

Le h -principe ?

Tout ce qui n'est pas interdit est autorisé !

Vincent Borrelli *

Le 26 mars 2009, l'Académie norvégienne des sciences et des lettres a décerné le prix Abel à Mikhaïl Gromov pour ses «*contributions révolutionnaires en géométrie*». Parmi celles-ci, la découverte au début des années 70 d'une propriété partagée par nombre de problèmes géométriques : le h -principe.

1 Un exemple introductif

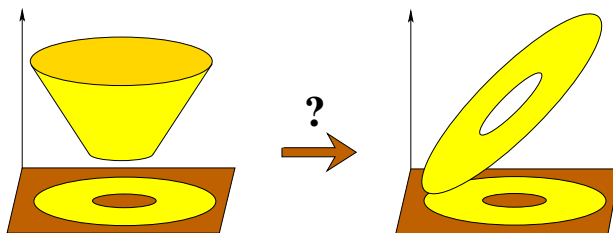
Voyons de quoi il retourne au travers d'un petit problème élémentaire. On se donne un anneau du plan euclidien $A = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2}\}$ et deux fonctions de classe C^1 :

$$\begin{array}{ll} f: A \longrightarrow \mathbb{R} & g: A \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2} & (x, y) \longmapsto y. \end{array}$$

La question est la suivante : existe-t-il une homotopie $(h_t)_{t \in [0,1]}$ de fonctions C^1 telle que $h_0 = f$, $h_1 = g$ et

$$\forall t \in [0, 1] \quad dh_t \neq 0 ?$$

Autrement dit, on voudrait passer d'une portion de cône à un anneau incliné sans faire apparaître de plans horizontaux (ni verticaux!).



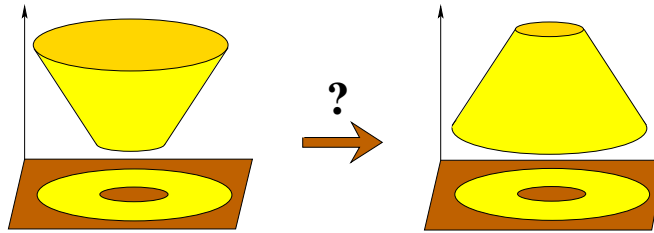
*Texte paru dans la Gazette des mathématiciens du mois d'octobre 2009.

Après quelques essais, on peut avoir l'impression que le problème est impossible... et c'est effectivement le cas. Les applications «gradient» de f et de g , restreintes au cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset A$, s'identifient à des lacets

$$\begin{array}{ll} \text{grad } f : \mathbb{S}^1 & \longrightarrow \mathbb{E}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x, y) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{grad } g : \mathbb{S}^1 & \longrightarrow \mathbb{E}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (0, 1) \end{array}$$

qui évitent l'origine O . Le premier tourne une fois autour de O alors que le second est un lacet constant. L'existence d'une famille de fonctions $h_t : A \longrightarrow \mathbb{R}$ permettant de passer de f à g sans créer de plans horizontaux induirait une homotopie $\text{grad } h_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ entre $\text{grad } f$ et $\text{grad } g$ ce qui impliquerait que le nombre de tours autour de O de ces deux lacets devrait être le même. Contradiction.

Considérons une variation du même problème, il s'agit maintenant de passer de f à $-f$ sans créer de plans horizontaux.



Là encore il semble que le problème soit impossible, mais cette fois l'argument précédent ne s'applique pas car les lacets $\text{grad } f$ et $-\text{grad } f$ effectuent le même nombre de tours autour de O et sont donc homotopes. En particulier l'obstruction «évidente» de l'exemple précédent s'évanouit et on chercherait vainement un nouvel argument permettant d'aboutir à une contradiction : contrairement à ce que l'intuition suggère, cette fois il est bel et bien possible de passer d'un cône à l'autre sans faire apparaître de plans horizontaux. Quelques dessins expliquant ce petit miracle figurent à la fin de ce texte en annexe. Mais l'essentiel est ailleurs : dans les deux exemples que l'on vient de parcourir, la réponse à la question posée ne semble dépendre que d'un seul fait, celui de l'existence ou non d'une homotopie joignant les fonctions «gradient». Pour le dire brièvement, la simple disparition d'une obstruction homotopique a induit une réponse positive à un problème différentiel.

Voyons cela de plus près. Notons \mathcal{R} la condition différentielle qui porte sur f , c'est-à-dire *in fine*, l'ensemble $\mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$. Une fonction $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de

classe C^1 telle que

$$\forall a \in A \quad \text{grad } h_a \in \mathcal{R}$$

est dite *solution* de la *relation différentielle* \mathcal{R} et on note $Sol(\mathcal{R})$ l'espace de toutes les solutions de \mathcal{R} . Les deux problèmes précédents se reformulent ainsi :

QUESTION.— Les fonctions f et g (resp. f et $-f$) sont-elles dans la même composante connexe par arcs de $Sol(\mathcal{R})$?

Puisque l'espace $Sol(\mathcal{R})$ s'injecte continûment dans l'espace $\Gamma(\mathcal{R}) = C^0(A, \mathcal{R})$ des applications continues de A dans \mathcal{R} au moyen de la flèche

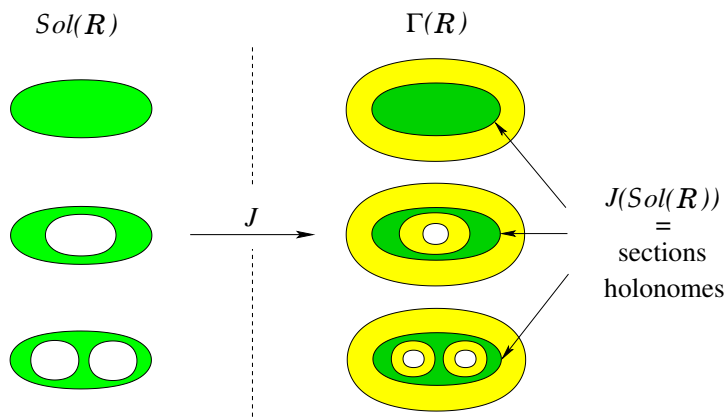
$$\begin{array}{ccc} J : Sol(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{R}) \\ f & \longmapsto & \text{grad } f \end{array}$$

une condition nécessaire est que leurs images par J habitent la même composante de $\Gamma(\mathcal{R})$. Cette dernière condition revient à demander que les applications «gradient» (restreintes au cercle unité) effectuent le même nombre de tours autour de l'origine. Ce n'est pas le cas pour f et g qui, par conséquent, vivent dans des composantes différentes de $Sol(\mathcal{R})$. C'est la raison pour laquelle la réponse à la question du premier problème est négative. En revanche, pour f et $-f$ le nombre de tours est le même ce qui signifie donc que $J(f)$ et $J(-f)$ sont dans la même composante de $\Gamma(\mathcal{R})$. Se pose alors la question de la réciproque : si $J(f)$ et $J(-f)$ habitent la même composante de $\Gamma(\mathcal{R})$ en est-il de même, dans $Sol(\mathcal{R})$, pour f et $-f$? Comme on l'a vu la réponse est oui — c'est notre petit miracle — mais en fait quelque chose de bien plus fort a lieu : il se trouve que l'application J est une *équivalence d'homotopie*. Ceci signifie que les espaces $Sol(\mathcal{R})$ et $\Gamma(\mathcal{R})$ sont homotopiquement indiscernables. En particulier, J fait correspondre bijectivement les composantes entre elles.

Au bilan, nous avons une relation différentielle \mathcal{R} et une question concernant l'espace $Sol(\mathcal{R})$ des solutions de cette relation. On a constaté que cet espace se voit de façon naturelle comme un sous-espace d'un espace incomparablement plus facile à appréhender : $\Gamma(\mathcal{R})$. Ce dernier, traditionnellement appelé *espace des sections de la relation différentielle* \mathcal{R} , est simplement composé des fonctions continues $\sigma : A \rightarrow \mathcal{R}$. Parmi elles, un petit nombre provient du gradient d'une fonction

$$\sigma = \text{grad } f \quad \text{où} \quad f : A \rightarrow \mathbb{R},$$

elles sont alors dites *holonomes* et correspondent précisément à l'image par J de $Sol(\mathcal{R})$.



Dans cette représentation schématique, $Sol(\mathcal{R})$ et $\Gamma(\mathcal{R})$ possèdent toutes deux trois composantes et J les fait correspondre bijectivement (en fait, ici, J est une équivalence d'homotopie).

De nombreuses questions, en géométrie et ailleurs, reviennent à résoudre une relation différentielle \mathcal{R} , mais, en général, les espaces $Sol(\mathcal{R})$ et $\Gamma(\mathcal{R})$ sont topologiquement très différents l'un de l'autre.

Définition.— On dit que \mathcal{R} satisfait au *h-principe* (ou au *principe homotopique*) si l'inclusion naturelle $J : Sol(\mathcal{R}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R})$ est une équivalence d'homotopie.

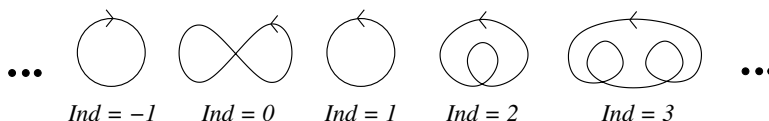
A priori, montrer qu'une relation différentielle satisfait au *h-principe* peut sembler incomparablement plus difficile, plus coûteux, que de résoudre directement le problème initial. Cette impression doit cependant être modérée pour deux raisons. D'abord il existe une théorie, initiée et largement développée par M. Gromov, qui permet dans de nombreuses cas de démontrer rapidement et simplement l'existence d'un *h-principe*. Ensuite, bien sûr, le gain obtenu dépasse très largement le prix payé : au final, en plus de la réponse à un problème donnée, on hérite d'une description homotopique de l'espace de toutes les solutions. En particulier, la relation différentielle \mathcal{R} admet une solution si et seulement si $\Gamma(\mathcal{R})$ est non vide et la classification de l'ensemble des solutions découle de celle des composantes de $\Gamma(\mathcal{R})$. En d'autres termes, le problème différentiel se réduit miraculeusement à un «simple» problème topologique. C'est exactement ce qui se passe pour la relation différentielle

de nos deux exemples introductifs. On montre en effet qu'elle satisfait au h -principe et ceci implique que le nombre de tours de l'application «gradient» est la seule obstruction à l'existence d'une homotopie dans $Sol(\mathcal{R})$ permettant de passer d'une solution (la fonction f) à une autre (g ou $-f$).

2 Trois exemples célèbres

Satisfaire au h -principe est une propriété extrêmement forte pour une relation différentielle puisqu'elle implique que l'aspect «analyse» du problème disparaisse complètement au profit de la seule topologie. Il est donc naturel de penser que de telles relations différentielles doivent être excessivement rares. Pourtant de nombreux problèmes en géométrie répondent à un h -principe, en voici quelques exemples historiques.

Le théorème de Whitney-Graustein (1937).— *Les courbes fermées régulières et orientées du plan sont classées par leur seul indice.*



Décryptons cet énoncé laconique. Une courbe fermée orientée $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dite *régulière* si elle est C^1 et si la dérivée de f ne s'annule jamais :

$$f' : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

En particulier, la courbe admet une droite tangente en chaque point de \mathbb{S}^1 . Deux courbes régulières f et g étant données, on dit qu'elles sont *régulièrement homotopes* s'il existe une homotopie $(h_t)_{t \in [0,1]}$ de courbes régulières telle que $h_0 = f$ et $h_1 = g$. Le problème auquel répond le théorème de Whitney-Graustein est celui de la classification des courbes régulières fermées à homotopie régulière près. La relation différentielle est donc l'ensemble $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et le problème revient à déterminer l'ensemble des composantes (connexes par arcs) de

$$Sol(\mathcal{R}) = \{f \in C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \mid f' \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathcal{R})\}.$$

On montre — et c'est le point clé — que \mathcal{R} satisfait au h -principe, par conséquent les composantes de $Sol(\mathcal{R})$ correspondent *via* J avec celles de

$\Gamma(\mathcal{R}) := C^0(\mathbb{S}^1, \mathcal{R}) :$

$$\begin{array}{ccc} J : \text{Sol}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{R}) \\ f & \longmapsto & f'. \end{array}$$

Or, les composantes de $\Gamma(\mathcal{R})$ sont en bijection avec \mathbb{Z} , la bijection étant donnée par le nombre de tours d'un représentant quelconque de la composante. L'indice $Ind(f)$ d'une courbe f étant le nombre de tours de f' autour de l'origine O , il classe donc à lui-seul les courbes régulières fermées et orientées.

Le retournement de la sphère (S. Smale, 1958).— Une application $f : M \rightarrow N$ de classe C^1 d'une variété dans une autre est une *immersion* si en tout point $m \in M$, le rang de la différentielle df_m est égal à la dimension de M . Dans ce cas, l'image de M par f possède en tout point un espace tangent¹. Deux immersions f et g sont *régulièrement homotopes* s'il existe une homotopie $(h_t)_{t \in [0,1]}$ parmi les immersions telle que $h_0 = f$ et $h_1 = g$. Un célèbre théorème de Smale énonce qu'il existe une homotopie régulière qui permet de « retourner » la sphère, c'est-à-dire de passer de l'inclusion naturelle $i : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ à l'immersion $r \circ i : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ où r est une réflexion de \mathbb{R}^3 par un plan vectoriel (on trouvera facilement sur la toile un petit film montrant le retournement). Ce résultat contre-intuitif est une conséquence d'un fait plus général : si $\dim M < \dim N$, la relation différentielle des immersions \mathcal{I} satisfait au h -principe (M. Hirsch, 1959). Autrement dit l'application

$$\begin{array}{ccc} J : \text{Imm}(M, N) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{I}) = \text{Mono}(TM, TN) \\ f & \longmapsto & df \end{array}$$

où $\text{Imm}(M, N)$ est l'espace des immersions de M dans N et $\text{Mono}(TM, TN)$ celui des monomorphismes² de fibrés de TM dans TN est une équivalence d'homotopie. La théorie de l'obstruction montre rapidement que si $M = \mathbb{S}^2$ et $N = \mathbb{R}^3$ alors l'espace $\text{Mono}(TM, TN)$ est connexe, par conséquent, deux immersions quelconques $f, g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont toujours régulièrement homotopes et en particulier $f = i$ et $g = r \circ i$.

Le théorème de Nash-Kuiper (1954-1955).— Jusqu'à présent, tous nos exemples ont fait intervenir une condition différentielle *ouverte* mais il ex-

1. ... et même plusieurs aux points multiples.

2. Applications continues envoyant chaque fibre de TM linéairement et injectivement dans les fibres de TN .

iste aussi des relations différentielles *fermées*³ qui satisfont au h -principe. J. Nash et N. Kuiper ont montré que c'est le cas pour la relation différentielle des immersions isométriques \mathcal{I}_{iso} d'une variété riemannienne (M, g) dans l'espace euclidien \mathbb{E}^q , $q > \dim M$ (une immersion $f : (M, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$ est *isométrique* si elle conserve les longueurs). Ainsi, l'application

$$J : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}mm_{iso}(M, N) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{I}_{iso}) = Mono_{iso}(TM, TN) \\ f & \longmapsto & df \end{array}$$

est une équivalence d'homotopie. Ceci a une conséquence très surprenante : l'espace $Mono(TM, TN)$ se rétractant sur celui des monomorphismes isométriques $Mono_{iso}(TM, TN)$, tout ce qui peut se réaliser dans le monde des immersions peut être réalisé dans le monde des immersions isométriques de classe C^1 ! Par exemple, il est possible d'effectuer le retournement de la sphère isométriquement... En rentrant un peu plus dans la technologie du h -principe, on peut même démontrer un résultat encore plus surprenant : il existe un plongement isométrique de la sphère unité dans une boule arbitrairement petite de \mathbb{E}^3 ! Bien sûr, les immersions en question sont bien C^1 , mais la conservation de la courbure de Gauss par isométrie interdit qu'elles soient C^2 . La question de leur régularité $C^{1,\alpha}$ est ouverte.

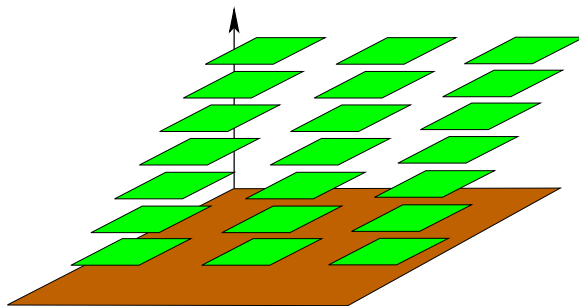
Flexibilité versus rigidité.— Il existe de nombreux autres exemples où le h -principe apparaît : en géométrie riemannienne C^2 , en géométrie symplectique, en géométrie de contact, *etc.* Et dans certains domaines, en topologie symplectique notamment, une question plus générale finit par occuper une place prépondérante : les relations qui satisfont le h -principe sont-elles rares ou au contraire abondantes ? Pour reprendre une métaphore due à Y. Eliashberg et N. Mischachev, il se pourrait que les relations qui vérifient le h -principe ne constituent qu'un îlot au milieu de l'océan des autres relations, ou à l'inverse, que ce soit les relations qui ne satisfont pas le h -principe qui se réduisent à un îlot... La difficulté est qu'en général, étant donnée une relation différentielle, il est bien délicat de savoir si elle satisfait ou non au h -principe et il faut parfois développer des outils très sophistiqués pour démontrer l'*échec* du h -principe. Dans ce cas, on parle de *rigidité* : une propriété homotopiquement possible dans $\Gamma(\mathcal{R})$ se trouve interdite par un argument «sophistiqué». Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand le h -principe est satisfait, la situation est dite *flexible* : tout ce qui n'est pas homotopiquement interdit a effectivement lieu.

3. Concrètement, définies par une série d'inégalités larges et/ou d'égalités.

3 Le chemin de montagne

Les trois exemples précédents sont tous antérieurs aux années 70, autrement dit, M. Hirsch, N. Kuiper, J. Nash, S. Smale et bien d'autres faisaient du h -principe sans le savoir. Il revient à M. Gromov d'avoir mis en évidence cette notion fondamentale mais également d'avoir produit nombre de techniques et de théorèmes qui assurent, à partir de propriétés topologiques et géométriques d'une relation différentielle, qu'elle satisfait au h -principe. Ses techniques, ses théorèmes mais aussi ses réflexions sont rassemblés dans un livre dont la réputation est immense et dont il n'est pas très difficile de prédire qu'il restera pour longtemps une mine d'or pour les mathématiciens : *Partial Differential Relations*. Il est bien entendu impossible, en quelques lignes, de donner ne serait-ce qu'un résumé des travaux qui y sont développés, mais il est tout de même possible d'avoir une idée de ce qui, très souvent, fait marcher la machine du h -principe : le truc dit de *la rampe de garage* ou du *chemin de montagne*.

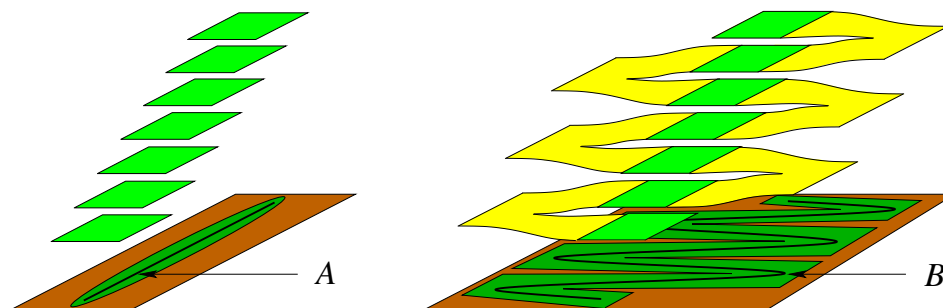
Sous des formes variées, ce truc est au cœur des différentes méthodes «classiques» utilisées pour démontrer un h -principe. La version que nous allons présenter est due à Y .Eliashberg et N .Mischachev. Elle apparaît naturellement lorsque l'on considère le problème suivant, fondamental pour la théorie : étant donnée une fonction $f_0 : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ de plans R le long du graphe de cette fonction, peut-on trouver une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit (arbitrairement) C^0 -proche de f_0 et dont le champ de plans tangents soit (arbitrairement) C^0 -proche du champ de plans R ?



Par exemple, ici, on a choisi $f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x = (x, y) \mapsto x$, et le champ de plan R est horizontal.

Dans cet énoncé, il faut comprendre que le champ de plans R joue le rôle de la contrainte imposée par la relation différentielle \mathcal{R} et que, si cette dernière est ouverte, la fonction f recherchée en donne une solution. Comme on le

voit sur la figure ci-dessus, il n’y a, en général, aucun espoir de répondre positivement à la question posée par ce problème. En revanche, un résultat relativement récent — le théorème d’approximation holonome d’Eliashberg-Mischachev — montre que la réponse est *toujours* positive si l’ouvert \mathcal{U} est un voisinage suffisamment petit d’une sous-variété A de codimension au moins un et si f est définie, non plus sur \mathcal{U} , mais sur un voisinage suffisamment petit \mathcal{V} d’une déformation B de la sous-variété A .



Le dessin de droite montre comment est construite la fonction f qui est C^0 -proche de f_0 et dont le champ de plans tangents est C^0 -proche de R au dessus d’un voisinage d’une déformation B de A .

Concrètement, B ressemble à une ondulation de la sous-variété A , avec d’autant plus d’oscillations que l’on demande à B d’être proche de A . C’est ce phénomène d’oscillation qui crée un «chemin de montagne», bien visible sur l’illustration ci-dessus à droite. Notons que, si la relation différentielle est invariante par difféomorphisme (comme celle des immersions \mathcal{I} par exemple), on peut ensuite composer f par un difféomorphisme de la base pour obtenir une solution au dessus de A .

4 Une bibliographie succincte

4.1 Trois références incontournables

Y. ELIAHSBERG, N. MISHACHEV, *Introduction to the h-principle*, Graduate Studies in Mathematics, Vol 48, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.

M. GROMOV, *Partial Differential Relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, 1986.

D. SPRING, *Convex Integration Theory*, Birkhäuser, 1998.

4.2 Trois ouvrages pour s'initier rapidement

M. ADACHI, *Embeddings and Immersions*, Translation of Math. Monographs, vol 124, Amer. Math. Soc, 1993.

H. GEIGES, *h-principle and flexibility in geometry*, Mem. of the Amer. Math. Soc., n. 164, 2003.

E. GIROUX, *Flexibilité en géométrie symplectique*, cours ENS-Lyon, 1993.

4.3 Trois promenades de difficultés inégales

M. AUDIN ET P. PANSU, *Le h-principe de Mischa Gromov*, sur le site *Images des Mathématiques*, <http://images.math.cnrs.fr/Le-h-principe-de-Misha-Gromov.html>

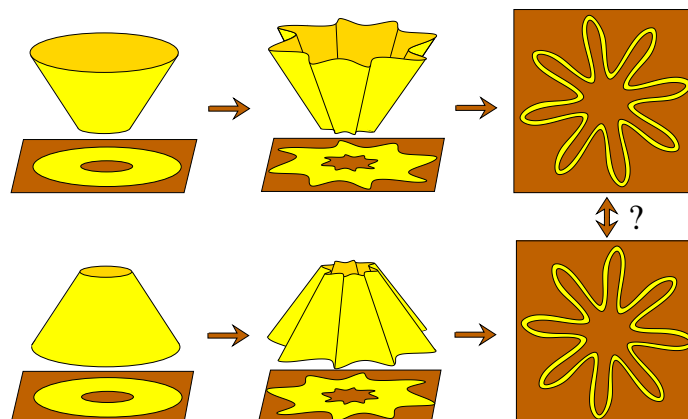
D. SPRING, *The Golden Age of Immersion Theory in Topology : 1959-1973. A Mathematical Survey from a Historical Perspective*, Bull. of the Amer. Math. Soc., Vol. 42 (2005), 163-180.

C. VILLANI, *Paradoxe de Scheffer-Shnirelman revu sous l'angle de l'intégration convexe [d'après C. De Lellis et L. Székelyhidi]*, Séminaire Bourbaki, 2008-2009, numéro 1001.

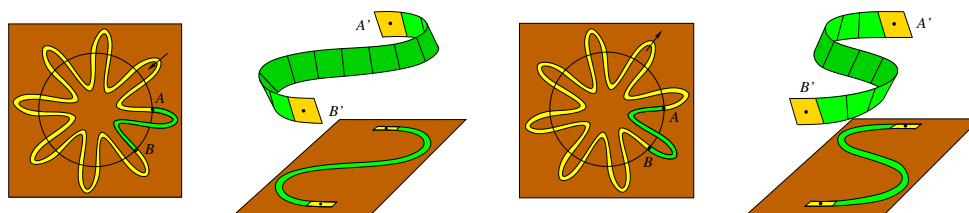
5 Annexe

Le petit problème de la première partie de ce texte est tiré d'un exercice proposé dans l'ouvrage de Y. Eliashberg et N. Mishachev (p. 37-38). Je donne ci-dessous ma solution personnelle, je suis intéressé par toute solution plus courte ou simplement différente.

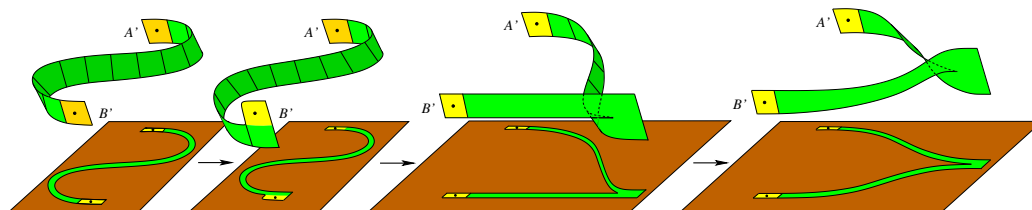
La première étape consiste à «plisser» les cônes jusqu'à ce que le domaine de définition ressemble à un fin ruban oscillant de part et d'autre du cercle unité. Cette opération ne fait bien sûr pas apparaître de plans tangents horizontaux mais, en revanche, elle modifie le domaine de définition. Ce petit inconvénient n'est pas majeur, il sera corrigé plus tard.



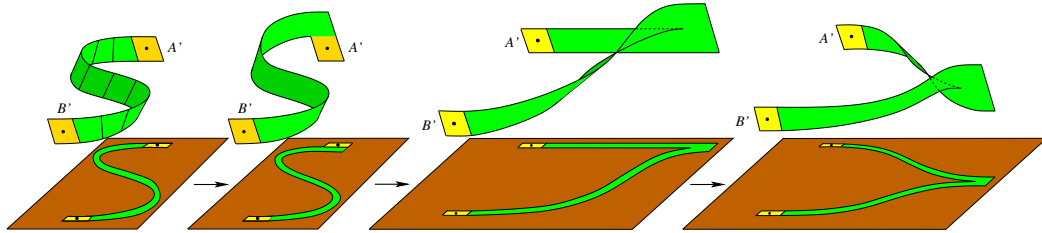
Les graphes «oscillant» périodiquement, on sélectionne dans chacun des deux domaines de définition représentés à droite ci-dessus une partie correspondant à une seule oscillation. Dans les figures qui suivent, on a fait correspondre sur le côté droit de chaque domaine de définition la portion de graphe correspondant à une oscillation.



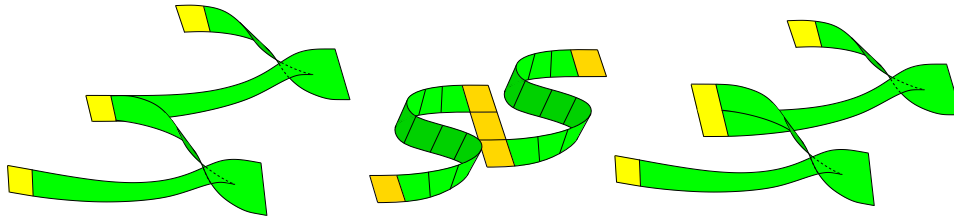
On déforme la portion du premier graphe comme indiqué dans les illustrations ci-dessous. Le dernier dessin fait clairement apparaître le premier virage d'un chemin de montagne.



La portion de l'autre graphe se déforme similairement. Le dernier dessin est exactement le même que celui figurant en dernière position ci-dessus.



Au cours du mouvement les voisinages de A' et de B' , colorés en jaune sur les dessins, ne sont pas modifiés. Ceci pose un problème au moment de recoller entre elles les déformations correspondant à chaque «oscillation» puisqu'il apparaît des zones qui ne sont plus des graphes (dessin ci-dessous à gauche). La solution de ce petit problème est simple : il suffit, avant d'effectuer ces déformations, de réaliser une homotopie qui allonge verticalement la zone de recollement (dessin du milieu). De cette façon, l'arête cuspidale disparaît pour faire place à un virage du chemin de montagne (dessin de droite).



On peut donc, au cours du mouvement, recoller entre elles les déformations correspondant à chaque «oscillation». On passe ainsi du cône au cône renversé sans faire apparaître de plans tangents horizontaux. En revanche, le domaine de définition a été déformé au cours de l'homotopie. Ce dernier défaut se corrige facilement, il suffit de composer ladite l'homotopie par une difféotopie⁴ du plan qui, à chaque étape, envoie le domaine de définition sur l'anneau de départ. L'homotopie ainsi obtenue est toujours solution de la relation différentielle puisque celle-ci est clairement invariante par difféomorphisme.

Toutes les figures illustrant ce texte ont été réalisées en utilisant le logiciel libre Xfig.

Merci à Damien Gayet, Francis Lazarus et Boris Thibert qui, par leurs nombreuses suggestions, m'ont permis d'améliorer grandement la rédaction de ce texte.

4. Une homotopie chez les difféomorphismes.