Leçon n°17 : Produit scalaire

Présentation : Célia Giraudeau

Questions : Léon Habert

Lundi 5 Mars 2018

Prérequis

Géométrie plane et dans l’espace

Angles

Vecteurs

Repère orthonormé

On note E un espace vectoriel de dimension 2 ou 3.

La présentation est pour un niveau de cycle Terminal scientifique.

Plan

I) Définitions et expressions du produit scalaire

A) Définition avec les normes

B) Expression analytique et propriétés

C) Expression par les projetés orthogonaux

D) Expression en fonction de la norme et d’un angle

II) Applications :

A) Détermination équation cartésienne d’une droite/ d’un plan

B) Détermination équation d’un cercle

C) Formules d’addition du cosinus et du sinus

D) Autres théorèmes

I) Définitions et expressions du produit scalaire

A) Définition avec les normes

<u>Définition:</u> On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartenant à E, le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par:

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

<u>Remarques:</u> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartenant à E.

Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, que l'on note $\vec{u}^2$.

Le nombre $\vec{u}^2$ est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.

Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

I) Définitions et expressions du produit scalaire

B) Expression analytique et propriétés

Théorème: Expression dans le plan

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un repère orthonormé dans le plan tel que:

$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\vec{j}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Théorème: Expression dans l'espace

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, un repère orthonormé tel que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

I) Définitions et expressions du produit scalaire
B) Expression analytique et propriétés

<u>Règles de calcul:</u>

1) $\forall \vec{u} \; et \; \vec{v} \in E, \vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

2) $\forall \; \vec{u}, \vec{u}' et \; \vec{v} \in E, \forall \; \lambda \in R, (\vec{u} + \lambda\vec{u}').\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + \lambda\vec{u}'.\vec{v}$

<u>Définition:</u> Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit orthogonaux si $\vec{u}.\vec{v}$ =0.

On note $\vec{u}$ _|_ $\vec{v}$.

<u>Théorème:</u> Soit A, B et C trois points non-alignés. ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

I) Définitions et expressions du produit scalaire

B) Expression analytique et propriétés

Remarque:

Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout autre vecteur de E.

Propriétés: Identités remarquables

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs qui appartiennent à E, alors:

1) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

2) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

3) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

I) Définitions et expressions du produit scalaire

C) Expression par les projetés orthogonaux

Théorème:

Soient A et B deux points distincts.

1) Si H est le projeté orthogonal du point C sur (AB), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

2) Si M’ et N’ sont les projetés orthogonaux des points M et N sur (AB), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{M'N'}$

I) Définitions et expressions du produit scalaire

D) Expression en fonction de la norme et d'un angle

Théorème:

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de E non nuls, alors on peut exprimer le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la manière suivante:

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\; cos\,(\vec{u},\vec{v})$$

Propriétés:

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires de E non nuls,

1) Si ils sont de même sens, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$
2) Si ils sont de sens contraires, $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

II) Applications

A) Détermination équation cartésienne d'une droite/d'un plan

Définition :

On appel vecteur normal à une droite (d) tout vecteur non nul orthogonale à un vecteur directeur de (d).

Propriétés :

1) Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

2) Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Propriété :

Dans un repère orthonormé si un vecteur non nul $\vec{n}\ (\mathbf{a}; \mathbf{b})$ est normal à la droite (d), alors (d) a une équation de la forme ax+by+c=0.

II) Applications

A) Détermination équation cartésienne d'une droite/d'un plan

<u>Définition :</u>

Une droite (d) est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à toute les droites de P

<u>Propriété :</u>

Si une droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan P, alors d est orthogonale au plan P

<u>Définition :</u>

Soit P un plan, on appelle vecteur normale à P, tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à P

II) Applications

A) Détermination équation cartésienne d'une droite/d'un plan

<u>Propriétés :</u>

1) Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

2)Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

<u>Propriété :</u>

Dans un repère orthonormé si un vecteur non nul $\vec{n}\,(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ est normal à un plan P, alors P a une équation de la forme ax+by+cz+d=0.

II) Applications

A) Détermination équation cartésienne d'une droite/d'un plan

79 On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives :

$$2x - 4y + 3z + 5 = 0 \quad \text{et} \quad x - 2y + 3z - 2 = 0.$$

1 Vérifier que (P) et (Q) ne sont pas parallèles.

2 Déterminer un système d'équations paramétriques de leur intersection $\mathscr{D}$.

3 Former une équation cartésienne du plan (R) passant par $A(2\,;-2\,;0)$ et perpendiculaire à (P) et à (Q).

Ex 79 p313 déclic TS 2012

II) Applications

B) Détermination équation de cercle

Propriétés:

Dans un repère orthonormé du plan :

- le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon r a pour équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$;
- le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Propriété :

Dans un repère du plan tout cercle a une équation de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$ (a,b,c réels)

Exercice: Pour les équations suivantes, dire si ce sont des équations correspondant à une équation de cercle. Si oui, donner le rayon et les coordonnées du centre du cercle.

a) $x^2 + y^2 - 2x + y - 5 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$; c) $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6y + 7 = 0$.

II) Applications

C) Formules d'addition du cosinus et du sinus

Propriétés:

Soit a et b deux réels.

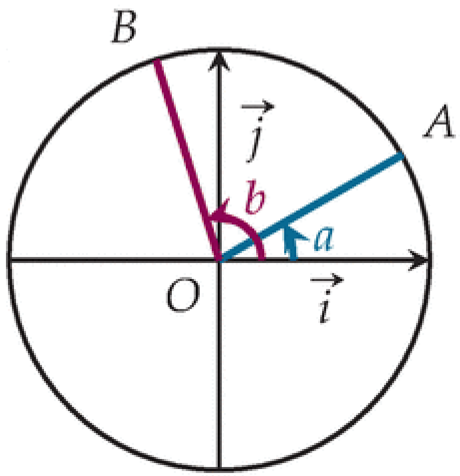
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Exercice:

1/ Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2/Exprimer $\overrightarrow{OA}.\,\overrightarrow{OB}$ sous forme analytique.

3/En déduire la formule de cos(a-b).



II) Applications

D) Autres théorèmes

Théorème de Pythagore généralisé ou Formule d'Al-Kashi:

ABC est un triangle quelconque.
Selon l'usage, on pose BC = a, AC = b et AB = c.
Les angles de sommets respectifs A, B et C sont notés $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

1 ABC est un triangle quelconque. Avec les notations usuelles :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Théorème de la médiane:

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.

Pour tout M du plan, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.