ORAL 1 TRIGONOMETRIE
LECON 9 APPLICATIONS

DEMONSTRATIONS

$\cos^2(ABC) + \sin^2(ABC) = 1$	Diapo 5

Soit ABC un triangle rectangle en A:

On sait que:

$\cos(ABC) = AB/BC$

$\sin(ABC) = AC/BC$

D'après le Théorème de Pythagore dans le triangle ABC, on a:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

i.e. $AB^2/BC^2 + AC^2/BC^2 = BC^2/BC^2 = 1$

Ainsi $\cos^2(ABC) + \sin^2(ABC) = 1$

$\tan(ABC) = \sin(ABC)/\cos(ABC)$	Diapo 5

Soit ABC un triangle rectangle en A:

Par définition: tan(ABC) = côté opposé/côté adjacent
= côté opposé/hypoténuse x hypoténuse/côté adjacent
= sin(ABC) x 1/cos(ABC)
= sin(ABC)/cos(ABC)

$\cos(45°) = \sin(45°) = \mathrm{sqrt}(2)/2$	Diapo 5

En appliquant le Théorème de Pythagore dans un carré de côté 1:

$\cos(60°) = \sin(30°) = 1/2$ $\sin(60°) = \cos(30°) = \mathrm{sqrt}(3)/2$	Diapo 5

En appliquant le Théorème de Pythagore dans un triangle équilatéral de côté 1:

Théorème d'Al-Kashi: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(BAC)$	Diapo 6

Soit ABC un triangle quelconque:

En posant: $BC = a$ $AC = b$ $AB = c$

D'après la relation de Chasles: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Ainsi: $a^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

i.e. $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,AC.AB.\cos(BAC)$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(BAC)$

Formule de Héron:	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	BONUS

Soit ABC un triangle quelconque

En posant: $BC = a$ $AC = b$ $AB = c$ $p = (a+b+c)/2$

Soit H le pied de la hauteur issue de A

En posant: $h = AH$ $d = HB$

D'après le Théorème de Pythagore dans le triangle AHB, on a:

$$h^2 = c^2 - d^2$$

D'après le Théorème de Pythagore dans le triangle AHC, on a:

$$h^2 = b^2 - (a-d)^2$$

Ainsi: $c^2 - d^2 = b^2 - (a-d)^2$

Donc: $d = (c^2 + a^2 - b^2)/2a$

Alors: $h^2 = c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)/2a$

i.e.
$$\begin{aligned} 4a^2h^2 &= 4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2) = (2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2 \\ &= (2ac + c^2 + a^2 - b^2)(2ac - c^2 - a^2 + b^2) \\ &= ((c+a)^2 - b^2)((b^2 - (a-c)^2) \\ &= (a+b+c)(a+c-b)(b+c-a)(b+a-c) \\ &= 2p(2p-2b)(2p-2a)(2p-2c) \end{aligned}$$

En posant: $S = ah/2$

Alors: $16S^2 = 16\,p(p-a)(p-b)(p-c)$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Loi des Sinus:	$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R = abc/2S$	BONUS

Soit R le Rayon du cercle corconscrit au triangle ABC quelconque

En posant: $BC = a$ $AC = b$ $AB = c$

En posant: $A = BAC$ $B = ABC$ $C = BCA$

En posant D le point diamétralement opposé au point A, on a:

$$\sin C = c/2R$$

i.e. $$c/\sin C = 2R$$

De manière similaire, on a:

$$a/\sin A = 2R$$
$$b/\sin B = 2R$$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	Diapo 8

En appliquant le Théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique:

$-1 \leq \sin(x) \leq 1$ $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$	Diapo 8

Par définition de l'application "Enroulement de la Droite des réels sur le cercle trigonométrique":

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow [0\,;2\pi[\times [0\,;2\pi[\\ x &\mapsto (\cos(x)\,;\sin(x)) \end{aligned}$$

$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$	Diapo 8

Par Symétrie par rapport à l'axe des abscisses:

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$	Diapo 9

Par Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées:

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$	Diapo 9

Par symétrie centrale par rapport à l'origine:

$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$ $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$	Diapo 9

Par symétrie par rapport à la première bissectrice du Plan:

$\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$ $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$	Diapo 9

Par symétrie par rapport à la deuxième bissectrice du Plan:

$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$	Diapo 10

Soient A et B deux points du cercle trigonométrique tels que:

$$(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OA}) = a \quad \text{et} \quad (\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OB}) = b$$

D'après la Relation de Chasles:
$$(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}\,;\,\vec{i}) + (\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OB}) = (\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OB}) - (\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OA}) = b - a$$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ d'après les coordonnées des vecteurs dans le repère

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA.OB.\cos(b - a) = \cos(b - a)$ car A et B sont sur le cercle trigonométrique de rayon 1

DONC $\cos(b - a) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos(a - b)$

Or $\cos(-a) = \cos(a)$ et $\sin(-a) = -\sin(a)$

DONC $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

Or $\sin(a + b) = \cos(\pi/2 - (a + b)) = \cos((\pi/2 - a) - b) = \cos(\pi/2 - a)\cos(b) + \sin(\pi/2 - a)\sin(b)$
$= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

Or $\cos(-a) = \cos(a)$ et $\sin(-a) = -\sin(a)$

DONC $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

$\sin'(x) = \cos(x)$ $\cos'(x) = -\sin(x)$	Diapo 12

En utilisant le Développement en Série Entière de l'exponentielle:
avec a appartient à $\mathbb{C}$ et x appartient à $\mathbb{R}$

$$e^{ax} = \Sigma\ a^n/n!\ x^n$$

$$e^{ix} = \Sigma\ i^n/n!\ x^n = \Sigma\ (-1)^n/(2n)!\ x^{2n} + i\ \Sigma\ (-1)^n/(2n+1)!\ x^{2n+1}$$

or $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

DONC

$$\cos(x) = \Sigma\ (-1)^n/(2n)!\ x^{2n}$$

$$\sin(x) = \Sigma\ (-1)^n/(2n+1)!\ x^{2n+1}$$

En dérivant terme à terme:

$$\sin'(x) = \Sigma\ (2n+1)(-1)^n/(2n+1)!\ x^{2n} = \Sigma\ (-1)^n/(2n)!\ x^{2n} = \cos(x)$$

De manière similaire, on a: $\cos'(x) = -\sin(x)$

$\lim_{h \to 0} (\sin(h)/h) = 1$	Diapo 12

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en 0:
Avec sin(0) = 0, on peut donc calculer son taux d'accroissement en 0:

$$\lim_{h \to 0} (\sin(h) - \sin(0))/(h - 0) = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$