Leçon n°8 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe. Applications

Niveau : Terminale S
Pré-requis : équations du second degré dans R. Trigonométrie dans R. Vecteurs.

Plan :

I. Forme algébrique d'un nombre complexe
   1. Théorème et définition
   2. Conjugué d'un nombre complexe
   3. Représentation dans le plan complexe
   4. Equations du second degré dans C

II. Forme trigonométrique d'un nombre complexe
   1. Module et argument
   2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe
   3. notation exponentielle de la forme trigonométrique

III. Applications
   1. Applications à la trigonométrie
   2. Applications à la géométrie

I. Forme algébrique d'un nombre complexe

1°) Théorème et définition

Théorème (admis) et définition

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés les **nombres complexes**, tel que :
- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;
- les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $i^2 = -1$;
- tout nombre complexe z peut s'écrire de manière unique sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont deux réels.

<u>Exemple</u> : z = 3 – 2i est un nombre complexe.

Définitions

Soit $z \in \mathbb{C}$.
- L'écriture $z = x + iy$, avec x et y réels, est appelée **forme algébrique** de z.
- x est la **partie réelle** de z et y est la **partie imaginaire** de z.

On note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

<u>Exemple</u> : z = 3 – 2i → 3 est la partie réelle et -2 est la partie imaginaire.

<u>Remarques :</u>
- z est un réel si et seulement si Im(z)=0
- z est un imaginaire pur si et seulement si Re(z)=0.
- Comme la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. En particulier, x+ iy = 0 ssi x=0 et y=0.

Exercice:
Résoudre dans C les équations suivantes : 1. 2z+ i = 2-i 2. 3z +1 -2i = 4 – 3i -2z

2°) Conjugué d'un nombre complexe

a) Définition

Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$, avec x et y réels.
On appelle **conjugué de z**, et on note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = x - iy$.

Exemple : z = 3 – 2i d'où $\overline{z} = \overline{3-2i} = 3 + 2i$.

b) Propriétés sur le conjugué

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$.
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$.
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$.

- Démonstrations des propriétés -

Exercice:
Ecrire les conjugués des nombres suivants sous forme algébrique.
1. -2 +3i 2. i(2-5i) 3. (1- i)/2i

3°) Représentation dans le plan complexe

a) Affixe d'un point

Définition

On appelle **plan complexe** le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
À tout nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, on associe le point $M(x ; y)$.
On dit que M est le **point image** de z et que z est l'**affixe** du point M, et on note $M(z)$.

Exemples :
Le point M d'affixe 3+i a pour coordonnées (3; 1).
Le point N d'affixe -1 -i a pour coordonné (-1; -1).

Propriété

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

- Démonstration -

Exercice:
Dans le plan complexe, on considère les points A(1-3i), B(5+2i) et C(4-4i). Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

b) affixe d'un vecteur

Définition

À tout nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, on associe le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le plan complexe.
On dit que $\vec{w}$ est le **vecteur image** de z et que z est l'**affixe** du vecteur $\vec{w}$, et on note $\vec{w}(z)$.

Exemple :
Le vecteur OM d'affixe 3+i a pour coordonnés (3 1)
Le vecteur PN d'affixe 1-2i a pour coordonnés (1 -2)

Propriétés

- Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
$\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$.
Le point M a pour affixe z si et seulement si $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z.
- Soient $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z'.
$\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$ et, pour tout réel k, $k\vec{w}$ a pour affixe kz.

- Démonstration -

Exercice: Montrer que les points A(-2i), B(-2-5i) et C(4+4i) sont alignés.

4°) Equations du Second degré dans C

a) Equation du type $az^2+bz+c = 0$

Propriété

Soient a, b et c trois réels, $a \neq 0$.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution réelle : $z = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

- Démonstration -

Exercice :
Résoudre dans C les équations suivantes :
1. $z^2+ 3z +4 = 0$ 2. $z^4 +2z^2 -8 = 0$

b) Factorisation d'un trinôme du second degré

Propriété

Soient a, b et c trois réels, $a \neq 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = az^2 + bz + c$.
On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ (avec éventuellement $z_1 = z_2$).
On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Démonstration 52

- Démonstration -

II. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1°) Module et argument d'un nombre complexe

a) définition

Définitions

Soient z un nombre complexe et M le point d'affixe z dans le plan complexe.
- On appelle **module** de z, et on note $|z|$, la distance OM.
- Si $z \neq 0$, on appelle **argument** de z, et on note $\arg(z)$, une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Remarques : • Si z est un réel, le module de z est égal à la valeur absolue de z.
• Le module d'un nombre complexe est un réel positif. L'argument d'un nombre complexe est un réel.
• $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$. En revanche, 0 n'a pas d'argument.
• Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments : $\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ce qui se note également $\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ (2π) et se lit « $\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ modulo 2π ».

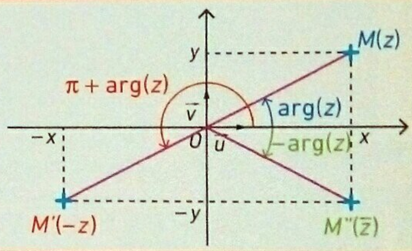
b) premières propriétés

Propriétés

Soit z un nombre complexe non nul.
- z est un réel non nul $\Leftrightarrow \arg(z) = 0$ (2π) ou $\arg(z) = \pi$ $(2\pi) \Leftrightarrow \arg(z) = 0$ (π).
- z est un imaginaire pur non nul $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ (2π) ou $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ $(2\pi) \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ (π).

Propriétés

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$.
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $|z|^2 = z\bar{z}$.
- $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$ (2π).
- $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ (2π).



Exercice : On considère les points A, B et C d'affixes respectives a=2i , b=-3, c=-2 +2i.
1. Représenter ces points dans le plan complexes
2. Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres.

2°) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

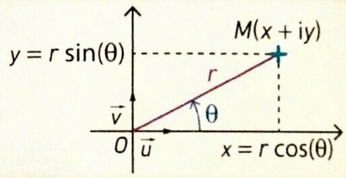
a) Définition

Propriété et défintion

Soient z un nombre complexe non nul, r un réel strictement positif et θ un réel.

$|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \ (2\pi) \Leftrightarrow z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

On appelle cette écriture **forme trigonométrique** de z.



Exemple

Soit le complexe $z = 2 + 2i\sqrt{3}$. $|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$. On factorise par $|z|$: on a donc $z = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On reconnaît les valeurs particulières de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$: on a $z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

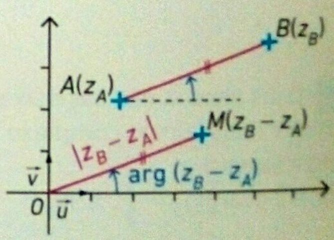
b) propriétés sur les modules et arguments

Propriété

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.

On a :

- $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \ (2\pi)$;
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \ (2\pi)$.



- Démonstration -

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $|zz'| = |z||z'|$.
- $|z^n| = |z|^n \ (n \in \mathbb{N})$.
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \ (2\pi)$.
- $\arg(z^n) = n\arg(z) \ (2\pi)$.
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \ (2\pi)$.
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \ (2\pi)$.

3°) notation exponentielle de la forme trigonométrique

a) la notation $e^{i\Theta}$

Définition :

Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

b) propriété et définition

Propriétés

Soient θ et θ' deux réels et soit n un entier naturel.

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (formule de Moivre).
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

– Démonstration -

Propriété et définition

Soient z un nombre complexe non nul, r et θ deux réels et $r > 0$.

$|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \quad (2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad z = re^{i\theta}$.

On appelle cette écriture **forme exponentielle** de z.

III. Applications

1°) Application à la trigonométrie

Calcul de valeurs exactes d'angles :

88 On donne les nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$.

1. Déterminer la forme trigonométrique de z_1 ; z_2 ; $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

3. En déduire les valeurs exactes de :

a. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$ **b.** $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$ **c.** $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ **d.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

2°) Application géométrique

a) déterminer des lieux géométriques avec des complexes

Pour tout $z \neq 2 - i$ on considère $z' = \dfrac{z - i}{z - 2 + i}$.

On appelle (E) l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit un réel.

1. Déterminer l'ensemble (E) en utilisant l'expression algébrique de z'.

2. Déterminer l'ensemble (E) en utilisant un argument de z'.

b) étudier une configuration géométrique avec des complexes

Dans le plan complexe, on donne les points $A(2)$, $B(5)$, $C(5+3i)$, $D(2+3i)$, $E\left(\dfrac{7}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$ et $F\left(\dfrac{10+3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)$.

1. Justifier le fait que $ABCD$ est un carré.

2. Quelle est la nature du triangle AEB ? Du triangle BCF ? Justifier.

3. Émettre une conjecture sur les points D, E et F et la justifier.