Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie : Courbes et surfaces

Contrôle partiel du 16 novembre 2016 - Durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe birégulière C^∞ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme C^∞ alors un vecteur directeur de la droite tangente de $\varphi \circ \gamma$ en t est $d\varphi_{\gamma(t)}(T(t))$ où $T = \gamma'$.

2.– Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe birégulière C^∞ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme C^∞ alors un vecteur directeur de la droite normale de $\varphi \circ \gamma$ en t est $d\varphi_{\gamma(t)}(N(t))$ où N est la normale principale de γ.

3.– Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe C^∞ ayant un point d'inflexion en $t = 0$ et si $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un difféomorphisme C^∞ alors la courbe $\varphi \circ \gamma$ a un point d'inflexion en $t = 0$.

4.– Si $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est une courbe régulière C^∞ et $\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est donnée par $z \mapsto z^2$ alors la courbe $\varphi \circ \gamma$ est régulière.

5.– Si $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ une courbe régulière fermée simple C^∞ et $\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est donnée par $z \mapsto z^2$ alors a courbe $\varphi \circ \gamma$ possède un point double.

6.– Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est birégulière C^∞ telle que $\gamma(0) = 0$ et si $\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est comme à la question précédente alors la courbe $\varphi \circ \gamma$ admet un point de rebroussement de première espèce en $t = 0$.

7.– Soient $w \in \mathbb{C}^*$, $\alpha = xdy - ydx$ et

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & x(t) + iy(t) \end{array}$$

une courbe fermée. On note γ_w la courbe paramétrée $t \longmapsto w.(x(t) + iy(t))$ avec $t \in \ [0, 2\pi]$. On a

$$\int_{\gamma_w} \alpha = |w|^2 \int_{\gamma} \alpha.$$

8.– Si $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ est telle que $F(0,0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$ alors il n'existe pas de courbe régulière $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$, telle que

$$\gamma(0) = (0,0) \text{ et } \forall t \in]-\epsilon, \epsilon[, \quad F(\gamma(t)) = 0.$$

9.– Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit $P_t(x) := x^3 - (2+t)x + 1$ et on pose

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid P_t(x) = 0\}$$

Il existe $\epsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow D$ régulière telle que $\gamma(0) = (0, 1)$.

10.– Soit $F(x, y) = x + y - x^4 - y^4$ et soit $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$, une courbe paramétrée régulière telle que

$$\gamma(0) = (0,0) \text{ et } \forall t \in]-\epsilon, \epsilon[, \quad F(\gamma(t)) = 0.$$

Alors la courbure de γ en $t = 0$ est nulle.

Problème. – Soient $a < 0 < b$ et $\gamma : \ [a, b] \ \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe C^∞ birégulière paramétrée par la longueur d'arc. On note k (resp. τ) sa courbure (resp. sa torsion). On suppose que $\gamma(0) = O$.

1) On se place dans le repère de Frenet $\mathcal{R} = (O; T_0, N_0, B_0)$. Montrer que l'on a

$$\gamma(s) = \left(s - \frac{k_0^2}{6}s^3\right) T_0 + \left(\frac{k_0}{2}s^2 + \frac{k_0'}{6}s^3\right) N_0 + \frac{k_0\tau_0}{6}s^3 B_0 + o(s^3)$$

où $T_0 = T(0)$, $N_0 = N(0)$, $B_0 = B(0)$, $k_0 = k(0)$, $k_0' = k'(0)$ et $\tau_0 = \tau(0)$.

2) Soit S une sphère de centre $\Omega = (x_1, y_1, z_1)$ (dans le repère $\mathcal{R}$) et de rayon $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.
i) Montrer que si est s suffisamment petit alors $\gamma(s) \neq \Omega$.
ii) On suppose s tel $\gamma(s) \neq \Omega$. On note $Q(s)$ l'intersection de de la demi droite $\Omega + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{\Omega\gamma(s)}$ avec S. Montrer que

$$\|\Omega\gamma(s)\|^2 - \|\Omega Q(s)\|^2 = -2x_1 s + (1 - k_0 y_1)s^2 + \frac{1}{3}(x_1 k_0^2 - y_1 k_0' - z_1 k_0 \tau_0)s^3 + o(s^3).$$

3) On appelle *sphère osculatrice* de γ en $s = 0$ une sphère S telle que $\gamma(0) \in S$ et $\|\Omega\gamma(s)\|^2 - \|\Omega Q(s)\|^2 = o(s^3)$.
i) Montrer que si $k_0 \neq 0$ et $\tau_0 \neq 0$ la sphère osculatrice existe et est unique.
ii) On suppose toujours $k_0 \neq 0$ et $\tau_0 \neq 0$. Dans quel(s) cas la sphère osculatrice de γ en $s = 0$ et le cercle osculateur de γ au même point ont-ils même centre ? Et même rayon ?

4) On suppose que γ est birégulière et qu'elle satisfait en outre $\tau(s) \neq 0$ pour tout $s \in [a, b]$. Soit

$$\begin{array}{rccl} \Omega : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & s & \longmapsto & \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}N(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)\tau(s)}B(s) \end{array}$$

la courbe des centres des sphères osculatrices. Montrer qu'en tout point s où Ω est régulière, la droite tangente à Ω en s passe par le centre du cercle osculateur.

On cherche désormais les courbes $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dont en chaque point la sphère osculatrice et le cercle osculateur ont même centre.

5) i) Montrer pour que toute courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ régulière non nécessairement paramétrée par la longueur d'arc, il existe deux applications $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ (i. e. pour tout $t \in [a,b]$, $\|f(t)\| = 1$) telles que

$$\forall t \in [a,b], \quad \gamma(t) = \gamma(a) + \int_a^t \alpha(u) f(u) du.$$

ii) Calculer la courbure de γ en fonction de f' et de α.
iii) Montrer que γ est birégulière si et seulement si f est régulière.

iv) Là où elle est définie, calculer la torsion de γ en fonction de α, de f' et du déterminant $det(f(t), f'(t), f''(t))$.

6) i) Montrer que toute courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ birégulière (mais non nécessairement paramétrée par la longueur d'arc) et à courbure constante $c > 0$ s'écrit sous la forme

$$\forall t \in [a,b], \quad \gamma(t) = \gamma(a) + \frac{1}{c}\int_a^t \|f'(u)\| f(u) du \qquad (*)$$

où $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ est régulière.
ii) A-t-on la réciproque ?

7) On se donne $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{S}^2(1)$ et on définit γ par la formule $(*)$ de la question précédente.
i) Reconnaître γ lorsque f est un paramétrage par la longueur d'arc de l'équateur de $\mathbb{S}^2(1)$
ii) Reconnaître γ lorsque f est un paramétrage à vitesse constante d'une latitude de $\mathbb{S}^2(1)$.
iii) Dans les deux cas précédents, déterminer et reconnaître le support de la courbe Ω des centres des sphères osculatrices.

8) On suppose maintenant que $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{S}^2(1)$ est une courbe C^∞ régulière et fermée et on définit comme précédemment γ par la formule $(*)$.
i) Sous quelle condition sur f la courbe γ est-elle fermée ?
ii) Donner un exemple explicite d'une courbe paramétrée régulière fermée f qui ne soit pas un cercle est telle que γ soit fermée à courbure constante non nulle.