Leçon 19 : Problèmes de construction géométrique

Pré requis : géométrie du triangle, angles, vecteur, nombres complexes

Niveau : fin de cycle 4 et terminale S

I. Construction géométrique à l'aide des propriétés du triangle
II. Construction de solides
III. Construction à l'aide de la géométrie vectorielle
IV. Construction et nombres complexes.

I. Construction à l'aide des propriétés du triangle

1. Autour du triangle rectangle

Propriété (Inégalité triangulaire) : Dans un triangle, la longueur de n'importe quel côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés

Théorème de Pythagore : Soit un triangle ABC. Si le triangle est rectangle en A, alors $BC^2=AB^2+AC^2$

Propriété : Si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit.

Construction 1 : Soit BC un segment de milieu O. Tracer le triangle rectangle d'hypoténuse BC, uniquement avec un compas.

I. Construction à l'aide des propriétés du triangle
2. Théorème de Thalès

Théorème de Thalès : ABC un triangle. Si M appartient à (AB) et N à (AC) et si (AB)//(MN)
Alors AB/AM=AC/AN=BC/MN

Construction 2 : Soit 2 trapèzes TRAP et TREZ de même base [TR] et I le milieu de [AP]. Trouver uniquement avec la règle graduée le milieu de [EZ]

Construction 3 : Diviser un segment en 3 segments de même mesure uniquement avec le compas et la règle non graduée

II. Construction d'un solide

Définition : Un patron d'un solide est une figure plane qui permet de fabriquer ce solide par pliage

Construction : Construire le patron d'un cylindre de révolution de hauteur 5 cm avec une base : un disque de rayon 2,5 cm.

III. Construction géométrique et vecteurs

Propriété : Soit 2 vecteurs Vec(AB) et Vec (AD) avec B et D deux points disctincts. Le point C tel que Vec(AC)=Vec(AB) + Vec (AD) est le 4e sommet du parallélogramme ABCD.

Construction 4 : On se munit d'un repère orthonormé (O,I,J) Vec (AB) a pour coordonées (1 ;2) et (AD) a pour coordonnées (3;5). Construire le parallélogramme ABCD.

Définition : Deux vecteurs non nul u et v sont dits colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que Vec(u)=k Vec(v)

Définition : Soit A un point du plan et v un vecteur non nul. La droite D passant par A et de vecteur directeur v est l'ensemble des points M tels qu'il existe un réel k : Vec(AM) = k Vec (u)

Construction 5 : Soit T un triangle quelconque (non équilatéral), peut on construire une droite qui passe par l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit de T ?

105 Droite d'Euler

On considère un triangle ABC et on appelle A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.
Le point G est le centre de gravité du triangle ABC.

1 Réaliser une figure **à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique**.
Construire les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$.
Conjecturer un lien entre ces vecteurs (on déplacera les points A, B et C pour confirmer la conjecture).

➔ Voir la fiche **Geogebra**, page 392.

2 Démonstrations

a. Soit M le point défini par :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{OA'}$.
En déduire que le point M appartient à la hauteur du triangle ABC issue de A.
Démontrer que les points M et H sont confondus.

b. Démontrer que :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}),$$

puis que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}$.

c. Démontrer la conjecture émise à la question **1**.

III. Construction géométrique et vecteurs

Définition : Une translation de vecteur u est une transformation du plan qui à M associe M' tel que Vec(OM')=Vec(OM)+ Vec(u)

Définition : Une frise est constituée d'un motif qui est reproduit dans une seule direction par translation.

Propriété : L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle.

Construction 6 : Construire une frise avec pour motif un triangle équilatéral de côté 5 cm et une translation de vecteur de coordonnées (7,0).

IV. L'outils des nombres complexes

Définition : On appelle plan complexe le plan muni d'un repère orthonormé (O, Vec(u), Vec(v)). A tout nombre complexe z=x+iy, on associe le point M(x,y). On dit que M est le point image de z et que z est l'affixe du point M. On note M(z).

Propriété et définition : Soit z un nombre complexe non nul, r un réel strictement positif et theta un réel :

r=|z| arg(z)= theta [2pi]
z=r(cos(theta)+isin(theta)) et appelée forme trigonométrique de z.

Définition : Pour tout theta réel, exp(i theta)= cos(theta)+isin(theta)

Propriété et définition : Tout nombre complexe z s'écrit sous la forme :

z=rexp(i theta)

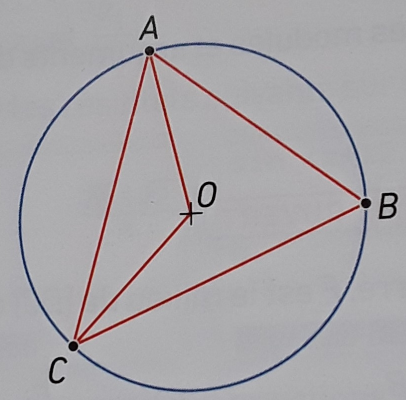
On appelle cette écriture forme exponentielle de z.

IV. L'outils des nombres complexes

Construction 7 : A quelle condition, peut on construire un cercle qui passe par 4 points disctincts.

1. Soient quatre points d'affixes respectives a, b, c et d.
Dans cette question, on veut montrer que A, B, C et D sont cocycliques (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même cercle) ou alignés si et seulement si $\dfrac{b-a}{b-c} \times \dfrac{d-c}{d-a} \in \mathbb{R}$.

a. Rappeler l'égalité qui lie l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ à l'angle $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$, où O est le centre du cercle circonscrit à ABC.



b. En déduire que quatre points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) \quad (\pi).$$

c. Montrer, en utilisant les résultats précédents, que : quatre points A, B, C et D deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c et d sont cocycliques ou alignés si et seulement si $\dfrac{b-a}{b-c} \times \dfrac{d-c}{d-a} \in \mathbb{R}$.

Construction8 : Construire un pentagone régulier

de u ?

78 **Pentagone régulier**

On considère le nombre complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et l'équation (E) $z^5 = 1$.

1. a. Si z est solution de l'équation (E), quelle est la valeur de $|z|$?

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, ω^n est solution de (E).

c. Soit n un entier naturel.
Comparer ω^{n+5} et ω^n.

2. a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^5 - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4).$$

b. En déduire la valeur de $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.

3. On pose $u = \omega + \overline{\omega}$ et $v = \omega^2 + \overline{\omega}^2$.

a. Montrer que $u + v = -1$ et $uv = -1$.

b. Calculer les valeurs de u et v puis en déduire que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle Ω_0 le point d'affixe 1, J le point d'affixe i et M le point d'affixe $-\frac{1}{2}$.

a. Placer les points Ω_0, J et M dans le repère.

b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre M passant par J.
Calculer l'affixe du point d'intersection N du cercle $\mathscr{C}$ avec la demi-droite $[O\Omega_0)$.

c. Construire à la règle et au compas les points Ω_1, Ω_2, Ω_3 et Ω_4 d'affixes respectives ω, ω^2, ω^3 et ω^4, puis tracer le pentagone régulier $\Omega_0\Omega_1\Omega_2\Omega_4\Omega_5$.