Leçon 18 : Proportionnalité et géométrie

Niveau : Cycle 4

Prérequis : Théorème des milieux, sommes des angles d'un triangle, angles alternes internes

Plan :
1. Agrandissements / réductions et homothéties
2. Triangles semblables
3. Théorème de Thalès
4. Exercices d'application

1. Agrandissements / réductions et homothéties

1.1. Agrandissements / réductions

Définition 1 (d'un agrandissement et d'une réduction)

Lorsque l'on multiplie par un nombre $k > 0$ toutes les longueurs d'une figure F, on obtient une figure F' qui est :
- un agrandissement de F si $k > 1$
- une réduction de F si $0 < k < 1$

Le nombre k est appelé le facteur d'agrandissement ou de réduction.

Propriété 2 (Propriétés d'un agrandissement/réduction)

- les mesures d'angles sont conservées
- les droites parallèles restent parallèles
- les droites perpendiculaires restent perpendiculaires
- les aires sont multipliés par k^2
- les volumes sont multipliés par k^3

1.2. Homothéties

Définition 3 (d'une homothétie)

L'image d'un point M par l'homothétie de centre O et de rapport k positif est le point M' tel que :
- M' appartient à la demi-droite [OM)
- $OM' = k * OM$
- Dans le cas où $k < 0$, on construit l'image M_1 de M par l'homothétie de centre O et de rapport $|k|$, puis on construit le symétrique M_2 de M_1 par rapport à O.

Remarque 4

Dans le cas où $k = 1$, les images sont confondues avec les points de départs.

Propriété 5 (Propriétés d'une homothétie)

On considère une homothétie de rapport k et de centre O, une figure F_1 et F_2 l'image de F_1 par cette homothétie :

- L'homothétie conserve l'alignement, les milieux et la mesure des angles.
- Les longueurs sont multipliées par $|k|$
- Les aires sont multipliées par k^2
- Si $|k| > 1$, F_2 est un agrandissement de F_1
- Si $0 < |k| < 1$, F_2 est une réduction de F_1

2. Triangles semblables

Définition 6 (de triangles semblables)

On appelle triangles semblables des triangles qui ont des angles deux à deux égaux.

Remarque 7

Dans la pratique, pour montrer que deux triangles sont semblables, il suffit de s'assurer que deux couples d'angles sont égaux deux à deux.

Propriété 8

- Si deux triangles sont semblables, alors les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels de rapport k, appelé le rapport de similitude.
- Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, alors ils sont semblables.

Propriété 9 (Triangles égaux)

Si deux triangles sont semblables et qu'un côté du premier triangle est égal au côté correspondant du deuxième triangle, alors les triangles sont égaux. **(dessin)**

Propriété 10 (Triangles égaux)

Deux triangles sont égaux s'ils ont deux couples de côtés de même longueur et les angles entre ces deux côtés égaux. **(dessin)**

Propriété 11 (Aire de triangles semblables)

Si k est le rapport de similitude du triangle ABC au triangle semblable A'B'C', alors l'aire du triangle A'B'C' est égale à k^2 fois l'aire du triangle ABC.

3. Théorème de Thalès

Théorème 12 (Théorème de Thalès – 1ère version)

Étant donné deux droites sécantes coupées toutes deux par deux droites parallèles (de telle façon que l'on ait deux triangles), alors le plus grand triangle est un agrandissement du plus petit.

Théorème 13 (Théorème de Thalès - forme usuelle)

Si A,B,C,D et E sont cinq points tels que :

- les points A,B et D d'une part et A, C et E d'autre part sont alignés
- les droites (BC) et (DE) sont parallèles

alors : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$

Propriété 14 (d'une homothétie d'un segment)

On considère A, B et O trois points du plan et k un nombre positif. Si les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par l'homothétie de centre O et de rapport k alors :

- A'B' = k * AB
- (AB) // (A'B')

Théorème 15 (Réciproque du théorème de Thalès – 1ère version)

Étant données deux droites sécantes coupées par deux droites d et d' (de telle façon que l'on ait deux triangles). Si le plus grand triangle est un agrandissement du plus petit alors d et d' sont parallèles.

Théorème 16 (Réciproque du théorème de Thalès – version usuelle)

On considère un triangle ABC.
Si une droite coupe (AB) en D et (AC) en E, telle que :

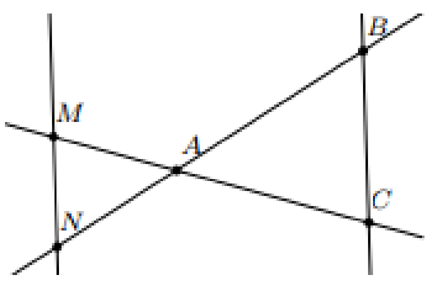
- Les points A,D,B et A,E,C sont dans le même ordre
- L'une des égalités suivantes est respectée : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$

Alors les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

4. Exercices d'application

Exercice 1 : Découper un segment donné en 3 morceaux égaux en utilisant uniquement la règle et le compas. Justifier que ces trois morceaux sont bien égaux.

Exercice 2 :



Sur la figure ci-contre, les points C, A et M sont alignés dans cet ordre, ainsi que les points B, A et N.
Le triangle ABC est un agrandissement du triangle ANM.

Montrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.