Leçon n°20 : Problèmes d'alignement, de parallélisme ou d'intersection

Niveaux : de la 6ème à la terminale

Pré-requis : Définitions du point, de la droite, du plan, des vecteurs, du repère orthonormé, du parallélisme, de la perpendicularité, de médiatrice. Représentation en perspective cavalière

Plan

I. Problèmes d'alignement
  1. Dans le plan
     a) En 6ème et 5ème
     b) En 3ème
     c) En seconde et 1ère
  2. Dans l'espace
     a) En seconde
     b) En terminale

II. Problèmes de parallélisme
  1. Dans le plan
     a) En 6ème et 5ème
     b) En 4ème et 3ème
     c) En 3ème
     d) En seconde et 1ère
  2. Dans l'espace
     a) En seconde
     b) En terminale

III. Problèmes d'intersection
  1. Dans le plan
     a) En 5ème
     b) En seconde et 1ère
  2. Dans l'espace
     a) En 3ème
     b) En seconde
     c) En terminale

I. Problèmes d'alignement

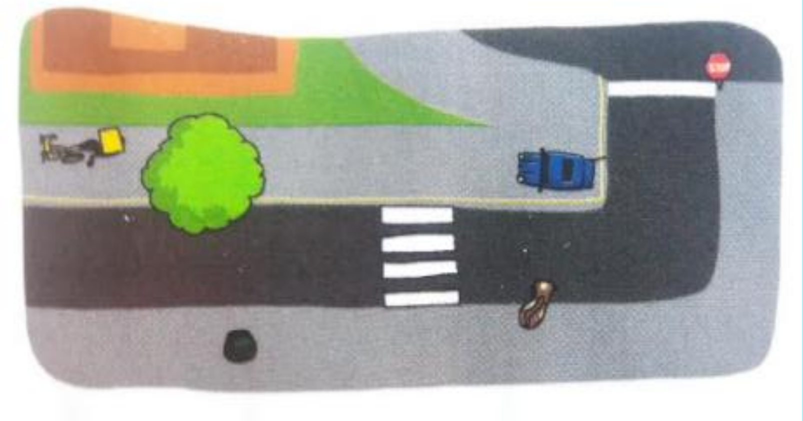
1. Dans le plan

a) En 6ème et 5ème

- <u>Définition :</u>
  On dit que des points sont alignés si on peut tracer une droite passant par chacun des points.

- <u>Problème :</u>

Je peux voir l'arbre, la poubelle, le chat, la voiture et le passage piéton.
Par contre je ne vois pas le panneau stop et le vélo du facteur.
Où suis-je ?



I. Problèmes d'alignement

1. Dans le plan

b) En $3^{ème}$

- <u>Définition :</u>
  Pour deux nombres a et b donnés, une fonction affine est une fonction qui à un nombre x associe le nombre ax+b.
  a est le coefficient directeur de la fonction
- <u>Propriété :</u>
  La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.
- <u>Propriété :</u>
  Un point appartient à la droite représentative d'une fonction affine f si et seulement si ses coordonnées vérifient (x;f(x)).

- <u>Problème :</u>

I. Problèmes d'alignement

1. Dans le plan

c) En seconde et 1ère

- <u>Définition :</u>
  On dit que deux vecteurs sont colinéaires s'il existe un réel tel que l'un soit le produit de l'autre par ce réel.
- <u>Propriété :</u>
  Dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est-à-dire xy'=x'y.
- <u>Propriété :</u>
  Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

- <u>Problème :</u>

I. Problèmes d'alignement

2. Dans l'espace

a) En seconde

- Propriété :
  Si deux droites sont parallèles dans la réalité, alors elles sont représentées par les droites parallèles en perspective cavalière.
  Si des points sont alignés dans la réalité, alors ils sont représentées par les points alignés en perspective cavalière.
  La perspective cavalière conserve les proportions.
- Remarques :
  Si deux droites sont parallèles en perspective cavalière, elles ne sont pas forcément parallèles dans la réalité.
  Si des points sont alignés en perspective cavalière, ils ne sont pas forcément alignés dans la réalité.

I. Problèmes d'alignement

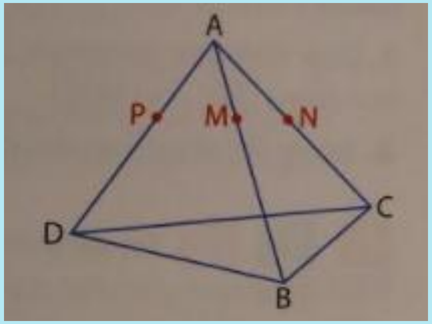
2. Dans l'espace

a) En seconde

- <u>Définition :</u>
  Des droites sont coplanaires si elles sont contenues dans le même plan.
- <u>Propriété :</u>
  Deux droites non-coplanaires n'ont aucun point d'intersection.

- <u>Problème :</u>

**Les points M, N et P appartiennent respectivement aux arêtes [AB], [AC] et [AD] d'un tétraèdre ABCD.
Les points M, N et P sont-ils alignés ?**



I. Problèmes d'alignement

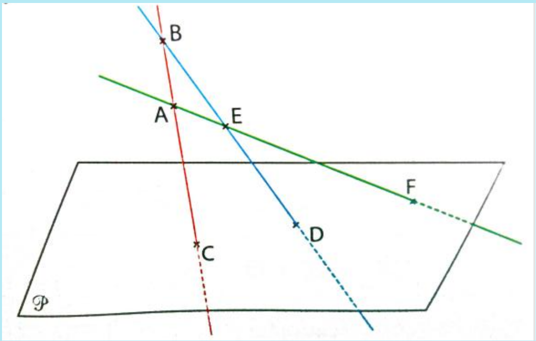
2. Dans l'espace

b) En terminale

- Propriété :
  L'intersection de deux plans sécants est une droite.

- Problème :

Les droites (AB) , (BE) et (AE) coupent un plan P respectivement en C, D et F.



Montrer que les points C, D et F sont alignés.

II. Problèmes de parallélisme

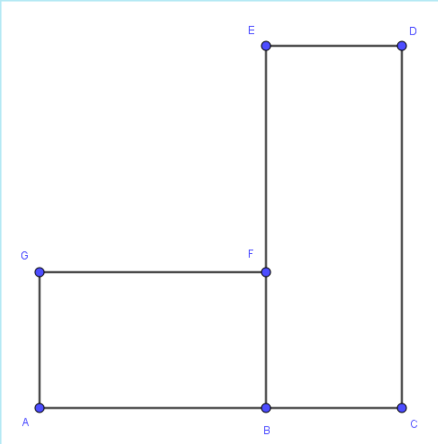
1. Dans le plan

a) En 6ème et 5ème

- Propriété :
  Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.
- Propriété :
  Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

- Problème :

ABFG et BCDE sont des rectangles.
Montrer que les droites (GF) et (ED) sont parallèles.



II. Problèmes de parallélisme

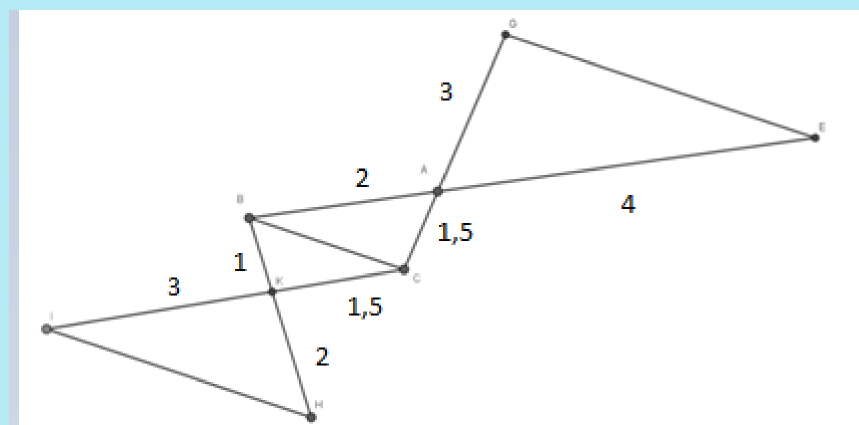
1. Dans le plan

b) En $4^{ème}$ et $3^{ème}$

- <u>Propriété :</u>
  Réciproque du théorème de Thalès
  Si les points A, B et M et les points A, C et N sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
  Alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

- <u>Problème :</u>

Montrer que les droites (GE) et (IH) sont parallèles.



II. Problèmes de parallélisme

1. Dans le plan

c) En 3ème

- <u>Propriété :</u>
  Si deux droites représentatives de fonctions affines ont le même coefficient directeur, alors elles sont parallèles entre elles.
- <u>Propriété :</u>
  Si une droite passe par deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors le coefficient directeur de la droite est égale à $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$
- <u>Problème :</u>

Parmi les fonctions affines suivantes, quelles droites représentatives seront parallèles ?
f(x)=4x-1,5
g(x)=-6x+2
h(x)=7
i est la fonction affine qui passe par les points A(0;-8) et B(2;0)
j est la fonction affine qui passe par les points C(9;5) et D(-3;5)
k est la fonction affine qui passe par les points E(1;7) et F(3;-5)

II. Problèmes de parallélisme

1. Dans le plan

d) En seconde et 1ère

- Définition :
  Un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d s'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
- Propriété :
  Deux droites sont parallèles si et seulement si les vecteurs directeurs de ces droites sont colinéaires.

- Problème :

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A. Les points I et J sont définis tels

que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

Montrer que les droites (IJ) e (BC) sont parallèles.

II. Problèmes de parallélisme

2. Dans l'espace

a) En seconde

- <u>Définition :</u>
  On dit que deux plans sont parallèles s'ils sont confondus ou s'ils n'ont aucun point commun.
- <u>Définition :</u>
  On dit qu'un plan et une droite sont parallèles si la droite est contenue dans le plan ou s'ils n'ont aucun point en commun.
- <u>Propriété :</u>
  Une droite d est parallèle à un plan si et seulement s'il existe une droite du plan parallèle à d.
- <u>Propriété :</u> (Théorème du toit)
  Si deux droites d et d' sont parallèles telles que d soit contenue dans un plan P, d' soit contenue dans un plan P' et que P et P' soient sécants,
  Alors la droite d'intersection de P et P' est parallèle à d et d'.

II. Problèmes de parallélisme

2. Dans l'espace

a) En seconde

- Propriété :
  Si un plan P contient deux droites sécantes qui sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan P',
  Alors P et P' sont parallèles.
- Propriété :
  Si deux plans sont parallèles à un même troisième plan,
  Alors ils sont parallèles entre eux.
- Propriété :
  Si P et P' sont des plans parallèles et P et P'' sont des plans sécants, alors P' et P'' sont sécants et les droites d'intersection du plan P'' avec les plans P et P' sont parallèles.

- Problème :

II. Problèmes de parallélisme

2. Dans l'espace

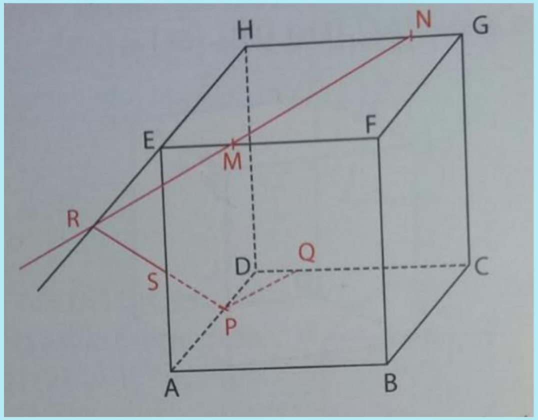
b) En terminale

- Propriété :
  Si une droite d et un plan P sont parallèles,
  Alors tout plan contenant d et sécant à P, coupe P selon une droite parallèle à d.

- Problème :

Soient ABCDEFGH un cube et M, N et P des points appartenant respectivement à [EF], [GH] et [AD].
Soit Q le point de (CD) tel que (PQ) soit l'intersection des plans (MNP) et (BCD).
Soit R le point d'intersection des droites (EH) et (MN).
Soit S le point d'intersection de (RP) et (AE).

1. **Montrer que (MN) et (PQ) sont parallèles.**
2. **Montrer que (MS) et (NQ) sont parallèles.**



III. Problèmes d'intersection

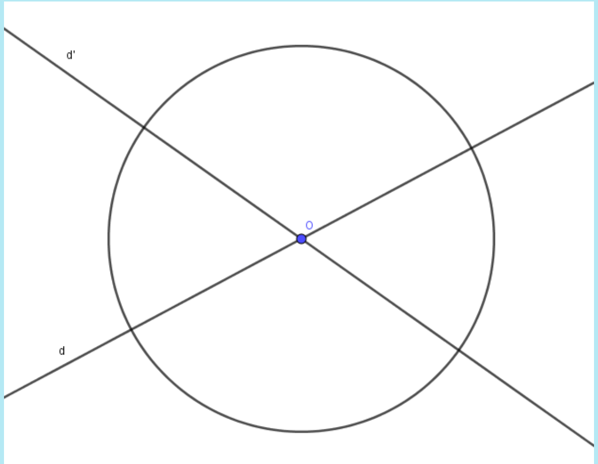
1. Dans le plan

a) En 5ème

- Propriété :
  Les médiatrices d'un triangle se coupent en un même point. Ce point est le centre du cercle circonscrit : le cercle qui passe par tous les sommets du triangle.

- Problème :

Construire le triangle ABC sachant que le cercle de centre O est le cercle circonscrit de ABC et que les droites d et d' sont les médiatrices respectives des segments [AB] et [BC].



III. Problèmes d'intersection

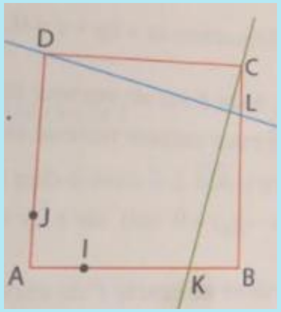
1. Dans le plan

b) En seconde et 1ère

- Définition :
  Dans un repère orthonormé, le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le réel xx'+yy'.
- Propriété :
  Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si l'un des deux est nul ou si les droites qu'ils dirigent sont perpendiculaires.
- Propriété :
  Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

- Problème :

Soit ABCD un carré de côté 4.
Soients K et L tels que $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{BL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$
Montrer que (KC) et (DL) sont orthogonales.



III. Problèmes d'intersection

2. Dans l'espace

a) En 3ème

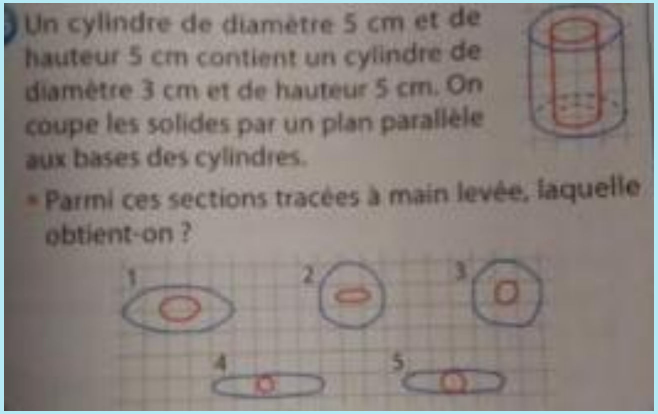
- <u>Propriété :</u>
  La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à l'une de ses faces est un rectangle de mêmes dimensions que cette face.
  La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à l'une de ses arêtes est un rectangle.
- <u>Propriété :</u>
  La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'une de ses bases est un cercle de même rayon que la base.
  La section d'un cylindre par un plan perpendiculaire à l'une de ses bases est un rectangle dont l'une des dimensions est la hauteur du cylindre.
- <u>Propriété :</u>
  La section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base est une réduction de la base.
- <u>Propriété :</u>
  La section d'une sphère par un plan est un cercle ou un point si le plan est tangent à la sphère.

III. Problèmes d'intersection

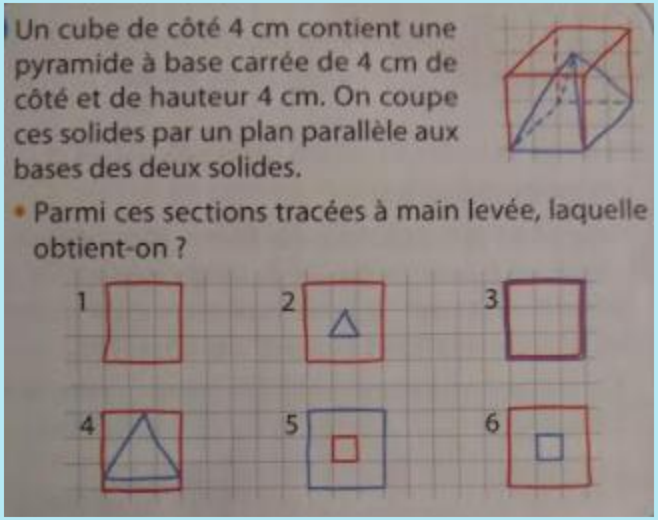
2. Dans l'espace

a) En $3^{ème}$

- <u>Problème :</u>


Un cylindre de diamètre 5 cm et de hauteur 5 cm contient un cylindre de diamètre 3 cm et de hauteur 5 cm. On coupe les solides par un plan parallèle aux bases des cylindres.

• Parmi ces sections tracées à main levée, laquelle obtient-on ?


Un cube de côté 4 cm contient une pyramide à base carrée de 4 cm de côté et de hauteur 4 cm. On coupe ces solides par un plan parallèle aux bases des deux solides.

• Parmi ces sections tracées à main levée, laquelle obtient-on ?

III. Problèmes d'intersection

2. Dans l'espace

b) En seconde

- <u>Propriété :</u>
  Deux droites coplanaires sont soit sécantes, soit parallèles.
- <u>Propriété :</u>
  L'intersection de deux plans sécants est une droite.
- <u>Propriété :</u>
  Si une droite et un plan sont sécants, alors leur intersection est réduit à un point.

- <u>Problème :</u>

III. Problèmes d'intersection

2. Dans l'espace

c) En terminale

- <u>Définition :</u>
  Deux droites sont dites orthogonales si leurs parallèles menées d'un point quelconque sont perpendiculaires.
- <u>Définition :</u>
  Une droite d et un plan P sont orthogonaux s'il existe deux droites sécantes du plan P orthogonales à la droite d.
- <u>Propriété :</u>
  Si une droite es orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toues les droites du plan.
- <u>Propriété :</u>
  Deux droites sont parallèles si et seulement si tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- <u>Propriété :</u>
  Deux plans sont parallèles si et seulement si toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

III. Problèmes d'intersection

2. Dans l'espace

c) En terminale

- <u>Problème :</u>

Soit ABCDEFGH un cube.
Soit M un point de (AD).
Montrer que GCM est rectangle.