Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

Contrôle terminal, session 2 – Jeudi 22 juin 2023 – Durée 1h

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [6.5 pts] – On considère la fonction de deux variables f dont l'expression analytique est

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 + 2xy - 6x - 3y + \frac{17}{3}.$$

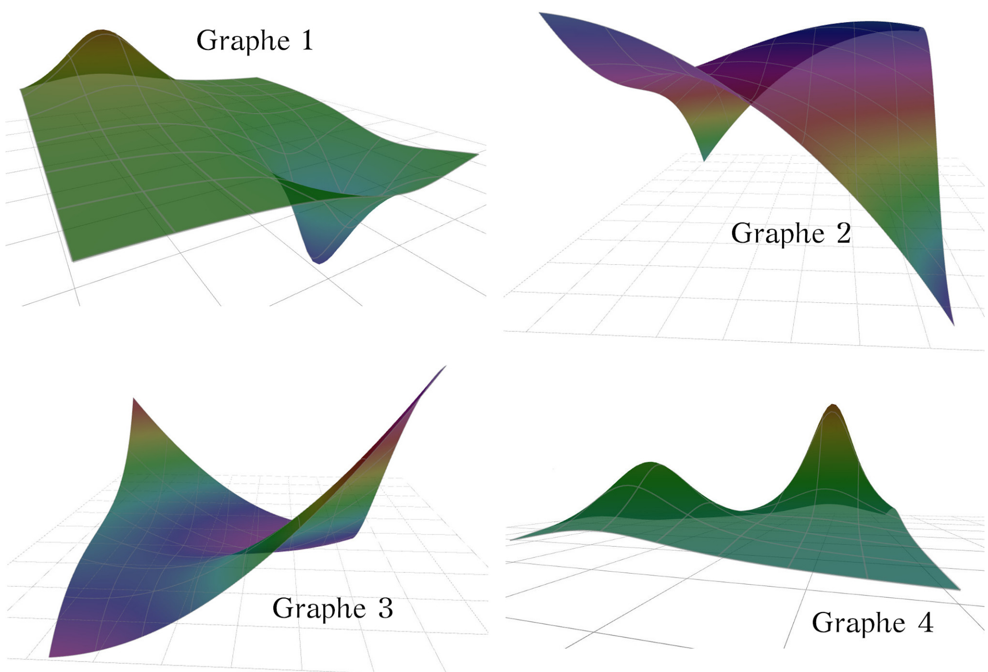
a) [1.5 pt] Les points suivants font-ils partie de la ligne de niveau zéro $L_0(f)$ de f : $A = (0,0)$, $B = (0,1)$ et $C = (1,1)$? Justifier.

b) [1.5 pt] Montrer que f admet deux points critiques que l'on déterminera.

c) [1.5 pt] Déterminer la nature de chacun de ces points critiques

d) [1 pt] Trouver les limites $\lim_{x\to+\infty} f(x,0)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x,0)$. La fonction f admet-elle un maximum global ? Un minimum global ?

e) [1 pt] L'un des graphes ci-dessous est celui de f. Lequel ? On justifiera la réponse.



Exercice 2 [6 pts] – On considère une fonction de deux variables $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+^*$ à valeurs strictement positives et la fonction logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

a) [0.5 pt] La composition $h \circ \ln$ est-elle possible ?

b) [1 pt] On considère la composée $f = \ln \circ h$. Écrire les dérivées partielles de f en fonction de celles de h.

c) [0.5 pt] Pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $J_f(x, y)$ la matrice jacobienne de f et $J_h(x, y)$ celle de h. Montrer que

$$J_f(x, y) = \frac{1}{h(x, y)} J_h(x, y).$$

d) [1 pt] Écrire les dérivées partielles secondes de f en fonction des dérivées partielles premières et secondes de h.

e) [1.5 pts] On suppose désormais que h est de la forme $h(x, y) = \cos(xy)$. Donner la matrice hessienne de h.

f)[1 pts] Exprimer le laplacien $\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ de f en fonction de h et la fonction distance au carré $d^2(x, y) = x^2 + y^2$.

g) [0.5 pt] En déduire que f est *super-harmonique* c'est-à-dire que $\Delta f \leq 0$.

Exercice 3 [7.5 pts] – On considère la boule B de rayon 1 de $\mathbb{R}^3$ ayant pour densité de masse

$$\mu(x, y, z) = e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

a) [1pt] Écrire en coordonnées sphériques la densité de masse μ.

b) [2 pts] Déterminer la masse totale M_B de B.
Indication pour le calcul : on pourra utiliser le fait que $(-(r^2 + 2r + 2)e^{-r})' = r^2 e^{-r}$.

On considère maintenant le sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq z\}$$

ayant la même densité de masse μ que précédemment.

c) [1 pt] Faire un dessin de Ω.

d) [0.5 pt] Écrire Ω en coordonnées sphériques.

d) [1 pt] Déterminer la masse totale M_Ω de Ω.

e) [2 pts] On note $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre de Ω. Déterminer z_G. On ne demande pas de calculer x_G et y_G.
Indication pour le calcul : on pourra utiliser le fait que $((-r^3 - 3r^2 - 6r - 6)e^{-r})' = r^3 e^{-r}$ et que $(\sin^2 \theta)' = 2 \cos \theta \sin \theta$.