alg}(\gamma)$. La formule

$$Ind(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_I k_{alg}(\gamma) \|\gamma'(t)\| dt$$

permet de conclure.

9.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple régulière. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $k_{alg}(t) \geq c$ et on note A l'aire enclose par γ. Alors on a : $A \leq \frac{\pi}{c^2}$.

Rép.– Vrai. Puisque γ est un lacet simple régulier et que k_{alg} est positif, le théorème des tangentes tournantes permet d'affirmer que

$$\int_I k_{alg}(t) \|\gamma'(t)\| dt = 2\pi.$$

Par conséquent

$$cL = c \int_I \|\gamma'(t)\| dt \leq 2\pi$$

où $L = Long(\gamma)$; soit encore $c^2 L^2 \leq 4\pi^2$. L'inégalité isopérimétrique assure que $4\pi A \leq L^2$ ainsi $4c^2 \pi A \leq 4\pi^2$ d'où finalement

$$A \leq \frac{\pi}{c^2}.$$

10.– Soit une courbe polaire C^∞

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \theta & \longmapsto & \rho(\theta) e^{i\theta} \end{array}$$

où $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est 2π-périodique. Alors

$$\left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\theta \right)^2 \geq 2\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta.$$

Rép.– Vrai. D'après les hypothèses, $\gamma_{|[0,2\pi]}$ est une courbe fermée simple. Soit D l'adhérence de la composante bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 2\pi])$. On note $L = Long(\partial D)$ et $A = Aire(D)$. On a $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\theta$ et, avec la formule de Green-Riemann,

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta.$$

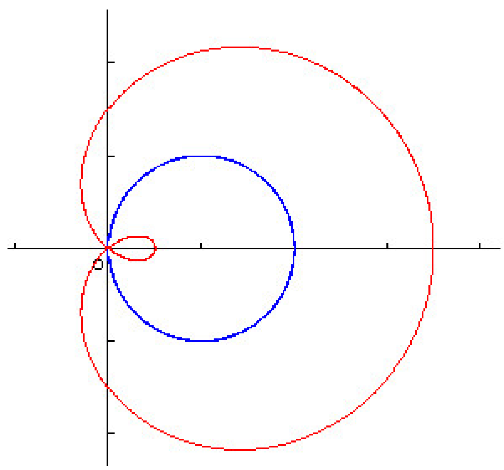
L'inégalité isopérimétrique $L^2 \geq 4\pi A$ s'écrit

$$\left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\theta \right)^2 \geq 2\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta.$$

Problème. – Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞. Pour tout $a \neq 0$, on note

$$\begin{array}{rccl} \gamma_a : & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \theta & \longrightarrow & (\rho(\theta)+a)e^{i\theta}. \end{array}$$

Une telle courbe γ_a s'appelle une *conchoïde de pôle l'origine O et de module a.*



Une conchoïde de cercle. Le pôle est l'origine et le module vaut deux fois le rayon.

1) i) Montrer que γ_a est régulière si et seulement si $-a$ n'est pas une valeur critique pour ρ.

ii) On suppose que $\theta \in I$ est un point singulier de γ_a. Montrer que si $\rho''(\theta) \neq 0$ alors θ est un point de rebroussement de première espèce de γ_a.

Rép.– i) Puisque $\|\gamma_a'\|^2 = (\rho+a)^2 + \rho'^2$, le point θ est singulier si et seulement si

$$\begin{cases} \rho(\theta) & = & -a \\ \rho'(\theta) & = & 0 \end{cases}$$

ce qui signifie précisément que $-a$ est une valeur critique de ρ.
ii) On a

$$\gamma_a'(\theta) = (\rho'(\theta) + i(\rho(\theta)+a))e^{i\theta}$$

puis

$$\begin{array}{rcl}\gamma_a''(\theta) & = & (\rho''(\theta)+i\rho'(\theta))e^{i\theta}+i(\rho'(\theta)+i(\rho(\theta)+a))e^{i\theta}\\ & = & (\rho''(\theta)-\rho(\theta)-a+2i\rho'(\theta))e^{i\theta}\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}\gamma_a'''(\theta) & = & (\rho'''(\theta)-\rho'(\theta)+2i\rho''(\theta))e^{i\theta}+i(\rho''(\theta)-\rho(\theta)-a+2i\rho'(\theta))e^{i\theta}\\ & = & (\rho'''(\theta)-3\rho'(\theta)+i(3\rho''(\theta)-\rho(\theta)-a))e^{i\theta}\end{array}$$

En un point singulier, $\rho(\theta)=-a$ et $\rho'(\theta)=0$. Ainsi

$$\gamma_a''(\theta)=\rho''(\theta)e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \gamma_a'''(\theta)=(\rho'''(\theta)+3i\rho''(\theta))e^{i\theta}.$$

Si $\rho''(\theta)\neq 0$, ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, ce qui montre que θ est un point de rebroussement de première espèce de γ_a.

2) Soit

$$\begin{array}{rccl}\Gamma: & I & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & \theta & \longmapsto & \gamma_a(\theta)+i\gamma_a'(\theta).\end{array}$$

i) Montrer que la courbe Γ ne dépend pas de $a\in\mathbb{R}^*$.

ii) Soit θ un point régulier de γ_a, $a\neq 0$. On note $N_{a,\theta}$ la droite normale de γ_a en θ. Montrer que l'intersection $N_{a,\theta}\cap\Gamma(I)$ n'est jamais vide.

iii) Soit $\theta\in I$. On note $A_\theta=\{a\in\mathbb{R}^* \mid \gamma_a \text{ est régulière en } \theta\}$. Montrer que si A_θ n'est pas vide, il en est de même de l'intersection

$$\bigcap_{a\in A_\theta} N_{a,\theta}.$$

Rép.– i) Pour tout $\theta\in I$, on a

$$\begin{array}{rcl}\Gamma(\theta) & = & \gamma_a(\theta)+i\gamma_a'(\theta)\\ & = & (\rho(\theta)+a)e^{i\theta}+i(\rho'(\theta)+i(\rho(\theta)+a))e^{i\theta}\\ & = & i\rho'(\theta)e^{i\theta}.\end{array}$$

Ainsi Γ est indépendant de a.
ii) Une paramétrisation ϕ de $N_{a,\theta}$ est donnée par

$$\begin{array}{rccl}\phi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & \lambda & \longmapsto & \gamma_a(\theta)+i\lambda\gamma_a'(\theta)\end{array}$$

Notons que $\phi(1)=\Gamma(\theta)$. Donc $\Gamma(\theta)\in N_{a,\theta}\cap\Gamma(I)$ ce qui montre que cette intersection est non vide.
iii) D'après la question précédente, le point $\Gamma(\theta)$ appartient à $N_{a,\theta}$ pour tout $a\in A_\theta$. Par conséquent $\Gamma(\theta)\in\bigcap_{a\in A_\theta}N_{a,\theta}$.

3) Soit $\theta \in I$ et $a \in A_\theta$.

i) Montrer que $N_{a,\theta}$ passe par l'origine si et seulement si $\gamma_a(\theta) = O$ ou $\Gamma(\theta) = O$.

ii) On suppose que $a \in A_\theta$ est telle que $-a \in A_\theta$ et que les droites $N_{a,\theta}$ et $N_{-a,\theta}$ ne passent pas par O. Montrer que les trois droites $N_{a,\theta}$, $N_{-a,\theta}$ et $(\gamma_{-a}(\theta)\gamma_a(\theta))$ dessinent un triangle non plat.

iii) Montrer que la hauteur issue de $N_{a,\theta} \cap N_{-a,\theta}$ passe par l'origine O.

Rép.– i) La droite normale $N_{a,\theta}$ passe par l'origine si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\gamma_a(\theta) + i\lambda\gamma_a'(\theta) = O$. Or

$$\begin{array}{rcl} \gamma_a(\theta) + i\lambda\gamma_a'(\theta) & = & (\rho + a)e^{i\theta} + i\lambda(\rho' + i(\rho + a))e^{i\theta} \\ & = & ((1-\lambda)(\rho + a) + i\lambda\rho')e^{i\theta} \end{array}$$

Donc $\gamma_a(\theta) + i\lambda\gamma_a'(\theta) = O$ si et seulement si

$$(1)\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 0 \\ \rho(\theta) & = & -a \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad (2)\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 1 \\ \rho'(\theta) & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad (3)\left\{\begin{array}{rcl} \rho(\theta) & = & -a \\ \rho'(\theta) & = & 0 \end{array}\right.$$

Le premier cas signifie $\gamma(\theta) = O$, le second, $\Gamma(\theta) = 0$ et le troisième cas, que le point θ est singulier. Ce dernier cas est impossible car $a \in A_\theta$.

ii) Notons que la droite $(\gamma_{-a}(\theta)\gamma_a(\theta))$ passe nécessairement par l'origine, précisément $O \in]\gamma_{-a}(\theta), \gamma_a(\theta)[$. Puisque $\gamma_a(\theta) \in N_{a,\theta}$ et $\gamma_{-a}(\theta) \in N_{-a,\theta}$ et que ces deux droites ne passent pas par l'origine, on a

$$(\gamma_{-a}(\theta)\gamma_a(\theta)) \cap N_{a,\theta} = \{\gamma_a(\theta)\} \text{ et } (\gamma_{-a}(\theta)\gamma_a(\theta)) \cap N_{-a,\theta} = \{\gamma_{-a}(\theta)\}$$

Donc $N_{a,\theta}$ et $N_{-a,\theta}$ sont soit parallèles, soit sécantes en un point. Or, d'après la question 2. iii, le point $\Gamma(\theta) \in N_{a,\theta} \cap N_{-a,\theta}$. Donc $N_{a,\theta}$ et $N_{-a,\theta}$ sont sécantes et les trois points $\gamma_a(\theta)$, $\gamma_{-a}(\theta)$ et $\Gamma(\theta)$ forment un triangle non plat.

iii) On a $N_{a,\theta} \cap N_{-a,\theta} = \Gamma(\theta) = i\rho'(\theta)e^{i\theta}$ et $\gamma_a(\theta) - \gamma_{-a}(\theta) = 2\rho e^{i\theta}$. Ainsi les droites $(O\Gamma(\theta))$ et $(\gamma_{-a}(\theta)\gamma_a(\theta))$ sont perpendiculaires.

4) Les *conchoïdes de Nicomède* sont les conchoïdes obtenues en choisissant

$$\begin{array}{rccc} \rho : &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & \theta & \longmapsto & \dfrac{1}{\cos\theta}. \end{array}$$

On note

$$\begin{array}{rccc} \gamma : &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \theta & \longrightarrow & \rho(\theta)e^{i\theta}. \end{array}.$$

i) Quelle est la nature de $\gamma(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$?

ii) Montrer qu'il existe une seule valeur de $a \in \mathbb{R}^*$ pour laquelle γ_a est singulière. Montrer que pour cette valeur la courbe γ_a n'admet qu'un seul point singulier.

iii) Montrer que ce point singulier est un point de rebroussement de première espèce.

Rép.– i) Le support $\rho(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$ est une droite verticale d'équation $x=1$ (cf. le premier chapitre du cours).
ii) D'après la question 1, γ_a est singulière ssi $\rho(\theta)=-a$ et $\rho'(\theta)=0$. Ici

$$\left\{\begin{array}{lll}\rho'(\theta) & = & \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \\ \dfrac{1}{\cos\theta} & = & -a\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll}\theta & = & 0 \\ 1 & = & -a\end{array}\right.$$

Ainsi $a=-1$ est la seule valeur pour laquelle γ_a est singulière. Le point singulier est $\theta=0$.
iii) On a

$$\rho''(\theta)=\frac{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}{\cos^3\theta}$$

d'où $\rho''(0)=1\neq 0$. D'après la question 1.ii, le point singulier est un point de rebroussement de première espèce.

5) i) Montrer que

$$\lim_{\theta\longrightarrow\pm\frac{\pi}{2}}\frac{\gamma_a'(\theta)}{\|\gamma_a'(\theta)\|}=i$$

ii) On note $\varphi_a(\theta)$ l'angle entre $\gamma_a'(\theta)=x_a'(\theta)+iy_a'(\theta)$ et l'horizontale. On note également $k_a=\dfrac{x_a'y_a''-x_a''y_a'}{(x_a'^2+y_a'^2)^{\frac{3}{2}}}$ la courbure algébrique de γ_a. Montrer que, en tout point régulier θ, on a

$$k_a(\theta)\|\gamma_a'(\theta)\|=\varphi_a'(\theta).$$

iii) Soit $a\neq -1$. Montrer qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que

$$\int_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}k_a(\theta)\|\gamma_a'(\theta)\|d\theta=k\pi.$$

Rép.– i) On a

$$\frac{\gamma_a'}{\|\gamma_a'\|}=\left(\frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2+(\rho+a)^2}}+i\frac{(\rho+a)}{\sqrt{\rho'^2+(\rho+a)^2}}\right)e^{i\theta}$$

On s'intéresse d'abord au terme $\frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2+(\rho+a)^2}}$. On suppose dans un premier temps que $\theta > 0$ ainsi $\rho'(\theta) > 0$. On a

$$\frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2+(\rho+a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho+a}{\rho'}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\cos\theta + a\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^2}}$$

Par conséquent

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2+(\rho+a)^2}} = 1.$$

Si $\theta < 0$ alors $\rho'(\theta) < 0$ et un calcul similaire montre que

$$\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2+(\rho+a)^2}} = -1.$$

Avec la même technique, on montre ensuite que

$$\lim_{\theta\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\rho+a}{\sqrt{\rho'^2+(\rho+a)^2}} = 0.$$

Puisque $\lim_{\theta\to\pm\frac{\pi}{2}} e^{i\theta} = \pm i$ on en déduit que

$$\lim_{\theta\longrightarrow\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma_a'(\theta)}{\|\gamma_a'(\theta)\|} = i.$$

ii) On remarque que

$$\gamma_a'(\theta) = \|\gamma_a'(\theta)\|\cos\varphi_a(\theta) + i\|\gamma_a'(\theta)\|\sin\varphi_a(\theta).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} k_a &= \frac{x_a'y_a'' - x_a''y_a'}{(x_a'^2+y_a'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\|\gamma_a'\|\cos\varphi_a(\|\gamma_a'\|'\sin\varphi_a + \varphi_a'\|\gamma_a'\|\cos\varphi_a) - \|\gamma_a'\|\sin\varphi_a(\|\gamma_a'\|'\cos\varphi_a - \varphi_a'\|\gamma_a'\|\sin\varphi_a)}{\|\gamma_a'\|^3} \\ &= \frac{\varphi_a'}{\|\gamma_a'\|}. \end{aligned}$$

iii) D'après la question précédente, on a

$$\lim_{X\to-\frac{\pi}{2}, Y\to\frac{\pi}{2}} \int_X^Y k_a(\theta)\|\gamma_a'(\theta)\|d\theta = \lim_{Y\to\frac{\pi}{2}} \varphi_a(Y) - \lim_{X\to-\frac{\pi}{2}} \varphi_a(X)$$

D'après la question i, il existe deux entiers relatifs k_+ et k_- tels que

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \varphi_a(\theta) = \frac{\pi}{2} + k_+\pi \text{ et } \lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}} \varphi_a(\theta) = \frac{\pi}{2} + k_-\pi$$

ainsi,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k_a(\theta)\|\gamma_a'(\theta)\|d\theta = k_+\pi - k_-\pi.$$

6) Dans cette question, on suppose que $a < -1$.

i) Montrer que pour tout $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $2\rho'^2 - (\rho + a)\rho'' \geq 0$.

ii) En déduire que pour tout $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $k_a(\theta) > 0$.

iii) Montrer que $\gamma_a'(\theta)$ est verticale pour une unique valeur de $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

iv) En déduire que

$$\int_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} k_a(\theta)\|\gamma_a'(\theta)\|d\theta = 2\pi.$$

Rép.– i) On a

$$\begin{aligned}
2\rho'^2 - (\rho + a)\rho'' &= 2\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta} - \left(\frac{1}{\cos\theta} + a\right)\frac{1 + \sin^2\theta}{\cos^3\theta} \\
&> 2\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{1 + \sin^2\theta}{\cos^3\theta} + \frac{1 + \sin^2\theta}{\cos^3\theta} \\
&> \frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta} - \frac{1}{\cos^4\theta} + \frac{1 + \sin^2\theta}{\cos^3\theta} \\
&> \frac{-\cos^2\theta}{\cos^4\theta} + \frac{1 + \sin^2\theta}{\cos^3\theta} \\
&> \frac{1 - \cos\theta + \sin^2\theta}{\cos^3\theta} \\
&> \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\theta}{\cos^3\theta} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

ii) On a

$$k_a = \frac{(\rho + a)^2 + 2\rho'^2 - (\rho + a)\rho''}{((\rho + a)^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} > \frac{(\rho + a)^2}{((\rho + a)^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \geq 0.$$

iii) Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned}
\gamma_a' &= (\rho'\cos\theta - (\rho + a)\sin\theta) + i(\rho'\sin\theta + (\rho + a)\cos\theta) \\
&= -a\sin\theta + i\left(\frac{1}{\cos^2\theta} + a\cos\theta\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\gamma_a'(\theta)$ est verticale si et seulement si $-a\sin\theta = 0$, c'est-à-dire : $\theta = 0$ (puisque $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

iv) Pour fixer les idées, on choisit φ_a telle que $\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}} \varphi_a(\theta) = \frac{\pi}{2}$. D'après la question ii, φ_a est strictement croissante. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ telle que $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \varphi_a(\theta) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ et on a

$$\varphi_a\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) =]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi[.$$

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple birégulière et paramétrée par la longueur d'arc. Alors la formule de l'indice de rotation implique que la longueur $Long(\gamma')$ de γ' est un multiple de 2π. Notons que γ_a' est verticale en les points $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ où φ_a prend les valeurs

$$\frac{\pi}{2} + \pi, ..., \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi.$$

Or, d'après la question iii, γ_a' est verticale en un seul point de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc, on doit avoir $k = 2$. Finalement, d'après la question 5. iii,

$$\int_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} k_a(\theta) \|\gamma_a'(\theta)\| d\theta = 2\pi.$$

7) Soit $\theta_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Dans cette question on suppose que $a = \frac{2}{\cos\theta_0}$. Résoudre l'équation

$$y_a(\theta) = y(\theta_0)$$

où $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est l'inconnue et où $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$ est la composante verticale de $\gamma(\theta)$.

Culture.– La résolution de cette équation est l'étape clef du raisonnement qui permet d'établir que les conchoïdes de Nicomède sont des *trisectrices*, i.e. elles permettent la trisection des angles.

Rép.– On a

$$\begin{aligned} y_a(\theta) - y(\theta_0) &= (\rho(\theta) + a)\sin\theta - \rho(\theta_0)\sin\theta_0 \\ &= (\frac{1}{\cos\theta} + \frac{2}{\cos\theta_0})\sin\theta - \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} \\ &= \frac{\sin\theta\cos\theta_0 + 2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta_0\cos\theta}{\cos\theta_0\cos\theta} \\ &= \frac{\sin(\theta-\theta_0) + \sin 2\theta}{\cos\theta_0\cos\theta} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} y_a(\theta) - y(\theta_0) = 0 &\iff \sin(\theta_0 - \theta) = \sin 2\theta \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} \theta_0 - \theta &=& 2\theta + 2k\pi \\ & \text{ou} & \\ \theta_0 - \theta &=& \pi - 2\theta + 2k\pi \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} \theta_0 &=& 3\theta + 2k\pi \\ & \text{ou} & \\ \theta_0 &=& \pi - \theta + 2k\pi \end{array} \right. \end{aligned}$$

Puisque $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, il ne reste qu'une solution : $\theta_0 = 3\theta$.

8) Donner l'allure du support de γ_a avec $a = -2$.

Rép.–