Leçon n°10

Géométrie vectorielle dans le plan et dans l’espace

Prérequis

- Norme euclidienne
- Composée d’applications

Niveau

- Seconde, Première S, Terminale S

Plan

- Vecteurs: définition et propriétés
- Droites et plans
- Repères du plan et de l’espace
- Applications

1- Vecteurs: définition et propriétés

- **Définition : vecteur**

Un vecteur est caractérisé par la donnée de **trois éléments** :

- une **direction**,
- un **sens**,
- et une **longueur** (appelée aussi norme).

Cas particulier: un vecteur de longueur égale à zéro est appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$.

Pour dessiner un vecteur, on choisit un point à partir duquel on trace une flèche qui a la direction, le sens et la longueur souhaités.

Pour deux points A et B de l'espace, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur qui peut se dessiner à l'aide d'une flèche joignant A et B.

1- Vecteurs: définition et propriétés

- **Définition : translation**

Soient A, B, deux points distincts de l'espace: on appelle **translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$** la transformation qui, à tout point C de l'espace, associe l'unique point D tel que $\overrightarrow{CD}$ = $\overrightarrow{AB}$.

Propriété:

$\overrightarrow{AB}$= $\overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

- **Définitions: opérations sur les vecteurs**

. **Somme de deux vecteurs** : en composant la translation de vecteur $\vec{u}$ et la translation de vecteur $\vec{v}$, on obtient une nouvelle translation.

Le vecteur qui lui est associé est appelé somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et noté $\overrightarrow{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}$ **.**

Corollaire : Relation de Chasles : Pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ **+** $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ **=** $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$**.**

. **Opposé d'un vecteur**: Soit $\vec{u}$ un vecteur. Le vecteur opposé du vecteur $\vec{u}$, noté **-** $\vec{\boldsymbol{u}}$ est l'unique vecteur tel que $\vec{u}$ + (- $\vec{u}$) = $\vec{0}$.

1- Vecteurs: définition et propriétés

. **Produit d'un vecteur par un réel :** Soit un vecteur et un nombre réel k non nul. Le vecteur noté k est défini par:

. La direction du vecteur

. Le sens du vecteur si k>0, le sens opposé si k<0,

. Une longueur égale au produit de la longueur de par la valeur absolue de k.

Propriétés : si k et k' sont deux nombres réels et et deux vecteurs, alors :

$(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ $\quad k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$ $\quad k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

$0\vec{u} = \vec{0}$ $\quad k\vec{0} = \vec{0}$

- **Définition: vecteurs colinéaires**

Deux vecteurs sont dits **colinéaires** si l'un est le produit de l'autre par un réel.

Remarque : le vecteur est colinéaire à tous les vecteurs.

2- Droites et plans

- **Définitions :**

- **Droite**

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ =k $\vec{u}$, avec k nombre réel, est appelée la **droite** d de **vecteur directeur** $\vec{u}$ et passant par A.
Remarque : Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est également un vecteur directeur de d.

- **Droites parallèles, droites sécantes, points alignés**

.Deux droites sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. (*Cas particulier*: *deux droites confondues sont parallèles).*

.Deux droites non parallèles sont **sécantes**.

.Trois points A, B, M sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

2- Droites et plans

Définitions :

- **Plan**

Soit A un point de l'espace et et deux vecteurs non colinéaires. L'ensemble des points M tels que **=k + k'** avec k et k' des réels, est appelé le **plan** engendré par et et passant par A.

Remarque : un plan possède une infinité de vecteurs directeurs.

- **Plans parallèles, plans sécants**

Deux plans engendrés par un même couple de vecteurs non colinéaires sont **parallèles**. Ils peuvent être confondus.

Deux plans non parallèles sont **sécants**.

2- Droites et plans

- **Définition: vecteurs coplanaires**

Des vecteurs de l'espace sont coplanaires s'il est possible de les représenter dans un même plan.

<u>Remarque</u>: deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires

- **Propriété : droite parallèle à un plan**

Une droite d, de vecteur directeur $\vec{w}$ est parallèle à un plan P de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

<u>Application</u> : **Théorème du toit**

Soit P et P' deux plans sécants. Si une droite d de P est parallèle à une droite d' de P', alors la droite d'intersection de P et P' est parallèle à d et d'.

3- Repères du plan et de l’espace

- **Repère du plan**

Proposition : Soient A, B, C, trois points non alignés du plan ; pour tout point M du plan, il existe un couple unique de réels x et y tels que =x + y

Définition : (A; ;) est appelé un **repère** du plan d’origine A.

Les réels x et y forment alors:

. le couple de **coordonnées** du vecteur dans ce repère,

. le couple de **coordonnées** du point M dans ce repère.

3- Repères du plan et de l’espace

- **Repère de l’espace**

Proposition : décomposition d’un vecteur de l’espace sur 3 vecteurs non coplanaires.
Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires de l’espace ; pour tout point M, il existe un ***unique*** *triplet de réels (x;y;z) tel que =x + y +z .*

Définition : un **repère (O; ;;) de l’espace** est formé :

- D’un point O origine du repère,
- D’un triplet (;;) de vecteurs non coplanaires.

Propriété : coordonnées d’un point et d’un vecteur dans l’espace
Soit (O; ;;) un repère de l’espace.

.Pour tout point M, il existe un unique triplet de réels (x;y;z) , tel que = x +y +z .

.Pour tout vecteur , il existe un unique triplet de réels (x;y;z) , tel que = x +y +z .

4- Applications

- **Obtenir une représentation paramétrique d'une droite et d'un plan :**

Une droite: Dans un repère de l'espace, la droite d passant par le point A(x_0, y_0, z_0) et de vecteur directeur (a;b;c) avec (a;b;c) non tous nuls, est l'ensemble des points de coordonnées:

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct, \text{ avec } t \text{ réel} \end{cases}$$

Ce système forme une **représentation paramétrique** de la droite d

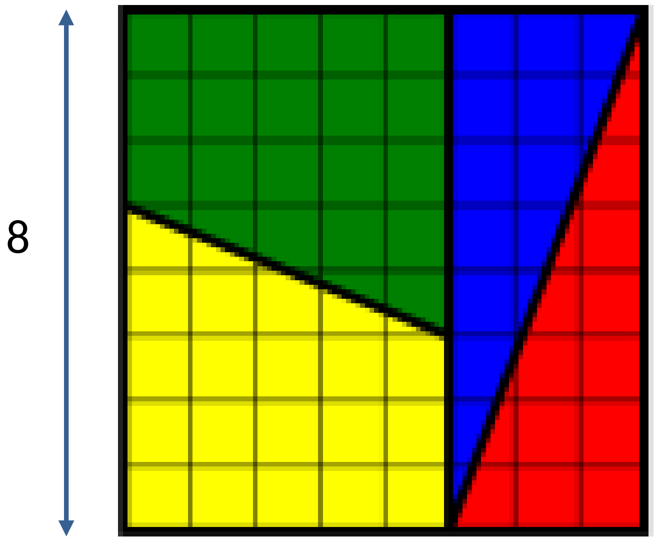
Un plan: Un point M appartient au plan P passant par le point A(x_0, y_0, z_0) et engendré par les vecteurs (a, b, c) et avec (a', b', c') non nuls, si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que: = t + t'

De la même manière on obtient une représentation paramétrique du plan P en traduisant l'égalité ci-dessus avec les coordonnées des points et vecteurs.

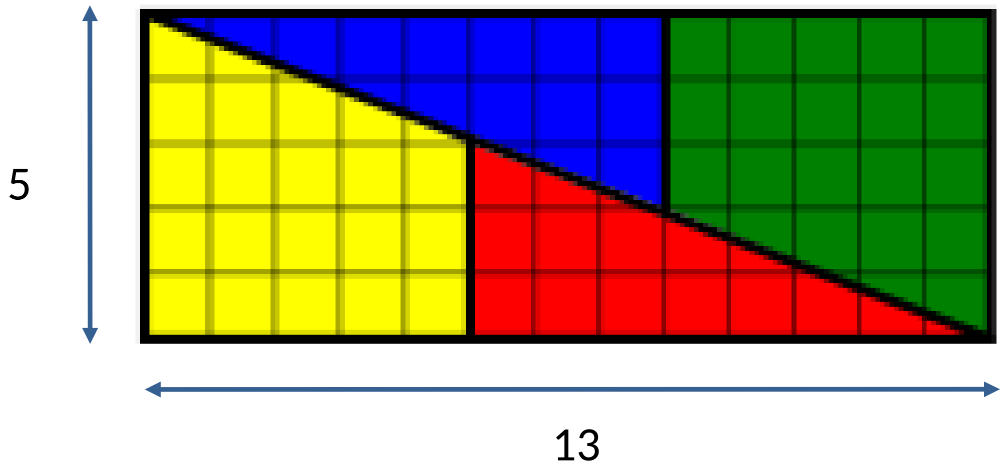
4- Applications

- **Géométrie vectorielle plane:**

Selon la disposition des pièces de ce puzzle, les figures obtenues n’ont pas les mêmes aires. Pourquoi ?



Aire de la figure = 64



Aire de la figure = 65

4- Applications

ABCD est un tétraèdre. Le point P est défini par =(1/3) +(2/3)

Montrer que les points B, P et C sont alignés.