**Université Claude Bernard Lyon 1** **PCSI L1 - UE Math 2**

# Corrigé de l'examen final du mardi 18 mai 2021

**Règlement** – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

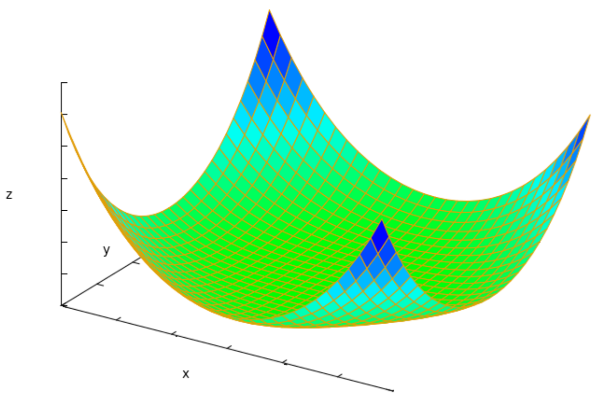
---

**Exercice 1 [4.5 pts]** – On considère la fonction de deux variables $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4+y^4-4xy$.

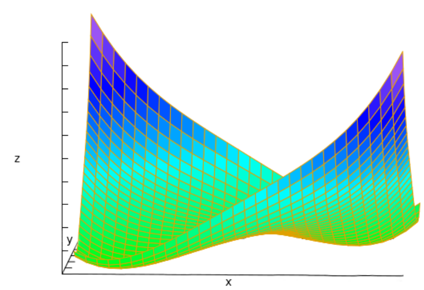
a) [2 pts ] Montrer que $f$ possède trois points critiques. Indication : $x^8 = 1$ a pour racines -1 et 1.

b) [1,5 pt ] Déterminer la nature de chaque point critique.

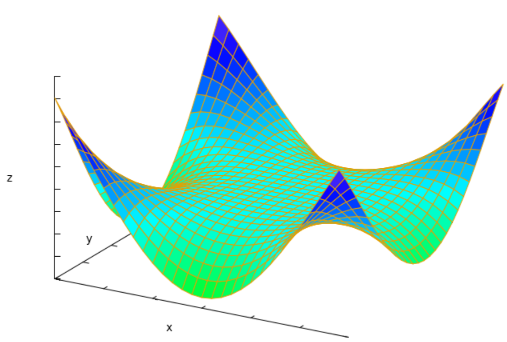
c) [1 pt ] Lequel de ces quatre graphes représente celui de la fonction $f$ ? On donnera une justification sommaire.



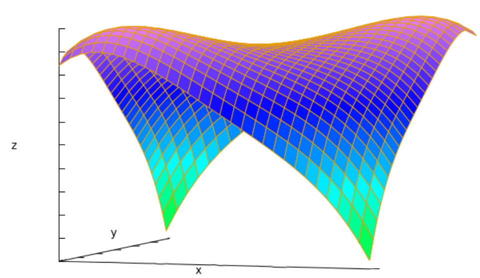

*Graphe 1*




*Graphe 2*




*Graphe 3*




*Graphe 4*

**Rép.**– a) On a

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 4x^3-4y & = & 0 \\ 4y^3-4x & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y & = & x^3 \\ x^9-x & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y & = & x^3 \\ x(x^8-1) & = & 0 \end{array}\right.$$

Or

$$x^8-1 = (x^4-1)(x^4+1) = (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1).$$

On obtient ainsi trois points critiques $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.
b) On a

$$H_f(x,y) = 4\begin{pmatrix} 3x^2 & -1 \\ -1 & 3y^2 \end{pmatrix} \text{ d'où } H_f(0,0) = 4\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H_f(1,1) = H_f(-1,-1) = 4\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $(0,0)$ est un point col et $(1,1)$ et $(-1,-1)$ sont des minimums locaux.
c) Le seul graphe possédant un point col et deux minimums locaux est le graphe 2.

**Exercice 2 [3.5 pts] –** On considère la demi-boule

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ 0 \leq z\}$$

ayant pour densité de masse

$$\mu(x,y,z) = 1-(x^2+y^2+z^2).$$

a) [1 pt ] Écrire en coordonnées sphériques l'ensemble $\Omega$ et la densité de masse $\mu$.
b) [1 pt ] Trouver la masse totale de la demi-boule.
c) [1.5 pt ] Trouver le barycentre $G(x_G, y_G, z_G)$ de la demi-boule.

**Rép.–** a) On a

$$\Omega = \{(r,\varphi,\theta) \mid r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} \text{ et } \mu(r,\varphi,\theta) = 1-r^2.$$

b) On a

$$M = \iiint_\Omega \mu(x,y,z)dxdydz = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(1-r^2)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr = 2\pi\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}(1-r^2)r^2\sin\theta dr = 2\pi\int_{r=0}^{1}(1-r^2)r^2 d\theta dr$$

d'où

$$M = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{15}.$$

c) Pour des raisons de symétrie $x_G = y_G = 0$. Puis

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_\Omega z\mu(x,y,z)dxdydz = \frac{1}{M}\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r\cos\theta(1-r^2)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{M}\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}(1-r^2)r^3\sin 2\theta d\theta dr.$$

or

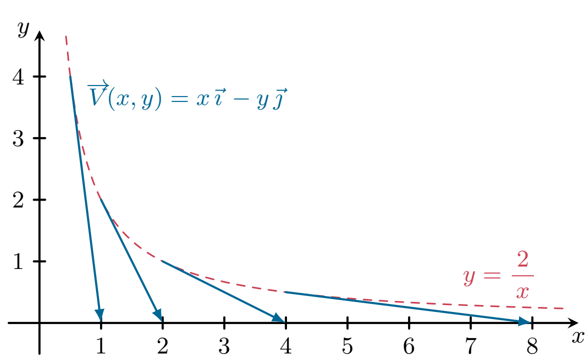
$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta = \left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \text{et} \quad \int_{r=0}^{1}(1-r^2)r^3 dr = \left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Ainsi

$$z_G = \frac{\pi}{12M} = \frac{15\pi}{4.12\pi} = \frac{5}{16}.$$

**Exercice 3 [3.5 pts] –** On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = x\overrightarrow{i} - y\overrightarrow{j}$.
a) [1 pt ] Dessiner le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ aux points $(\frac{1}{2},4)$, $(1,2)$, $(2,1)$ et $(4,\frac{1}{2})$.
b) [1,5 pt ] Trouver l'expression de la ligne de champ $t \mapsto \gamma(t) = (x(t),y(t))$ passant par le point $(2,1)$.
c) [1 pt ] Montrer que la ligne de champ passant par le point $(2,1)$ est une branche d'hyperbole que l'on représentera sur le dessin du a).

**Rép.–** a)



b) L'équation de a ligne de champ $\overrightarrow{V}$ passant par $(x_0, y_0) = (2, 1)$ s'écrit

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) \\ y'(t) & = & -y(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & x_0 e^{t} \\ y(t) & = & y_0 e^{-t} \end{array} \right.$$

c) Notons que

$$y(t) = y_0 e^{-t} = \frac{y_0}{e^t} = \frac{x_0 y_0}{x(t)} = \frac{2}{x(t)}$$

qui est l'équation d'une hyperbole.

**Exercice 4 [2 pts] –** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

a) [1 pt ] Montrer que $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \Delta f$.

b) [0,5 pt ] À partir de a), caractériser un champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ qui est à la fois conservatif et incompressible.

c) [0.5 pt ] Le champ $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$ avec $f(x, y) = x^2 - y^2$ est-il conservatif et incompressible ?

**Rép.–** a) On a $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ et $\operatorname{div} \overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}$ d'où

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f.$$

b) D'aprs le a), tout champ $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$ avec $f$ harmonique, i. e. telle que $\Delta f = 0$, est conservatif et incompressible.
c) Puisque $\Delta f = 0$, le champ $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f = 2x\,\vec{\imath} - 2y\vec{\jmath}$ est conservatif et incompressible.

**Exercice 5 [4.5 pts] –** On considère les deux champs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\overrightarrow{V}(x, y, z) = \cos x\,\vec{\imath} + \cos y\,\vec{\jmath} + \cos z\,\vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{W}(x, y, z) = -y\,\vec{\imath} - z\,\vec{\jmath} - x\,\vec{k}.$$

a) [1.5 pt ] Montrer que l'un de ces deux champ est conservatif puis déterminer un potentiel scalaire $\phi$ de ce champ.

b) [2 pt ] Montrer que l'un de ces deux champs admet un potentiel vecteur puis déterminer un potentiel vecteur de ce champ sous la forme $\overrightarrow{A} = \alpha xy\vec{\imath} + \beta yz\vec{\jmath} + \gamma zx\vec{k}$ où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des constantes.

c) [0.5 pt ] Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long d'un cercle de centre l'origine, de rayon 1 et contenu dans un plan horizontal.

d) [0.5 pt ] Calculer le flux de $\overrightarrow{W}$ au travers de la sphère de centre l'origine et de rayon 1.

**Rép.–** a) Un calcul direct montre que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ ainsi $\overrightarrow{V}$ est irrotationnel. Puisque l'ensemble de définition est $\mathbb{R}^3$, le lemme de Poincaré assure que le champ est conservatif. On cherche $\phi$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial \phi}{\partial x} & = & \cos x \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & = & \cos y \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & = & \cos z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \phi(x,y,z) & = & \sin x + c_1(y,z) \\ \frac{\partial c_1}{\partial y} & = & \cos y \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & = & \cos z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \phi(x,y,z) & = & \sin x + c_1(y,z) \\ c_1(y,z) & = & \sin y + c_2(z) \\ \frac{\partial c_2}{\partial z} & = & \cos z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \phi(x,y,z) & = & \sin x + c_1(y,z) \\ c_1(y,z) & = & \sin y + c_2(z) \\ c_2(z) & = & \sin z + c \end{array} \right.$$

d'où $\phi(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z + c$. Notons aussi que

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{W} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$$

donc $\overrightarrow{W}$ n'est pas conservatif.
2) Le calcul direct montre que $\operatorname{div}\overrightarrow{W} = 0$. Comme $\overrightarrow{W}$ est défini sur $\mathbb{R}^3$, le lemme de Poincaré assure l'existence d'un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$. On calcule $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{A}$ avec l'expression donnée dans l'énoncé.

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha xy \\ \beta yz \\ \gamma zx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta y \\ -\gamma z \\ -\alpha x \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Notons enfin que

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V} = \sin x + \sin y + \sin z \neq 0,$$

le champ $\overrightarrow{V}$ n'est donc pas incompressible.
c) Puisque $\overrightarrow{V}$ est un champ conservatif, sa circulation le long d'une courbe fermée est nulle.
d) Puisque $\overrightarrow{W}$ est un champ incompressible son flux à travers une surface fermée est nul.

**Exercice 6 [2 pts] –** Calculer le flux du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{V}(x, y, z) = 2x^2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + (1 + x^2 + y^2 + z^2)\,\vec{k}$$

à travers de la surface paramétrée par

$$f(u, v) = (u, u^2, v), \qquad u \in [-1, 1],\ v \in [0, 1].$$

**Rép.–** On a

$$\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\langle \overrightarrow{V}(f(u, v)), \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2u^2 \\ -1 \\ 1 + u^2 + u^4 + v^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2u \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 4u^3 + 1$$

Le flux de $\overrightarrow{V}$ au travers de la surface $S$ paramétrée par $f$ est donc

$$\Phi_S(\overrightarrow{V}) = \int_{u=-1}^{1} \int_{v=0}^{1} \langle \overrightarrow{V}(f(u, v)), \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \rangle du dv = \int_{u=-1}^{1} \int_{v=0}^{1} (1 + 4u^3) du dv = \left[u + u^4\right]_{-1}^{1} = 2.$$