Examen Terminal du lundi 16 mai 2022

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [**4 pts**] – Soient $\alpha > 0$ et f la fonction définie par $f(x, y) = x^2 - 2xy + \alpha y^3$.

a) [1 pt] Montrer que f possède deux points critiques dont on déterminera les coordonnées en fonction de α.

b) [1 pt] Déterminer la nature de chaque point critique.

c) [1 pt] Déterminer la limite $\lim_{y \to -\infty} f(0, y)$. La fonction f admet-elle un minimum global ?

d) [1 pt] Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au point $(0, 0)$

Exercice 2 [**3.5 pts**] – On considère le solide semi-cylindrique

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

ayant pour densité de masse

$$\mu(x, y, z) = e^z.$$

a) [1 pt] Dessiner une vue en coupe de Ω pour $z = 0$ puis représenter Ω.

b) [0.5 pt] Écrire en coordonnées cylindriques l'ensemble Ω.

c) [1 pt] Trouver la masse totale M de Ω.

d) [1 pt] On note $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre de Ω. Déterminer z_G.
Indication : le calcul nécessite une intégration par parties.

Exercice 3 [**4 pts**] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y) = (x - y)\overrightarrow{i} + (x + y)\overrightarrow{j}$ et les deux courbes paramétrées suivantes

$$\gamma_1(t) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t).$$

a) [1 pt] Dessiner le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ aux huit points $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ et $(-1, -1)$.

b) [1.5 pt] Dire pour chacune des deux courbes γ_1 et γ_2 si elles sont des lignes de champ de $\overrightarrow{V}$? On justifiera sa réponse.

c) [1.5 pt] On considère un point matériel situé en $A = (1, 0)$ au temps $t = 0$ et soumis au champ de vitesse $\overrightarrow{V}$. Où se trouve le point matériel au temps $t = 1$? Quelle distance a-t-il parcouru ?

Exercice 4 [2 pts] – Soit $\overrightarrow{C}$ un champ constant de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{C}(x,y,z) = c_1\overrightarrow{i} + c_2\overrightarrow{j} + c_3\overrightarrow{k}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes. On définit un champ $\overrightarrow{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$\overrightarrow{B}(x,y,z) = \frac{1}{2}\overrightarrow{C} \wedge \overrightarrow{r}(x,y,z) \quad \text{et} \quad f(x,y,z) = \langle \overrightarrow{C}, \overrightarrow{r}(x,y,z)\rangle$$

où $\overrightarrow{r}(x,y,z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ est le champ de vecteurs "position" et où la notation $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle$ signifie le produit scalaire entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

a) [1 pt] Que vaut $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B}$?

b) [0,5 pt] Que vaut $\overrightarrow{\text{grad}}\ f$?

c) [0.5 pt] Que vaut div $\overrightarrow{B}$?

Exercice 5 [4.5 pts] – On considère le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\overrightarrow{U}(x,y,z) = \sin z\,\vec{\imath} + \cos z\,\vec{\jmath}.$$

a) [1 pt] Le champ $\overrightarrow{U}$ est-il incompressible ? Admet-il un potentiel vecteur ?

b) [1 pt] Calculer $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{U}$ et en déduire un potentiel vecteur de $\overrightarrow{U}$.

c) [1 pt] Calculer la circulation de $\overrightarrow{U}$ le long d'un cercle de centre l'origine, de rayon R, et contenu dans le plan horizontal (Oxy).

d) [1.5 pt] Déterminer la ligne de champ passant par le point (x_0, y_0, z_0) au temps $t = 0$.

Exercice 6 [2 pts + 1 pt bonus] – Cet exercice fait suite à l'exercice 5. Il est néanmoins indépendant. Soient A, B et C trois constantes réelles non toutes les trois nulles, on définit un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (A\sin z + C\cos y)\,\vec{\imath} + (B\sin x + A\cos z)\,\vec{\jmath} + (C\sin y + B\cos x)\,\vec{k}$$

En particulier, si l'on choisit $A = 1$, $B = 0$ et $C = 0$, on retrouve le champ $\overrightarrow{U}$ de l'exercice 5.

a) [1 pt] Le *laplacien vectoriel* d'un champ de vecteurs incompressible $\overrightarrow{W}$ est le champ de vecteurs $\triangle\overrightarrow{W}$ défini par

$$\triangle\overrightarrow{W} = \overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{W}).$$

Montrer que $\triangle\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}$.

b) [1 pt] Déterminer un potentiel vectoriel $\overrightarrow{A}$ de $\overrightarrow{V}$.

c) [1 pt bonus] Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ au travers de la sphère de centre l'origine et de rayon 1.