

Leçon 15 : Solides de l'espace et volumes

Niveau : Cycle 4

Prérequis : Polygone, géométrie plane

I. Définitions usuelles

1. Solides, polyèdres, volume

Définition : Un *solide* dans l'espace est un ensemble de points situés à l'intérieur d'une partie fermée de l'espace.

Définition : Un *polyèdre* est un solide dont toutes les faces sont des polygones.
Exemples : Parallélépipède rectangle, prisme, pyramide.

Définition : L'*arête* d'un polyèdre est le segment commun de deux faces de ce polyèdre.

Définition : Le *sommet* d'un polyèdre est le point d'intersection de plusieurs arêtes de ce polyèdre.

Définition : On appelle *volume* une mesure de la portion de l'espace occupée par un solide.

2. Modes de représentation

Avec son patron \Rightarrow Un patron d'un solide est un modèle plan permettant de construire, par pliage, la surface du solide.

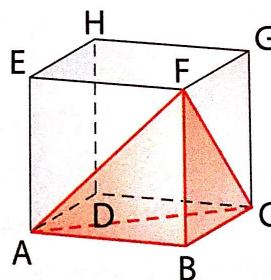
En perspective cavalière \Rightarrow La perspective cavalière est une technique de représentation des solides sur une surface plane, en donnant l'impression de volume.

- Les éléments visibles sont représentés en traits pleins, les autres en pointillés.
- Dans un plan vu de face, une figure est représentée en vraie grandeur ou à une échelle (sans changer sa forme). Dans un plan de profil, les distances sont modifiées ; les droites perpendiculaires aux plans de face sont représentés comme des obliques.
- Deux droites parallèles (respectivement sécantes) sont représentées par deux droites parallèles (resp. sécantes).
- Des points alignés sont représentés par des points alignés.
- Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.

Dans un cube régulier, les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

2 ABCDEFGH est un cube d'arête 5 cm.

1. Justifiez les égalités $AF = AC = FC$.



2. Construisez en vraie grandeur un patron de la pyramide FABC.

II. Solides usuels

1. Parallélépipède rectangle

Définition : Un *parallélépipède rectangle*, ou *pavé droit*, est un polyèdre dont toutes les faces sont rectangulaires.

Remarque : Si toutes les faces sont des carrés, on appelle ce solide, un *cube*.

Propriété : Si on note, L , l et h les dimensions de ce pavé droit, alors son volume V est :

$$V = L \times l \times h$$

Dans le cas d'un cube de côté c , on a donc $V = c \times c \times c = c^3$

2. Prisme droit et cylindre

Définition : Un *prisme droit* est un solide qui possède :

- deux polygones superposables pour faces parallèles, appelées bases ;
- des rectangles pour toutes les autres faces, appelées faces latérales.

Définition : Un *cylindre* est un solide délimité par deux bases qui sont deux disques parallèles et superposables et une surface latérale courbe.

Propriété : Le volume V d'un prisme ou d'un cylindre est donnée par la formule :

$$V = B \times h$$

où B est l'aire de la base et h la hauteur du solide.

3. Pyramides

Définition : Une *pyramide* est un solide possédant une base polygonale et dont les surfaces latérales sont des triangles. Ces faces ont toutes un sommet commun appelé le *sommet de la pyramide*.

Remarque : Une pyramide est dite *régulière* lorsque :

- sa base est un polygone régulier (carré, triangle équilatéral, ...)
- ses faces latérales sont des triangles isocèles superposables.

Définition : Un *tétraèdre* est une pyramide à base triangulaire.

Propriété : Le volume V d'une pyramide est donnée par la formule suivante :

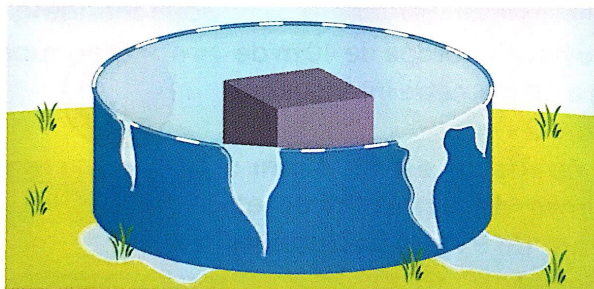
$$V = \frac{B \times h}{3}$$

où B est l'aire de la base et h la hauteur du solide.

83 Comprendre une situation

Raisonnement • Calculer • Communiquer

Une piscine pleine d'eau a la forme d'un cylindre de rayon 3,50 m et de hauteur 1,50 m. En y plongeant une caisse cubique de 1,20 m de côté, l'eau déborde.

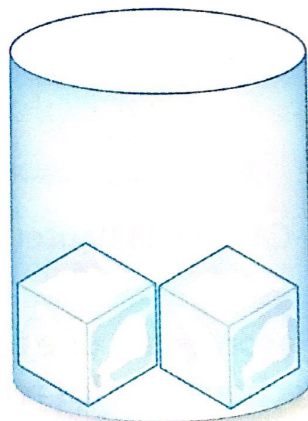


Calculer une valeur approchée au centième près de la quantité d'eau, en L, restant dans la piscine.

85 Calculer une hauteur

Modéliser • Calculer • Communiquer

Deux glaçons sont posés au fond d'un verre cylindrique de 3 cm de rayon. Les glaçons sont des cubes de 3 cm d'arête. On sait que la glace, en fondant, donne un volume d'eau égal à 90 % de celui des glaçons. Quelle est la hauteur d'eau obtenue dans le verre après la fonte des glaçons ?



III. Solides de révolution

1. Définition

Définition : Un *solide de révolution* est un solide engendré par une surface plane fermée tournant autour d'un axe.

2. Boule et sphère

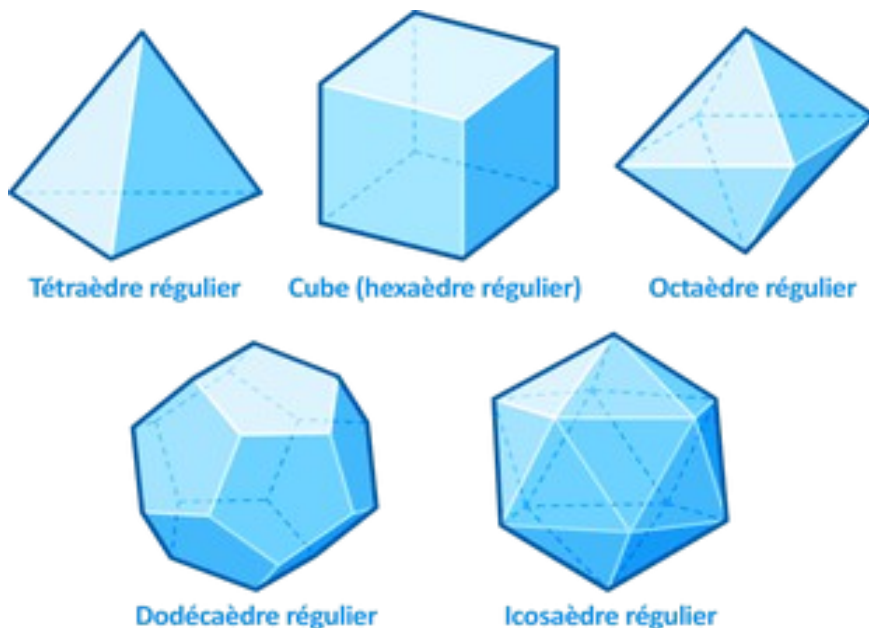
Définition : Une *boule* de centre O et de rayon r est un solide constitué de tous les points situés à une distance inférieure ou égale au rayon r. Une *sphère* de centre O et de rayon r est un solide constitué de tous les points situés à une distance égale au rayon r.

Propriété : Le volume V d'une boule ou d'une sphère de centre O et de rayon r est donné par la formule suivante :

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

IV. Solide de Platon

Définition : Un *solide de Platon* est un polyèdre régulier dont toutes les faces sont des polygones réguliers. Exemples :



Exercice :

1. Indiquer pour chacun le nom du polygone qui compose ses faces.
2. A l'aide de la figure, donner pour chacun le nombre de faces. Justifier le nom donné à chacun.
3. Dessiner un patron de l'octaèdre.
4. Pour chacun de ces cinq solides, calculer le nombre $s+f-a$ où s est le nombre de sommets, f le nombre de faces et a le nombre d'arêtes.
5. Choisir 3 solides de Platon et faire leurs patrons.