Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math. Complémentaires**

Corrigé du contrôle terminal, session 2 – Jeudi 22 juin 2023 – Durée 1h

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [7 pts] – On considère le champ de vecteurs donné par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (3x^2 - 3y^2)\,\overrightarrow{i} - 6xy\,\overrightarrow{j}\,.$$

a) [0.5 pt] Le champ $\overrightarrow{V}$ est-il constant le long de l'axe (Oz) ? Justifier.
b) [1 pt] Montrer que le champ $\overrightarrow{V}$ est conservatif.
c) [1.5 pt] Déterminer un potentiel $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de $\overrightarrow{V}$.
d) [1 pt] Montrer que le champ $\overrightarrow{V}$ admet un potentiel vectoriel.
e) [1.5 pt] Déterminer un potentiel vectoriel $\overrightarrow{U}$ de $\overrightarrow{V}$. On cherchera un tel potentiel sous la forme

$$\overrightarrow{U}(x,y,z) = A(x,y,z)\vec{\imath} + B(x,y,z)\vec{\jmath}.$$

f) [1 pt] On considère un champ conservatif $\overrightarrow{W}$ que l'on écrit sous la forme

$$\overrightarrow{W}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\vec{k}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Montrer que $\overrightarrow{W}$ est incompressible si et seulement si le laplacien Δf de f

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

est nul.
g) [0.5 pt] Calculer le laplacien de ϕ. Le résultat vous semble-t-il cohérent ?

Rép.– a) L'expression analytique de $\overrightarrow{V}$ ne fait pas intervenir la variable z donc $\overrightarrow{V}$ est constant le long de l'axe (Oz).
b) Le calcul du rotationnel donne $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$. L'ensemble de définition de $\overrightarrow{V}$ est $\mathbb{R}^3$ qui est simplement connexe, le lemme de Poincaré implique que $\overrightarrow{V}$ est conservatif.
c) On cherche une fonction ϕ telle que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial \phi}{\partial x} & = & 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & = & -6xy \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \phi(x,y,z) & = & x^3 - 3y^2x + c_1(y,z) \\ -6xy + \frac{\partial c_1}{\partial y} & = & -6xy \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \phi(x,y,z) & = & x^3 - 3y^2x + c_1(y,z) \\ \frac{\partial c_1}{\partial y} & = & 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & = & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \phi(x,y,z) & = & x^3 - 3y^2x + c_1(y,z) \\ c_1(y,z) & = & c_2(z) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \phi(x,y,z) & = & x^3 - 3y^2x + c_2(z) \\ \frac{\partial c_2}{\partial z} & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où $\phi(x,y,z) = x^3 - 3y^2x + c$.
d) Un calcul immédiat montre que div $\overrightarrow{V} = 0$ donc $\overrightarrow{V}$ est incompressible. L'ensemble de définition de $\overrightarrow{V}$ est $\mathbb{R}^3$ qui est contractile.

Le lemme de Poincaré montre alors que $\overrightarrow{V}$ admet un potentiel vecteur.
e) On doit résoudre

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V} \iff \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A \\ B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} -\frac{\partial B}{\partial z} &= 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -6xy \\ \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= -6xyz + C_A(x,y) \\ B &= 3(y^2 - x^2)z + C_B(x,y) \\ \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= -6xyz + C_A(x,y) \\ B &= 3(y^2 - x^2)z + C_B(x,y) \\ \frac{\partial C_B}{\partial x} - \frac{\partial C_A}{\partial y} &= 0 \end{cases}$$

Il suffit de choisir $C_B = C_A = 0$ pour satisfaire au dernier système. Ainsi

$$\overrightarrow{U} = -6xyz\,\vec{\imath} + 3(y^2 - x^2)z\,\vec{\jmath}$$

est un potentiel vecteur de $\overrightarrow{V}$.
f) Le champ $\overrightarrow{W}$ est incompressible si et seulement si $\mathrm{div}\,\overrightarrow{W} = 0$. Or

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$$

Ainsi $\mathrm{div}\,\overrightarrow{W} = 0 \iff \Delta f = 0$.
Remarque.– Une réponse évitant le calcul en s'appuyant sur le formulaire est tout à fait recevable pour cette question.
g) D'après la question d), on a $\phi(x,y,z) = x^3 - 3y^2x + c$ ainsi

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 6x - 6x + 0 = 0.$$

La nullité du laplacien implique que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ est incompressible ce qui est cohérent avec les questions c) et d).

Exercice 2 [6.5 pts] – On considère le champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\overrightarrow{V}(x,y) = (x - y)\,\vec{\imath} + (x + y)\,\vec{\jmath}$$

ainsi que les deux chemins $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ donnés par

$$\gamma_1(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \qquad \text{et} \qquad \gamma_2(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$$

a) [2 pts] Calculer la circulation $\mathcal{C}_{\gamma_1}(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ le long de γ_1.
b) [1 pt] Calculer la circulation $\mathcal{C}_{\gamma_2}(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ le long de γ_2.
c) [1 pt] Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une ligne de champ de $\overrightarrow{V}$. Écrire les deux équations différentielles du premier ordre satisfaites par $x(t)$ et $y(t)$ (on ne demande pas de les résoudre).
d) [1 pt] Dire pour chacun des deux chemins γ_1 et γ_2 s'ils sont des lignes de champ de $\overrightarrow{V}$? On justifiera sa réponse.
e) [0,5pt] Déduire de la question c) que si $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ est une ligne de champ alors

$$\|\overrightarrow{\gamma}'(t)\|^2 = 2(x^2(t) + y^2(t)).$$

f) [0,5pt] Déduire des questions c) et e) que si $\gamma(t)$ est une ligne de champ alors la circulation $\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ le long de γ vaut

$$\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V}) = 2\int_I x^2(t) + y^2(t)\,dt.$$

g) [0,5pt] Calculer la circulation $\mathcal{C}_{\gamma_1}(\overrightarrow{V})$ avec la formule établie en f). Le résultat vous semble-t-il cohérent ?

Rép.– a) On a d'une part

$$\gamma_1'(t) = \big((\cos t - \sin t)e^t, (\cos t + \sin t)e^t\big)$$

et

$$\vec{V}(\gamma_1(t)) = \big((\cos t - \sin t)e^t, (\cos t + \sin t)e^t\big).$$

Ainsi

$$\langle \vec{V}(\gamma_1(t)), \vec{\gamma_1}'(t)\rangle = \big((\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2\big)\, e^{2t} = 2e^{2t}$$

et

$$\mathcal{C}_{\gamma_1}(\vec{V}) = \int_0^1 \langle \vec{V}(\gamma_2(t)), \vec{\gamma_1}'(t)\rangle dt = \int_0^1 2e^{2t}dt = \big[e^{2t}\big]_0^1 = e^2 - 1$$

b) D'autre part

$$\vec{\gamma_2}'(t) = \big((\cos t + \sin t)e^t, (\cos t - \sin t)e^t\big)$$

et

$$\vec{V}(\gamma_2(t)) = \big((\sin t - \cos t)e^t, (\cos t + \sin t)e^t\big).$$

Par conséquent

$$\langle \vec{V}(\gamma_2(t)), \vec{\gamma_2}'(t)\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\gamma_2}(\vec{V}) = 0.$$

c) L'équation des lignes de champs est donnée par $\vec{\gamma}'(t) = \vec{V}(\gamma(t))$, soit en coordonnées

$$\begin{cases} x'(t) &= & x(t) - y(t) \\ y'(t) &= & x(t) + y(t) \end{cases}$$

d) Le calcul montre que seul γ_1 satisfait aux équations des lignes de champs, autrement dit, seul γ_1 est une ligne de champ.
e) D'après les équations établies en c) on a

$$\|\vec{\gamma}'(t)\|^2 = x'^2(t) + y'^2(t) = (x(t) - y(t))^2 + (x(t) + y(t))^2 = 2x^2(t) + 2y^2(t).$$

f) L'équation des lignes de champs $\vec{\gamma}'(t) = \vec{V}(\gamma(t))$ impliquent

$$\langle \vec{V}(\gamma(t)), \vec{\gamma}'(t)\rangle = \langle \vec{\gamma}'(t), \vec{\gamma}'(t)\rangle = \|\vec{\gamma}'(t)\|^2 = 2x^2(t) + 2y^2(t)$$

d'où le résultat demandé.
g) Le chemin $\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ est une ligne de champ d'après d). Donc

$$\mathcal{C}_{\gamma_1}(\vec{V}) = 2\int_I x_1^2(t) + y_1^2(t)\, dt$$

d'après f). Or $x_1^2(t) + y_1^2(t) = e^{2t}$ et donc

$$\mathcal{C}_{\gamma_1}(\vec{V}) = \int_I 2e^{2t}\, dt = \big[e^{2t}\big]_0^1 = e^2 - 1$$

comme en a). Le résultat est donc parfaitement cohérent.

Exercice 3 [6.5 pts] – On considère la paramétrisation de la sphère S de centre O et de rayon $R = 1$ donnée par

$$f(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \quad \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi],$$

ainsi que la calotte polaire (pôle Nord)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

a) [1 pt] Faire un dessin soigneux montrant le repère standard $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, la sphère S ainsi qu'un point M sur cette sphère de coordonnées sphériques $(r = 1, \theta, \varphi)$.
b) [1 pt] Comment doit-on choisir θ et φ pour que M soit dans la calotte Σ ?
c) [1 pt] Montrer que le vecteur normal $\vec{n_f}$ au point (θ, φ) de la sphère est donné par

$$\vec{n_f}(\theta, \varphi) = \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

d) [2 pts] Calculer le flux $\Phi_\Sigma(\overrightarrow{V})$ du champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} + \sqrt{x^2+y^2}\,\vec{k}$$

au travers de la calotte Σ orientée par $\overrightarrow{n}_f$.

Indication. – Dans le calcul, on pourra utiliser le fait que $(\sin^3\theta)' = 3\cos\theta\sin^2\theta$.

e) [1.5 pt] Quel est le flux $\Phi_S(\overrightarrow{V})$ de ce même champ de vecteurs au travers de la sphère S ?

Rép.– a) Ce dessin figure dans le cours. Notez que dans cette question on ne demande pas de figurer la calotte Σ.
b) Pour assurer $z \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ il faut que $\cos\theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ autrement dit que $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Aucun condition n'est nécessaire pour φ. Au bilan, il faut donc choisir $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.
c) On a

$$\overrightarrow{n}_f = \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial\theta} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

d) Par définition, le flux de $\overrightarrow{V}$ au travers Σ est donnée par

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{V}) = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \langle \overrightarrow{n}_f(\theta,\varphi), \overrightarrow{V}(f(\theta,\varphi)) \rangle \, d\varphi d\theta.$$

Or

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}(f(\theta,\varphi)) &= -\sin\theta\sin\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath} + \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2}\,\vec{k} \\ &= -\sin\theta\sin\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath} + |\sin\theta|\,\vec{k} \\ &= -\sin\theta\sin\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath} + \sin\theta\,\vec{k} \end{aligned}$$

car $\theta \in [0,\pi]$ et par conséquent $|\sin\theta| = \sin\theta$. Le produit scalaire avec $\overrightarrow{V}$ donne

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{n}_f(\theta,\varphi), \overrightarrow{V}(f(\theta,\varphi)) \rangle &= \sin\theta \left\langle \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \cos\theta\sin^2\theta. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{V}) = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\theta\sin^2\theta d\varphi d\theta.$$

On a alors, grâce à l'indication,

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{V}) = 2\pi \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin^2\theta d\theta = 2\pi \left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}.$$

e) Il y a deux façons de traiter cette question.
Première façon.– On peut reprendre la démarche précédente et refaire les calculs en considérant non plus $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ mais $\theta \in [0,\pi]$. On a alors

$$\Phi_S(\overrightarrow{V}) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\theta\sin^2\theta d\varphi d\theta$$

et le calcul montre que $\Phi_S(\overrightarrow{V}) = 0$.
Seconde façon.– On peut aussi remarquer que $\overrightarrow{V}$ est un champ incompressible

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial z} = 0$$

et utiliser le théorème d'Ostrogadski. On obtient

$$\Phi_S(\overrightarrow{V}) = \iiint_B div\overrightarrow{V} dxdydz = 0$$

où on a noté B est la boule de centre l'origine et de rayon 1.