Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math. Complémentaires**

Contrôle terminal, session 2 – Jeudi 22 juin 2023 – Durée 1h

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [7 pts] – On considère le champ de vecteurs donné par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (3x^2 - 3y^2)\,\overrightarrow{i} - 6xy\,\overrightarrow{j}\,.$$

a) [0.5 pt] Le champ $\overrightarrow{V}$ est-il constant le long de l'axe (Oz) ? Justifier.
b) [1 pt] Montrer que le champ $\overrightarrow{V}$ est conservatif.
c) [1.5 pt] Déterminer un potentiel $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de $\overrightarrow{V}$.
d) [1 pt] Montrer que le champ $\overrightarrow{V}$ admet un potentiel vectoriel.
e) [1.5 pt] Déterminer un potentiel vectoriel $\overrightarrow{U}$ de $\overrightarrow{V}$. On cherchera un tel potentiel sous la forme

$$\overrightarrow{U}(x,y,z) = A(x,y,z)\vec{\imath} + B(x,y,z)\vec{\jmath}.$$

f) [1 pt] On considère un champ conservatif $\overrightarrow{W}$ que l'on écrit sous la forme

$$\overrightarrow{W}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\vec{k}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Montrer que $\overrightarrow{W}$ est incompressible si et seulement si le laplacien Δf de f

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

est nul.
g) [0.5 pt] Calculer le laplacien de ϕ. Le résultat vous semble-t-il cohérent ?

Exercice 2 [6.5 pts] – On considère le champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\overrightarrow{V}(x,y) = (x-y)\,\vec{\imath} + (x+y)\,\vec{\jmath}$$

ainsi que les deux chemins $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ donnés par

$$\gamma_1(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$$

a) [2 pts] Calculer la circulation $\mathcal{C}_{\gamma_1}(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ le long de γ_1.
b) [1 pt] Calculer la circulation $\mathcal{C}_{\gamma_2}(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ le long de γ_2.
c) [1 pt] Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une ligne de champ de $\overrightarrow{V}$. Écrire les deux équations différentielles du premier ordre satisfaites par $x(t)$ et $y(t)$ (on ne demande pas de les résoudre).
d) [1 pt] Dire pour chacun des deux chemins γ_1 et γ_2 s'ils sont des lignes de champ de $\overrightarrow{V}$? On justifiera sa réponse.

e) [0,5pt] Déduire de la question c) que si $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ est une ligne de champ alors

$$\|\overrightarrow{\gamma}'(t)\|^2 = 2(x^2(t) + y^2(t)).$$

f) [0,5pt] Déduire des questions c) et e) que si $\gamma(t)$ est une ligne de champ alors la circulation $\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ le long de γ vaut

$$\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V}) = 2\int_I x^2(t) + y^2(t)\, dt.$$

g) [0,5pt] Calculer la circulation $\mathcal{C}_{\gamma_1}(\overrightarrow{V})$ avec la formule établie en f). Le résultat vous semble-t-il cohérent ?

Exercice 3 [6.5 pts] – On considère la paramétrisation de la sphère S de centre O et de rayon $R = 1$ donnée par

$$f(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \quad \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi],$$

ainsi que la calotte polaire (pôle Nord)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

a) [1 pt] Faire un dessin soigneux montrant le repère standard $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, la sphère S ainsi qu'un point M sur cette sphère de coordonnées sphériques $(r = 1, \theta, \varphi)$.

b) [1 pt] Comment doit-on choisir θ et φ pour que M soit dans la calotte Σ ?

c) [1 pt] Montrer que le vecteur normal $\overrightarrow{n_f}$ au point (θ, φ) de la sphère est donné par

$$\overrightarrow{n_f}(\theta, \varphi) = \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

d) [2 pts] Calculer le flux $\Phi_\Sigma(\overrightarrow{V})$ du champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V}(x, y, z) = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} + \sqrt{x^2 + y^2}\,\vec{k}$$

au travers de la calotte Σ orientée par $\overrightarrow{n}_f$.

Indication. – Dans le calcul, on pourra utiliser le fait que $(\sin^3\theta)' = 3\cos\theta\sin^2\theta$.

e) [1.5 pt] Quel est le flux $\Phi_S(\overrightarrow{V})$ de ce même champ de vecteurs au travers de la sphère S ?