Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

Corrigé de l'examen final du lundi 16 mai 2022

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [4 pts] – Soient $\alpha > 0$ et f la fonction définie par $f(x,y) = x^2 - 2xy + \alpha y^3$.

a) [1 pt] Montrer que f possède deux points critiques dont on déterminera les coordonnées en fonction de α.

b) [1 pt] Déterminer la nature de chaque point critique.

c) [1 pt] Déterminer la limite $\lim_{y\to-\infty} f(0,y)$. La fonction f admet-elle un minimum global ?

d) [1 pt] Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au point $(0,0)$

Rép.– a) On a

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2(x-y) & = & 0 \\ -2x+3\alpha y^2 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y & = & x \\ x(3\alpha x - 2) & = & 0 \end{array}\right.$$

Par conséquent f admet deux points critiques : $(0,0)$ et $(\frac{2}{3\alpha}, \frac{2}{3\alpha})$.

b) On a

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6\alpha y \end{pmatrix} \text{ d'où } H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H_f(\frac{2}{3\alpha}, \frac{2}{3\alpha}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

- $det\, H_f(0,0) = -4$ donc $(0,0)$ est un point col
- $det\, H_f(\frac{2}{3\alpha}, \frac{2}{3\alpha}) = 4 > 0$ et $tr\ H_f(\frac{2}{3\alpha}, \frac{2}{3\alpha}) = 6 > 0$ donc $(\frac{2}{3\alpha}, \frac{2}{3\alpha})$ est un minimum local.

c) On a

$$\lim_{y\to-\infty} f(0,y) = \lim_{y\to-\infty} \alpha y^3 = -\infty$$

car $\alpha > 0$. La fonction f n'admet donc pas de minimum global.

d) On peut remarquer que f est polynomiale ou s'appuyer sur les calculs des questions a) et b) pour obtenir que

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + o(x^2 + y^2).$$

Exercice 2 [3.5 pts] – On considère le solide semi-cylindrique

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid \frac{1}{2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1,\ 0 \le y,\ 0 \le z \le 1\}$$

ayant pour densité de masse

$$\mu(x,y,z) = e^z.$$

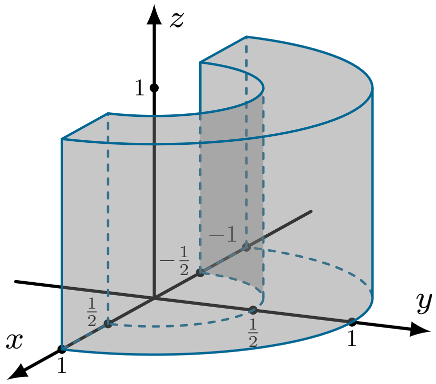
a) [1 pt] Dessiner une vue en coupe de Ω pour $z = 0$ puis représenter Ω.

b) [0.5 pt] Écrire en coordonnées cylindriques l'ensemble Ω.

c) [1 pt] Trouver la masse totale M de Ω.

d) [1 pt] On note $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre de Ω. Déterminer z_G.
Indication : le calcul nécessite une intégration par parties.

Rép.– a)



b) On a

$$\widetilde{\Omega} = \{(\rho, \varphi, z) \mid \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq z \leq 1\}.$$

c) On a

$$M = \iiint_{\Omega} \mu(x,y,z)dxdydz = \int_{r=\frac{1}{2}}^{1} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{z=0}^{1} \rho e^z d\rho d\varphi dz = \pi \int_{r=\frac{1}{2}}^{1} \int_{z=0}^{1} \rho e^z d\rho dz$$

d'où

$$M = \pi \int_{r=\frac{1}{2}}^{1} [e^z]_0^1 \rho d\rho = \pi\,(e-1) \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{2}\,(e-1)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}\,(e-1)$$

d) Pour des raisons de symétrie $x_G = 0$. Puis

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z\mu(x,y,z)dxdydz = \frac{1}{M} \int_{r=\frac{1}{2}}^{1} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{z=0}^{1} ze^z \rho d\rho d\varphi dz = \frac{\pi}{M} \int_{r=\frac{1}{2}}^{1} \int_{z=0}^{1} ze^z \rho d\rho dz.$$

et

$$z_G = \frac{\pi}{M} \int_{z=0}^{1} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} ze^z dz = \frac{3\pi}{8M} \int_{z=0}^{1} ze^z dz.$$

En effectuant une intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 ze^z dz &= [ze^z]_0^1 - \int_0^1 e^z dz \\ &= e - [e^z]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$z_G = \frac{3\pi}{8M} = \frac{1}{e-1}.$$

Exercice 3 [4 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = (x-y)\overrightarrow{i} + (x+y)\overrightarrow{j}$ et les deux courbes paramétrées suivantes

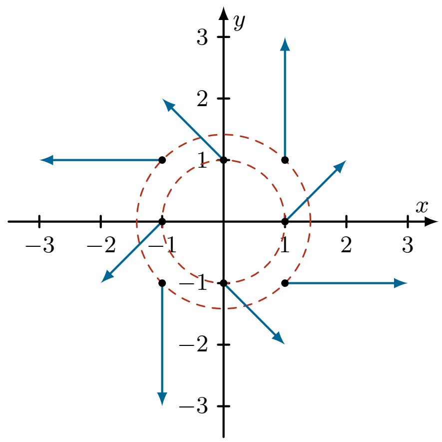
$$\gamma_1(t) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t).$$

a) [1 pt] Dessiner le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ aux huit points $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ et $(-1,-1)$.

b) [1.5 pt] Dire pour chacune des deux courbes γ_1 et γ_2 si elles sont des lignes de champ de $\overrightarrow{V}$? On justifiera sa réponse.

c) [1.5 pt] On considère un point matériel situé en $A = (1,0)$ au temps $t = 0$ et soumis au champ de vitesse $\overrightarrow{V}$. Où se trouve le point matériel au temps $t = 1$? Quelle distance a-t-il parcouru ?

Rép.– a) En tout point d'un cercle de centre l'origine et de rayon R, le champ $\overrightarrow{V}$ est sortant de norme $\sqrt{2}R$ et fait un angle de $\pi/4$ par rapport à la tangente.



b) Une courbe paramétrée $t \mapsto \gamma(t)$ est une ligne du champ $\overrightarrow{V}$ si $\gamma'(t) = \overrightarrow{V}(\gamma(t))$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \end{cases}$$

La courbe γ_1 ne vérifie pas ces équations. Ce n'est pas une ligne de champ de $\overrightarrow{V}$. En revanche, la courbe γ_2 les vérifie, c'est donc une ligne de champ de $\overrightarrow{V}$.
c) On remarque que $\gamma_2(0) = A$. On en déduit que le point matériel se trouvera à la position

$$\gamma_2(1) = (e\cos 1, e\sin 1)$$

au temps $t = 1$. La distance parcourue L est donnée par

$$L = \int_0^1 \|\gamma_2'(t)\| dt.$$

Or

$$\|\gamma_2'(t)\|^2 = x'^2(t) + y'^2(t) = (x(t) - y(t))^2 + (x(t) + y(t))^2 = 2(x^2(t) + y^2(t)) = 2e^{2t}$$

d'où

$$L = \sqrt{2}\int_0^1 e^t dt = \sqrt{2}(e-1).$$

Exercice 4 [2 pts] – Soit $\overrightarrow{C}$ un champ constant de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{C}(x,y,z) = c_1\overrightarrow{i} + c_2\overrightarrow{j} + c_3\overrightarrow{k}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes. On définit un champ $\overrightarrow{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$\overrightarrow{B}(x,y,z) = \frac{1}{2}\overrightarrow{C} \wedge \overrightarrow{r}(x,y,z) \quad \text{et} \quad f(x,y,z) = \langle \overrightarrow{C}, \overrightarrow{r}(x,y,z)\rangle$$

où $\overrightarrow{r}(x,y,z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ est le champ de vecteurs "position" et où la notation $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle$ signifie le produit scalaire entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

a) [1 pt] Que vaut $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B}$?

b) [0,5 pt] Que vaut $\overrightarrow{\text{grad}}\ f$?

c) [0.5 pt] Que vaut div $\overrightarrow{B}$?

Rép.– a) b) et c) On a

$$\overrightarrow{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_2z - c_3y \\ c_3x - c_1z \\ c_1y - c_2x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(x,y,z) = c_1x + c_2y + c_3z.$$

Un calcul direct montre alors que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \overrightarrow{C}$ et div $\overrightarrow{B} = 0$.

Exercice 5 [4.5 pts] – On considère le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\overrightarrow{U}(x,y,z) = \sin z\,\vec{\imath} + \cos z\,\vec{\jmath}.$$

a) [1 pt] Le champ $\overrightarrow{U}$ est-il incompressible ? Admet-il un potentiel vecteur ?

b) [1 pt] Calculer $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{U}$ et en déduire un potentiel vecteur de $\overrightarrow{U}$.

c) [1 pt] Calculer la circulation de $\overrightarrow{U}$ le long d'un cercle de centre l'origine, de rayon R, et contenu dans le plan horizontal (Oxy).

d) [1.5 pt] Déterminer la ligne de champ passant par le point (x_0, y_0, z_0) au temps $t = 0$.

Rép.– a) Le calcul de la divergence donne $\operatorname{div}\overrightarrow{U} = 0$. Le champ est donc incompressible. Puisque $\overrightarrow{U}$ est défini sur $\mathbb{R}^3$ qui est contractile, le lemme de Poincaré implique que $\overrightarrow{U}$ admet un potentiel vectoriel.
b) Le calcul montre que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U}$ ainsi $\overrightarrow{U}$ est un potentiel vecteur de lui-même.
c) Notons $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$ une paramétrisation d'un cercle horizontal de rayon R et de centre l'origine. On a

$$\overrightarrow{\gamma}'(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0), \quad \overrightarrow{U}(\gamma(t)) = \vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{\gamma}'(t), \overrightarrow{U}(\gamma(t))\rangle = R\cos t$$

ainsi

$$C_\gamma(\overrightarrow{U}) = \int_0^{2\pi} R\cos t\,dt = 0.$$

d) Écrivons la ligne de champ passant par (x_0, y_0, z_0) au temps $t = 0$ comme une courbe paramétrée

$$t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

L'équation des lignes de champ prend alors la forme

$$\overrightarrow{\gamma}'(t) = \overrightarrow{U}(\gamma(t)) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} x'(t) & = & \sin z(t) \\ y'(t) & = & \cos z(t) \\ z'(t) & = & 0 \end{array}\right.$$

La troisième équation équivaut au fait que $t \mapsto z(t)$ est constante et la constante ne peut être que z_0. On peut donc écrire

$$\left\{\begin{array}{ccc} x'(t) & = & \sin z(t) \\ y'(t) & = & \cos z(t) \\ z'(t) & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x'(t) & = & \sin z_0 \\ y'(t) & = & \cos z_0 \\ z(t) & = & z_0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x(t) & = & (\sin z_0).t + x_0 \\ y'(t) & = & (\cos z_0).t + y_0 \\ z(t) & = & z_0 \end{array}\right.$$

On en déduit que les lignes de champ sont des droites parcourues à vitesse constante.

Exercice 6 [2 pts + 1 pt bonus] – Cet exercice fait suite à l'exercice 5. Il est néanmoins indépendant. Soient A, B et C trois constantes réelles non toutes les trois nulles, on définit un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (A\sin z + C\cos y)\,\vec{\imath} + (B\sin x + A\cos z)\,\vec{\jmath} + (C\sin y + B\cos x)\,\vec{k}$$

En particulier, si l'on choisit $A = 1$, $B = 0$ et $C = 0$, on retrouve le champ $\overrightarrow{U}$ de l'exercice 5.

a) [1 pt] Le *laplacien vectoriel* d'un champ de vecteurs incompressible $\overrightarrow{W}$ est le champ de vecteurs $\triangle\overrightarrow{W}$ défini par

$$\triangle\overrightarrow{W} = \overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{W}).$$

Montrer que $\triangle\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}$.

b) [1 pt] Déterminer un potentiel vectoriel $\overrightarrow{A}$ de $\overrightarrow{V}$.

c) [1 pt bonus] Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ au travers de la sphère de centre l'origine et de rayon 1.

Rép.– a) Le calcul du rotationnel de $\overrightarrow{V}$ donne

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A\sin z + C\cos y \\ B\sin x + A\cos z \\ C\sin y + B\cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\sin z + C\cos y \\ B\sin x + A\cos z \\ C\sin y + B\cos x \end{pmatrix} = \overrightarrow{V}$$

Donc
$$\triangle\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}.$$
b) Puisque $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}$, un potentiel vecteur pour $\overrightarrow{V}$ est $\overrightarrow{V}$ lui-même.
c) Le champ $\overrightarrow{V}$ admettant un potentiel vecteur, le théorème d'Ostrogradski montre alors que le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la sphère est nulle.