

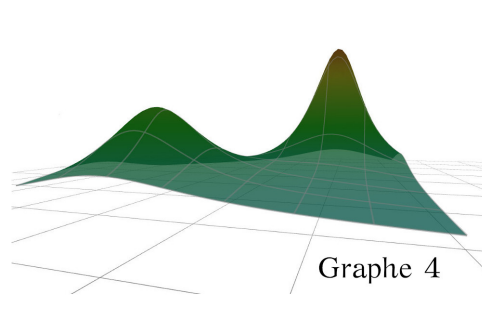
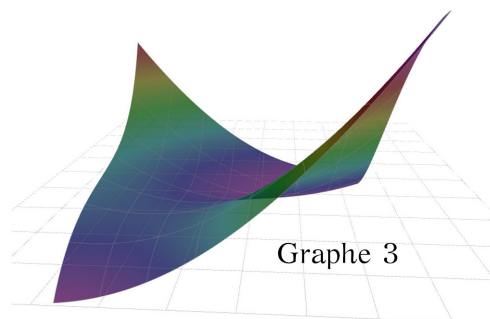
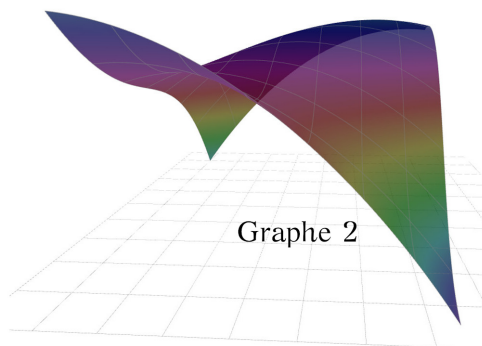
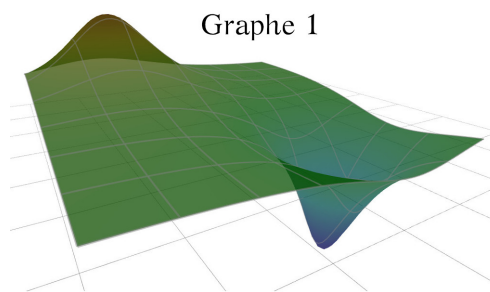
Corrigé du contrôle terminal, session 2 – Jeudi 22 juin 2023 – Durée 1h

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [6.5 pts] – On considère la fonction de deux variables f dont l'expression analytique est

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 + 2xy - 6x - 3y + \frac{17}{3}.$$

- [1.5 pt] Les points suivants font-ils partie de la ligne de niveau zéro $L_0(f)$ de $f : A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ et $C = (1, 1)$? Justifier.
- [1.5 pt] Montrer que f admet deux points critiques que l'on déterminera.
- [1.5 pt] Déterminer la nature de chacun de ces points critiques
- [1 pt] Trouver les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0)$. La fonction f admet-elle un maximum global? Un minimum global?
- [1 pt] L'un des graphes ci-dessous est celui de f . Lequel? On justifiera la réponse.



Rép.– a) Le calcul direct montre que $f(0, 0) = \frac{17}{3}$, $f(0, 1) = \frac{11}{3}$ et $f(1, 1) = 0$. Ainsi, seul le point $C = (1, 1)$ fait partie de $L_0(f)$.
 b) La matrice jacobienne de f est donnée par

$$Jac_f(x, y) = (x^2 + 2y - 6, 2y + 2x - 3)$$

Un point (x, y) est critique si $Jac_f(x, y) = (0, 0)$ et

$$Jac_f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x^2 + 2y - 6 = 0 \\ 2y + 2x - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 6 - 2y \\ y = \frac{3}{2} - x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 3 + 2x \\ y = \frac{3}{2} - x \end{cases}$$

La recherche des racines du polynôme $x^2 - 2x - 3$ montre que

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1).$$

Ainsi

$$Jac_f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{3}{2} - x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{3}{2} - x \end{cases}$$

ce qui conduit à deux solutions $(3, -\frac{3}{2})$ et $(-1, \frac{5}{2})$.

c) La matrice hessienne de f en (x, y) est donnée par

$$Hess_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\det Hess_f(-1, \frac{5}{2}) = -8 < 0$ et le point $(-1, \frac{5}{2})$ est un point col. Concernant l'autre point on a $\det Hess_f(3, -\frac{3}{2}) = 8 > 0$ et $tr Hess_f(3, -\frac{3}{2}) = 8 > 0$, ce qui montre que $(3, -\frac{3}{2})$ est un minimum local.

d) On a immédiatement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - 6x + \frac{17}{3} \right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - 6x + \frac{17}{3} \right) = -\infty$$

ainsi f n'admet ni maximum ni minimum globaux.

e) Le graphe ne peut pas être le numéro 1 (1 max local et 1 min local) ni le numéro 4 (deux max locaux). Le graphe numéro 2 a un max local et un point col, ce qui ne correspond pas. Il ne reste que le graphe numéro 3.

Exercice 2 [6 pts] – On considère une fonction de deux variables $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ à valeurs strictement positives et la fonction logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.

a) [0.5 pt] La composition $h \circ \ln$ est-elle possible ?

b) [1 pt] On considère la composée $f = \ln \circ h$. Écrire les dérivées partielles de f en fonction de celles de h .

c) [0.5 pt] Pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $J_f(x, y)$ la matrice jacobienne de f et $J_h(x, y)$ celle de h .
Montrer que

$$J_f(x, y) = \frac{1}{h(x, y)} J_h(x, y).$$

d) [1 pt] Écrire les dérivées partielles secondes de f en fonction des dérivées partielles premières et secondes de h .

e) [1.5 pts] On suppose désormais que h est de la forme $h(x, y) = \cos(xy)$. Donner la matrice hessienne de h .

f) [1 pts] Exprimer le laplacien $\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ de f en fonction de h et la fonction distance au carré $d^2(x, y) = x^2 + y^2$.

g) [0.5 pt] En déduire que f est *super-harmonique* c'est-à-dire que $\Delta f \leq 0$.

Rép.– a) Non, il y a incompatibilité entre l'ensemble d'arrivée de \ln et l'ensemble de départ de h .

b) De $f(x, y) = \ln(h(x, y))$ on déduit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{h(x, y)} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{h(x, y)} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$$

c) Ainsi

$$J_f(x, y) = \frac{1}{h(x, y)} J_h(x, y).$$

d) En dérivant une seconde fois les relations établies en b) on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \left(h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \left(h \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{h^2} \left(h \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

e) Puisque $h(x, y) = \cos(xy)$, on a

$$J_h(x, y) = (-y \sin(xy), -x \sin(xy)) \quad \text{et} \quad H_h(x, y) = \begin{pmatrix} -y^2 \cos(xy) & -\sin(xy) - xy \cos(xy) \\ -\sin(xy) - xy \cos(xy) & -x^2 \cos(xy) \end{pmatrix}$$

f et g) D'après les questions d) et e) on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{h^2} \left(h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{h^2} (\cos(xy)(-y^2 \cos(xy)) - (-y \sin(xy))^2) \\ &= -\frac{y^2}{h^2} \end{aligned}$$

Similairement $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x^2}{h^2}$ et par conséquent

$$\Delta f = -\frac{x^2 + y^2}{h^2} \leq 0.$$

Exercice 3 [7.5 pts] – On considère la boule B de rayon 1 de \mathbb{R}^3 ayant pour densité de masse

$$\mu(x, y, z) = e^{-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

a) [1pt] Écrire en coordonnées sphériques la densité de masse μ .

b) [2 pts] Déterminer la masse totale M_B de B .

Indication pour le calcul : on pourra utiliser le fait que $(-(r^2 + 2r + 2)e^{-r})' = r^2 e^{-r}$.

On considère maintenant le sous-ensemble Ω de \mathbb{R}^3 défini par

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq z\}$$

ayant la même densité de masse μ que précédemment.

c) [1 pt] Faire un dessin de Ω .

d) [0.5 pt] Écrire Ω en coordonnées sphériques.

d) [1 pt] Déterminer la masse totale M_Ω de Ω .

e) [2 pts] On note $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre de Ω . Déterminer z_G . On ne demande pas de calculer x_G et y_G .

Indication pour le calcul : on pourra utiliser le fait que $((-r^3 - 3r^2 - 6r - 6)e^{-r})' = r^3 e^{-r}$ et que $(\sin^2 \theta)' = 2 \cos \theta \sin \theta$.

Rép.– a) En passant en coordonnées sphériques, on trouve $\mu(r, \theta, \varphi) = e^{-r}$.

b) Par définition

$$M_B = \iiint_B \mu(x, y, z) dx dy dz$$

ainsi en passant en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} M_B &= \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-r} \sin \theta r^2 d\varphi d\theta dr \\ &= 2\pi \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta r^2 e^{-r} d\theta dr \\ &= 2\pi \int_{r=0}^1 [-\cos \theta]_{\theta=0}^{\pi} r^2 e^{-r} dr \\ &= 4\pi \int_{r=0}^1 r^2 e^{-r} dr \\ &= 4\pi [-(r^2 + 2r + 2)e^{-r}]_{r=0}^1 \\ &= 4\pi(2 - 5e^{-1}). \end{aligned}$$

- c) L'ensemble Ω est la demie sphère pleine supérieure ($z \geq 0$) de rayon 1
d) L'écriture de Ω en coordonnées sphériques est la suivante

$$\Omega = \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

- e) Puisque la densité ne dépend que de r , la masse de la demie boule inférieure est celle de la demie-boule supérieure. On a donc

$$M_\Omega = \frac{1}{2}M_B = 2\pi\left(2 - \frac{5}{e}\right).$$

Ce résultat peut évidemment se retrouver par un calcul direct.

- f) La coordonnée z_G est donnée par l'expression

$$z_G = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega z \mu(x, y, z) dx dy dz$$

ainsi en en passant en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{M_\Omega} \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \cos \theta e^{-r} \sin \theta r^2 d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{2\pi}{M_\Omega} \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta r^3 e^{-r} d\theta dr \\ &= \frac{2\pi}{M_\Omega} \int_{r=0}^1 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 e^{-r} dr \\ &= \frac{\pi}{M_\Omega} \int_{r=0}^1 r^3 e^{-r} d\theta dr. \end{aligned}$$

On poursuit le calcul en utilisant le fait que $((-r^3 + 3r^2 + 6r + 6)e^{-r})' = r^3 e^{-r}$ ainsi

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{\pi}{M_\Omega} [(-r^3 + 3r^2 + 6r + 6)e^{-r}]_0^1. \\ &= \frac{\pi}{M_\Omega} (-16e^{-1} + 6) \\ &= \frac{2\pi}{M_\Omega} (3 - 8e^{-1}) \\ &= \frac{3 - 8e^{-1}}{2 - 5e^{-1}}. \end{aligned}$$