Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

Corrigé du contrôle terminal 2 du mercredi 23 juin 2021

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [8 pts] – Cet exercice est en deux parties relativement indépendantes.

On considère la fonction de deux variables f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \exp(h(x,y))$ où $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables.

Partie I.

a) [1 pt] Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)f(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)f(x,y).$$

b) [1 pt] En déduire que (x_0, y_0) est un point critique de f si et seulement s'il est un point critique de h.

c) [0.5 pt] Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y)f(x,y) + \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

d) [1 pt] Écrire les dérivées partielles d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

en fonction des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de h et des dérivées partielles d'ordre 1 de f.

e) [1 pt] Déduire des questions a), b) et c) qu'en un point critique (x_0, y_0) la matrice hessienne de f s'écrit

$$H_f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)H_h(x_0,y_0)$$

Partie II.

a) [1 pt] On suppose désormais que $h(x,y) = y^2 - x^2 + xy + x - y$. Montrer que $f(x,y) = e^{h(x,y)}$ admet un unique point critique (x_0, y_0) que l'on déterminera. *Indication* : on pourra utiliser le résultat de la question b) de la première partie.

b) [1 pt] Déterminer la matrice hessienne de h en (x_0, y_0).

c) [0.5 pt] Calculer $f(x_0, y_0)$ où $f(x,y) = \exp(h(x,y))$.

d) [0.5 pt] En utilisant la question e) de la première partie, déterminer la matrice hessienne de f en (x_0, y_0).

e) [0.5 pt] En déduire la nature du point critique (x_0, y_0).

Rép.– Partie I.– a) De $f = e^h$, on déduit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)e^{h(x,y)} = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)f(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)e^{h(x,y)} = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)f(x,y).$$

b) Puisque f ne s'annule pas (c'est une exponentielle) on en déduit que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = (0,0) \iff \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = (0,0).$$

c) & d) Le calcul des dérivées secondes donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)f(x,y)\right) = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y)f(x,y) + \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & = & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)f(x,y)\right) = \dfrac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}(x,y)f(x,y) + \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)f(x,y)\right) = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(x,y)f(x,y) + \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)f(x,y)\right) = \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)f(x,y) + \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}\right.$$

e) En un point critique (x_0,y_0) on a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

et donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & = & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x_0,y_0)f(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) & = & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)f(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & = & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)f(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) & = & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x_0,y_0)f(x_0,y_0). \end{array}\right.$$

Partie II.– a) On a

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+1 & = & 0 \\ 2y+x-1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ 2(2x-1)+x-1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ 5x-3 & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où

$$x = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{5}$$

On obtient ainsi un unique point critique $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$.
b) Un simple calcul montre que

$$H_h(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice ne dépend pas du point (x,y).
c) Le calcul direct conduit à

$$h\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{3}{5}.\frac{1}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

d'où

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) = e^{1/5}.$$

d) Ainsi, en utilisant d)

$$H_f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)H_h(x_0,y_0) = e^{1/5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e) On a

$$det\left(e^{1/5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = -5e^{2/5} < 0.$$

Il s'agit donc d'un point col.

Exercice 2 [4.5 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$.

a) [2 pts] Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ le long du chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$$

b) [1 pt] Le champ $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ est-il irrotationnel ? Est-il conservatif ?

c) [1 pt] Déterminer un potentiel $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$.

d) [0.5 pt] Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ le long de l'ellipse E paramétrée par $t \mapsto (\cos t, \cos t, \sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.

Rép.– a) On a

$$C_\gamma(\overrightarrow{V}) = \int_0^1 \langle \overrightarrow{V}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

or

$$\langle \overrightarrow{V}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \\ t^6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \rangle = t^2 + 2t^5 + 3t^8.$$

D'où

$$C_\gamma(\overrightarrow{V}) = \int_0^1 (t^2 + 2t^5 + 3t^8) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{2t^6}{6} + \frac{3t^9}{9} \right]_0^1 = 1.$$

b) Le calcul montre que

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$$

ainsi $\overrightarrow{V}$ est irrotationnel. Puisque ce champ est défini sur $\mathbb{R}^3$, le lemme de Poincaré permet de conclure qu'il est conservatif.
c) On cherche ϕ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial \phi}{\partial x} & = & x^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & = & y^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & = & z^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \phi(x,y,z) & = & \frac{x^3}{3} + c_1(y,z) \\ \frac{\partial c_1}{\partial y} & = & y^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & = & z^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \phi(x,y,z) & = & \frac{x^3}{3} + c_1(y,z) \\ c_1(y,z) & = & \frac{y^3}{3} + c_2(z) \\ \frac{\partial c_2}{\partial z} & = & z^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \phi(x,y,z) & = & \frac{x^3}{3} + c_1(y,z) \\ c_1(y,z) & = & \frac{y^3}{3} + c_2(z) \\ c_2(z) & = & \frac{z^3}{3} + c \end{array} \right.$$

d'où $\phi(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} + c$.
d) L'ellipse étant une courbe fermée et puisque le champ $\overrightarrow{V}$ est conservatif, on a $C_E(\overrightarrow{V}) = 0$.

Exercice 3 [4 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}.$$

a) [2 pts] Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ au travers du quart de cylindre C paramétré par

$$f(u,v) = (\cos u, \sin u, v), \qquad u \in [0, \frac{\pi}{2}],\ v \in [0,1].$$

b) [1 pt] Le champ $\overrightarrow{V}$ est-il incompressible ? Admet-il un potentiel vectoriel ?

c) [1 pt] Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ au travers de la sphère S paramétrée par

$$(u,v) \longmapsto (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

avec $(u,v) \in [0,\pi] \times [0, 2\pi]$.

Rép.– a) On a

$$\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\langle \overrightarrow{V}(f(u,v)), \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 2\cos u \sin u.$$

Le flux de $\overrightarrow{V}$ au travers de la surface C paramétrée par f est donc

$$\Phi_C(\overrightarrow{V}) = \int_{u=0}^{\pi/2} \int_{v=0}^{1} \langle \overrightarrow{V}(f(u,v)), \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \rangle dudv = \int_{u=0}^{\pi/2} \int_{v=0}^{1} 2\cos u \sin u dudv = \left[\sin^2 u\right]_0^{\pi/2} = 1.$$

b) Le calcul de la divergence de $\overrightarrow{V}$ donne div $\overrightarrow{V} = 0$ ce qui montre que le champ est incompressible. Puisque le champ $\overrightarrow{V}$ est défini sur $\mathbb{R}^3$ le lemme de Poincaré assure l'existence d'un potentiel vectoriel $\overrightarrow{A}$ pour $\overrightarrow{V}$.
c) Puisque la sphère est une surface fermée, le théorème d'Ostrogradski s'applique et on a

$$\Phi_S(\overrightarrow{V}) = \iiint_B \operatorname{div} \overrightarrow{V} dxdydz$$

où B est la boule unité (= le solide dont le bord est S). Or $\overrightarrow{V}$ étant incompressible, on a div $\overrightarrow{V} = 0$ ce qui montre que $\Phi_S(\overrightarrow{V}) = 0$.

Exercice 4 [3.5 pts] – Soient $R > 0$ et $H > 0$. On considère le cylindre plein

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq H\}$$

ayant pour densité de masse

$$\mu(x,y,z) = \frac{(H-z)(R - \sqrt{x^2+y^2})}{RH}.$$

a) [1 pt] Écrire en coordonnées cylindriques l'ensemble Ω et la densité de masse μ.
b) [1 pt] Déterminer la masse totale M du cylindre plein en fonction de H et de R.
c) [0.5 pt] Calculer le volume V de Ω et exprimer M en fonction de V.
d) [1 pt] On note $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre du cylindre. Exprimez z_G en fonction de H. On ne demande pas de déterminer x_G et y_G.

Rép.– a) On a

$$\Omega = \{(r,\varphi,z) \mid 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq H\} \text{ et } \mu(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{RH}(H-z)(R-r).$$

b) On a

$$M = \iiint_\Omega \mu(x,y,z)dxdydz = \frac{1}{RH}\int_{z=0}^{H}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}(H-z)(R-r)rdrd\varphi dz = \frac{2\pi}{RH}\int_{z=0}^{H}\int_{r=0}^{R}(H-z)(Rr-r^2)drdz$$

d'où

$$M = \frac{2\pi}{RH}\left[Hz - \frac{z^2}{2}\right]_0^H \left[\frac{Rr^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{2\pi}{RH}\frac{H^2}{2}\frac{R^3}{6} = \frac{\pi H R^2}{6}.$$

c) Le volume V du cylindre est donnée par

$$V = Vol(\Omega) = Aire(Base) \times Hauteur = \pi R^2 H$$

ainsi

$$M = \frac{1}{6}V.$$

d) On a

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_\Omega z\mu(x,y,z)dxdydz = \frac{1}{MRH}\int_{z=0}^{H}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} z(H-z)(R-r)rdrd\varphi dz = \frac{2\pi}{MRH}\int_{z=0}^{H}\int_{r=0}^{R}(Hz-z^2)(Rr-r^2)drdz$$

d'où

$$z_G = \frac{2\pi}{MRH}\left[\frac{Hz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^H \left[\frac{Rr^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{2\pi}{MRH}\frac{H^3}{6}\frac{R^3}{6} = \frac{\pi H^2 R^2}{18M}.$$

Puisque $6M = \pi R^2 H$ on déduit

$$z_G = \frac{H}{3}.$$

Pour des raisons de symétrie $x_G = y_G = 0$ mais ceci n'est pas demandé dans l'énoncé.