CM 1 : Le h-principe : préquelle

Vincent Borrelli

15 octobre 2012

1 Immersions d'une variété dans un espace numérique

Définition. – Une application $f : M^m \stackrel{C^1}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$, $m \leq n$, est une *immersion* si lue sur les cartes, elle est de rang maximum i. e. $\forall x \in M^m, \quad rang\ df_x = m.$

On note $I(M, \mathbb{R}^n)$ l'espace des immersions de M dans $\mathbb{R}^n$. Il est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts des applications et de leurs différentielles. Soit (K_n) une famille dénombrable de compacts recouvrant M, la topologie de $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ est métrisable à partir de la famille des semi-métriques suivantes :

$$d_{K_n}(f,g) = \sup_{x \in K_n} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in K_n} |df_x - dg_x|$$

Bien sûr, si M est compacte, on peut réduire la famille (K_n) à un seul élément.

Définition.– Soient $f_0, f_1 : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux immersions, une *homotopie régulière* joignant f_0 à f_1 est une application C^1

$$\begin{array}{cccc} F: & M \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x,s) & \longmapsto & F_s(x) = F(x,s) \end{array}$$

telle que $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$ et chaque F_s est une immersion. La relation d'homotopie régulière est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence s'identifient aux composantes connexes par arcs de l'espace des immersions $I(M, \mathbb{R}^n)$.

2 Les immersions du cercle dans le plan

On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0,1]/\partial[0,1]$ d'une orientation. Si $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est une immersion de classe C^1 alors son application tangente fournit une application continue

$$\gamma' : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{R} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

dont on peut calculer le nombre de tours $N(\gamma')$. Rappelons que

$$N(\gamma') := \widetilde{t}(1) - \widetilde{t}(0) \in \mathbb{Z}$$

où $\widetilde{t} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est un relevé de

$$t := \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

On définit l'indice $Ind(\gamma)$ de γ comme étant le nombre de tours $N(\gamma')$. Puisque $Ind(\gamma)$ est clairement invariant par homotopie régulière, on a une application :

$$\begin{array}{rccc} Ind : & \pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & [\gamma] & \longmapsto & Ind(\gamma). \end{array}$$

Cette application est surjective comme le montre l'examen des exemples ci-dessous :

$Ind(\gamma) = -1$ $\quad$ $Ind(\gamma) = 0$ $\quad$ $Ind(\gamma) = 1$ $\quad$ $Ind(\gamma) = 2$ $\quad$ $Ind(\gamma) = 3$

Le point important est que cette application est en réalité une bijection.

Théorème de Whitney-Graustein (1937). – *On a : $\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) \simeq \mathbb{Z}$, l'identification étant donnée par l'indice.*

Démonstration du théorème de Whitney-Graustein. – Il suffit d'établir l'injectivité de I. Soient γ_0, γ_1 telle que $N(\gamma_0') = N(\gamma_1')$, il existe une homotopie

$$\sigma_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathcal{R}$$

telle que $\sigma_0 = \gamma_0'$ et $\sigma_1 = \gamma_1'$ (c'est dire que $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$). On peut en outre supposer que σ est lisse en tant qu'application de $[0,1] \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathcal{R}$. L'idée est d'intégrer cette homotopie pour obtenir une homotopie régulière joignant γ_0 à γ_1. Malheureusement

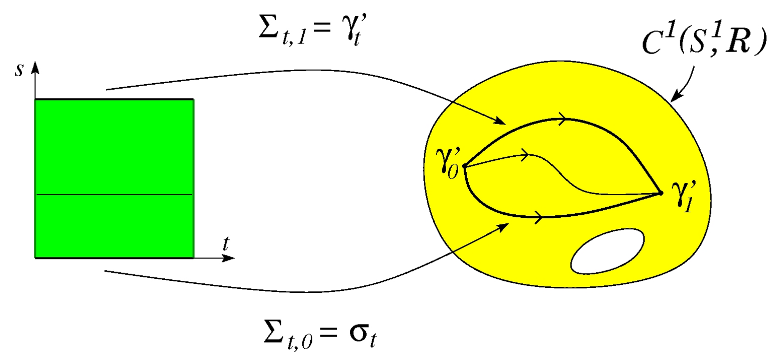
$$\begin{array}{rccc} \Gamma_t : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & \displaystyle\int_0^s \sigma_t(u)du \end{array}$$

n'est pas une courbe fermée en général. Nous dirons que σ_t est *holonome* (ou parfois plus simplement *intégrable*) précisément quand la courbe Γ_t est fermée. La stratégie de la démonstration est de pertuber σ_t jusqu'à n'obtenir que des courbes intégrables.

Proposition 1. – *Soit $\sigma_t : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{R}$ joignant γ_0' à γ_1', il existe une application*

$$\begin{array}{rccc} \Sigma : & [0,1] \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & C^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{R}) \\ & (t,s) & \longmapsto & \Sigma_{t,s} \end{array}$$

telle que $\Sigma_{t,0} = \sigma_t$, $\Sigma_{0,s} = \gamma_0'$, $\Sigma_{1,s} = \gamma_1'$ et $\Sigma_{t,1}$ est holonome.

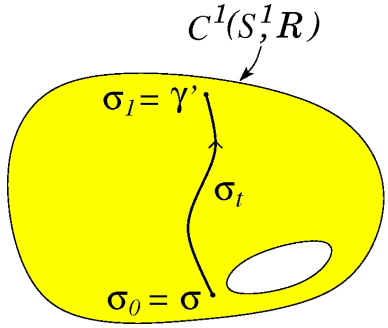


Cette proposition implique le théorème puisque

$$\begin{array}{rccc} \gamma_t : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & \displaystyle\int_0^s \Sigma_{t,1}(u)du \end{array}$$

passe au quotient sur $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et fournit ainsi une homotopie régulière $\gamma_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ joignant γ_0 à γ_1. Considérons d'abord une proposition plus simple.

Proposition 2. – *Soit $\sigma : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{R}$, il existe une homotopie $\sigma_t : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{R}$, telle que $\sigma_0 = \sigma$ et σ_1 soit holonome.*



Démonstration de la proposition 2. – Quitte à effectuer une première homotopie radiale, on peut toujours supposer que $\sigma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, on peut en outre supposer que σ n'est pas une application constante. Soit

$$V = \int_0^1 \sigma(u)du$$

(on a identifié $\mathbb{S}^1$ à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Puisque le disque unité D^2 est convexe, $V \in Int(D^2)$ (car σ n'est pas constante) et l'homotopie $\sigma_t = \sigma - tV$ convient. □

Une version à paramètre de ce raisonnement permet d'obtenir la proposition 1 et donc le théorème de Whitney-Graustein. □

Notation.– On note $\Gamma(\mathcal{R})$ pour $C^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{R})$ et $Sol(\mathcal{R}) \subset \Gamma(\mathcal{R})$ le sous-espace des applications holonomes. La proposition 2 signifie que la flèche

$$\pi_0(Sol(\mathcal{R})) \longrightarrow \pi_0(\Gamma(\mathcal{R}))$$

induite par l'inclusion est surjective ; la proposition 1 dit qu'elle est aussi injective.

Mieux, en changeant les espaces de paramètres dans la proposition 2 il est *facile* de démontrer le résultat suivant :

Proposition 3.– *Soient* $k \in \mathbb{N}^*$ *et*

$$\Sigma_0 : (B^k, \mathbb{S}^{k-1}) \longrightarrow (\Gamma(\mathcal{R}), Sol(\mathcal{R}))$$

alors il existe une homotopie relative

$$\Sigma_t : (B^k, \mathbb{S}^{k-1}) \longrightarrow (\Gamma(\mathcal{R}), Sol(\mathcal{R}))$$

constante au dessus de $\mathbb{S}^{k-1}$ *telle que*

$$\Sigma_1 : B^k \longrightarrow Sol(\mathcal{R}).$$

Observation.– La proposition 2 correspond au cas $k = 1$ de ce théorème.

Corollaire.– *L'inclusion* $\iota : Sol(\mathcal{R}) \subset \Gamma(\mathcal{R})$ *est une équivalence d'homotopie faible.*

En effet, le théorème signifie que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi_k(\Gamma(\mathcal{R}), Sol(\mathcal{R})) = 0$$

ce qui implique que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi_k(Sol(\mathcal{R})) \xrightarrow{\iota_*} \pi_k(\Gamma(\mathcal{R}))$$

est un isomorphisme, autrement dit ι est une équivalence d'homotopie faible (e. h. f.).

Rappel.– Si $i : A \longrightarrow X$ alors on a une suite exacte longue en homotopie

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

où i_* est induite par l'inclusion $A \longrightarrow X$, j_* par l'inclusion $(X, *) \longrightarrow (X, A)$ et ∂ par la restriction $(B^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (X, A)$ à $\mathbb{S}^{n-1}$. Si $n = 0$, les π_0 ne sont pas des groupes et l'adjectif « exacte » doit être compris ensemblistement.

3 Le fibré des jets

3.1 Fibrés

Soient G un groupe topologique, X un espace topologique et $\Phi : G \longrightarrow \text{Homéo}(X)$ un morphisme de groupes. Si

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & \Phi(g)(x) \end{array}$$

est continue, on dit que G *agit* sur X, et si Φ est injective, on dit que l'action est *effective.*

Définition. – Soit G un groupe topologique agissant effectivement sur un espace F. *Un fibré* E *de base* B *de fibre* F *et de groupe structural* G est une application $p : E \longrightarrow B$ et une collection d'homéomorphismes $\{\varphi_i : p^{-1}(\mathcal{U}_i) \longrightarrow \mathcal{U}_i \times$

F, $\mathcal{U}_i$ ouvert de $B\}$ (les cartes au dessus de $\mathcal{U}_i$) tels que :

1) Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathcal{U}_i) \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{U}_i \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & \mathcal{U}_i & \end{tikzcd}$$

2) Tout point de B figure dans une carte.

3) Si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ et φ est une carte, alors $\varphi_{|\mathcal{V}}$ est une carte de $\mathcal{V}$.

4) Les applications de changement de cartes sont de la forme :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times F & \longrightarrow & (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times F \\ (x, f) & \longmapsto & (x, t_{ij}(x).f) \end{array}$$

où $t_{ij} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \longrightarrow G$ (application de transition).

Quand la fibre est un espace vectoriel F de dimension q, on parle de *fibré vectoriel de rang* q (le groupe structural est $G = Gl(F)$), quand la fibre est G on parle de *fibré principal*.

Exemples. – 1) L'espace produit $M_1 \times M_2 \xrightarrow{\pi_1} M_1$, la fibre est M_2, le groupe structural est $G = \{id\}$.
2) Le ruban de Möbius $\mathbb{M}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, la fibre est un segment $]-\epsilon, \epsilon[$, le groupe structural est $G = \{\pm id\} = \mathbb{Z}_2$.
3) La fibration de Hopf $\mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2^{-1}$, la fibre est $\mathbb{S}^1$, le groupe structural est $G = U(1)$.
4) Le fibré tangent $TM \xrightarrow{p} M$, la fibre est $\mathbb{R}^m$, le groupe structural est $G = Gl(m, \mathbb{R})$.
5) Le fibré normal d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ $NM \xrightarrow{p} M$, la fibre est $\mathbb{R}^{n-m}$, le groupe structural est $G = Gl(n-m, \mathbb{R})$.
6) Le fibré des repères. Soit $FM = \{(x, v_1, \cdots, v_m) \in M \times (TM)^m \mid \forall j \in \{1, ..., m\}, v_j \in T_x M$ et $rg(v_1, \cdots, v_m) = m\}$, la projection naturelle $FM \xrightarrow{p} M$ est un fibré de fibre $Gl(m, \mathbb{R})$ et de groupe structural $G = Gl(m, \mathbb{R})$.
7) Un revêtement $\tilde{M} \longrightarrow M$ avec M et $\tilde{M}$ connexe par arcs, la fibre est un espace discret et G s'identifie à un sous-groupe de $\pi_1(M)$.

Fibré induit. – Soit $f : B' \longrightarrow B$ et $p : E \longrightarrow B$ un fibré de fibre F et de groupe structural G. On définit le *fibré induit* f^*E par :

$$f^*(E) = \{(b', e) \in B' \times E \mid p(e) = f(b')\} \xrightarrow{p'} B'.$$

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"'] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

et il est facile de vérifier que f^*E a pour fibre F est pour groupe structural G.

Isomorphisme de fibrés. – Un morphisme de fibrés est une paire d'applications $(\tilde{f}, f)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"'] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

et telle que pour tout couple de cartes $\varphi : p^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U} \times F$, $\varphi' : p^{-1}(\mathcal{U}') \longrightarrow \mathcal{U}' \times F$ la composée :

$$\{b\} \times F \xrightarrow{\varphi^{-1}} p^{-1}(b) \xrightarrow{\tilde{f}} (p')^{-1}(f(b)) \xrightarrow{\varphi'} \{f(b)\} \times F$$

soit un homéomorphisme donnée par l'action d'un élément $\Psi_{\varphi,\varphi'}(b) \in G$. De plus $b \mapsto \Psi_{\varphi,\varphi'}(b)$ doit être continue sur $\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{U}')$. Un morphisme $(\tilde{f}, f)$ est un isomorphisme si il admet un inverse $(\tilde{g}, g)$.

Théorème. – *Soient M une variété compacte (éventuellement à bord) et $E \longrightarrow B$ un G-fibré. Si $f, g : M \longrightarrow B$ sont homotopes alors f^*E et g^*E sont isomorphes.*

Définition. – Un espace B est *contractile* si l'identité de B est homotope à une application constante.

Les boules de $\mathbb{R}^n$ sont contractiles, plus généralement les parties convexes sont contractiles.

Corollaire. – *Tout fibré sur une base contractile est trivial (isomorphe à un produit).*

3.2 Espace des 1-jets

Définition. – Soit $U \subset \mathbb{R}^m$. L'espace des 1-jets des applications de U dans $\mathbb{R}^n$ est le produit

$$J^1(U, \mathbb{R}^n) = U \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Le 1-*jet de* $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ en x est le triplet :

$$j^1 f(x) = (x, f(x), df_x) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Tout choix de coordonnées permet d'identifier $J^1(U, \mathbb{R}^n)$ avec le produit

$$J^1(U, \mathbb{R}^n) \approx U \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n)$$

et le 1-jet $j^1 f(x)$ avec

$$j^1 f(x) \approx \left(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right).$$

Définition. – Soient $p : X \longrightarrow M$ un fibré, une *section* de X est une application $\sigma : M \longrightarrow X$ telle que $p \circ \sigma = id_M$. L'espace des sections C^r de X est noté $\Gamma^r(X)$.

Définition. – Soient $p : X \longrightarrow M$ un fibré vectoriel, $x \in M$ et $\sigma_1, \sigma_2 : U \longrightarrow X$ deux sections C^1 au dessus d'un voisinage trivialisant U de x. On dit que σ_1 et σ_2 sont *équivalentes en* x si, dans un système de coordonnées, elles ont la même valeur et les mêmes dérivées en x. Une classe d'équivalence sous cette relation est appelée un *jet d'ordre 1 en* x. L'espace des 1-jets est noté $X^{(1)}$.

Le 1-jet d'une section (locale) σ en x est le couple

$$j^1\sigma(x) = (\sigma(x), d\sigma_x)$$

où $d\sigma_x : T_xM \longrightarrow T_{\sigma(x)}X$. L'espace des *1-jets des sections locales* de X est l'espace

$$X^{(1)} = \{(y, L) \mid y \in X, L \in \mathcal{L}(T_xM, T_yX) \text{ et } dp_y \circ L = id_{T_xM}\}$$

où $x = p(y)$.

Remarques.– 1) Si $p : M \times N \longrightarrow M$ est le fibré trivial, une section $\sigma : M \longrightarrow M \times N$ s'écrit $\sigma(x) = (x, f(x))$ avec $f \in C^1(M, N)$. Le 1-jet de σ s'identifie au triplet $(x, f(x), df_x)$. Dans ce cas l'espace des 1-jets des sections de p s'identifie à

$$J^1(M, N) = \{(x, y, L) \mid x \in M,\ y \in N, L \in \mathcal{L}(T_xM, T_yN)\}.$$

qui est appelé l'espace des 1-jets des applications de M dans N.

2) La projection naturelle

$$\begin{array}{rccc} p^1 : & X^{(1)} & \longrightarrow & X \\ & (y, L) & \longmapsto & y \end{array}$$

définit une structure de fibré, la fibre au dessus de y étant

$$(p^1)^{-1}(y) = \{L \in \mathcal{L}(T_x M, T_y X) \mid dp_y \circ L = id_{T_x M}\}$$

où $x = p(y)$.

Proposition.– *Le fibré $X^{(1)} \longrightarrow X$ est un fibré affine.*

Démonstration.– En td ?

4 Relations différentielles, h-principe

Définition.– Soit $X \longrightarrow M^m$ une fibration. Une *relation différentielle* d'ordre 1 portant sur les sections $\Gamma(X)$ de classe C^1 est un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de l'espace des 1-jets $X^{(1)}$.

Exemple 1.– Un système d'équations aux dérivées partielles

$$\Phi\left(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right) = 0$$

où $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\Phi : J^1(U, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^q$ définit naturellement une relation différentielle $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \{(x, y, v_1, ..., v_m) \mid \Phi(x, y, v_1, ..., v_m) = 0\}.$$

Ici X est le fibré trivial $U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ et $X^{(1)} = J^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Exemple 2.– Soit $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$. Une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une immersion si pour tout $x \in \mathbb{S}^1$ on a $\gamma'(x) \neq 0$. Cette condition définit une relation différentielle

$$\mathcal{R} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subset X^{(1)} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Exemple 3.– Soit $X = M^m \times N^n \longrightarrow M^m$. On dit que $f : M^m \longrightarrow N^n$ est une immersion si, en tout point $p \in M^m$, on a $rg\ df_p = m$. Cette condition définit une relation différentielle

$$\mathcal{R} = \{(x, y, L_{x,y}) \mid L_{x,y} \in\ Mono(T_x M, T_y N)\} \subset X^{(1)} = J^1(M, N).$$

où on a noté $Mono(T_xM, T_yN)$ l'espace vectoriel des monomorphismes (=applications linéaires injectives) de T_xM dans T_yN.

Exemple 4.– Soit $X = \Lambda^p T^* M^m \longrightarrow M^m$. La condition de fermeture des p-formes différentielles $\alpha \in \Omega^p(M^m)$

$$d\alpha = 0$$

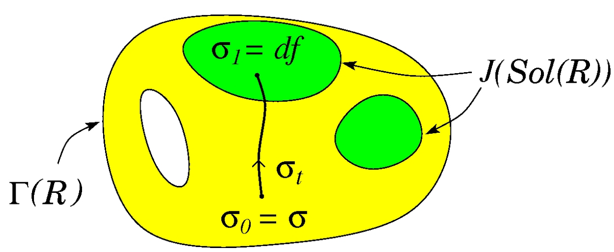
définit naturellement une relation différentielle $\mathcal{R} \subset X^{(1)}$.

Notation.– Soit $X \longrightarrow M^m$ un fibré, on note $\Gamma^r(X)$ l'espace des section C^r de X. Si $f \in \Gamma^1(X)$, on note $J : \Gamma^1(X) \longrightarrow \Gamma^0(X^{(1)})$ l'application qui à $f \in \Gamma^1(X)$ associe son 1-jet $j^1 f$.

Définition.– Tout élément $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ est appelé *solution formelle* de $\mathcal{R}$. On dit qu'une solution formelle σ est *holonome* s'il existe $f \in \Gamma^1(X)$ telle que $\sigma = j^1 f$. Une telle section f est dite *solution de la relation différentielle* $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{S}ol(\mathcal{R})$ l'espace des solutions de $\mathcal{R}$.

Les espaces $\mathcal{S}ol(\mathcal{R})$ et $\Gamma(\mathcal{R})$ sont munis de la topologie des compacts-ouverts, autrement dit, de la topologie de la convergence uniforme des sections et de leurs dérivées sur les compacts de M^m.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe* si pour toute section $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$, il existe une homotopie de sections $\sigma_t \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = \sigma$ et $\sigma_1 \in J(\mathcal{S}ol(\mathcal{R}))$ (i. e. il existe $f : M \to N$ telle que $j^1 f = \sigma_1 \in \Gamma(\mathcal{R})$).

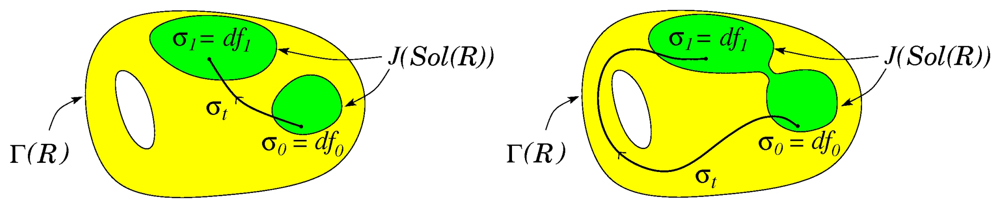


Cette définition équivaut à demander que l'application J induise une surjection au niveau du π_0 : $\pi_0(J) : \pi_0(\mathcal{S}ol(\mathcal{R})) \twoheadrightarrow \pi_0(\Gamma(\mathcal{R}))$.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe 1-paramétrique* si $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe et si pour toute famille de sections $\sigma_t \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que

$\sigma_0 = j^1 f_0$ et $\sigma_1 = j^1 f_1$, il existe une homotopie $H : [0,1]^2 \to \Gamma(\mathcal{R})$ telle que :

$$H(0,t) = \sigma_t,\ H(s,0) = \sigma_0,\ H(s,1) = \sigma_1,\ \text{et}\ H(1,t) = j^1 f_t.$$



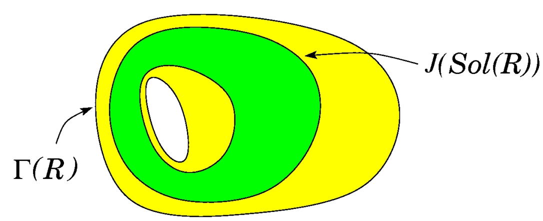
Deux exemples où $\mathcal{R}$ ne satisfait pas au h-principe 1-paramétrique.

Définition.– Une application $f : (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ entre deux espaces topologiques est une *équivalence d'homotopie faible* si elle induit un isomorphisme au niveau de tous les groupes d'homotopie i. e.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi_k(f) : \pi_k(X,x) \simeq \pi_k(Y,y).$$

Si $k = 0$, il faut bien sûr comprendre que f induit une bijection entre les π_0.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe paramétrique* si $J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \to \Gamma(\mathcal{R})$ est une équivalence d'homotopie faible.



La relation $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe paramétrique.

Définition.– L'application f est une *équivalence d'homotopie* s'il existe

$$g : (Y,y) \longrightarrow (X,x)$$

telle que $f \circ g$ est homotope à Id_Y et $g \circ f$ est homotope à Id_X.

Une remarque tirée de [2].– Une version en dimension infinie du théorème J.H.C. Whitehead (cf. [3] ou [1]) implique que pour les variétés de Fréchet [1] métrisable

1. Rappelons qu'un espace de Fréchet est un e.v.t. réel complet dont la topologie est induite par une famille dénombrable et séparante de semi-normes $|.|_n$. Il est métrisable avec $d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x-y|_n}{1+|x-y|_n}$

l'équivalence d'homotopie faible implique l'équivalence d'homotopie. En particulier, les espaces $\mathcal{S}ol(\mathcal{R})$ et $\Gamma(\mathcal{R})$ sont Fréchet métrisables et donc le h-principe pour $\mathcal{R}$ implique que $J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$ est une équivalence d'homotopie.

Exemple.– La démonstration du théorème de Whitney-Graustein montre que la relation différentielle des immersions du cercle dans le plan satisfait au h-principe 1-paramétrique. La proposition 3 montre que cette relation satisfait au h-principe paramétrique.

Références

[1] J. EELLS, *A setting for global analysis*, Bull. A. M. S., 72 (1966), 751-807.

[2] Y. ELIAHSBERG ET N. MISHACHEV, *Introduction to the h-principle*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 48, A. M. S., Providence, 2002.

[3] R. PALAIS, *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*, Topology 5 (1966), 1-16.