M1G S1 : Géométrie

Vincent Borrelli   Mathilde Gaillard   Matthieu Jentile

Sébastien Pierrisnard   Michael Yang

Résumé

Ce document est un polycopié de cours du module Géométrie enseigné lors du premier semestre du Master 1 Mathématiques Générales (M1G) de Lyon, réalisé par Monsieur Vincent Borelli. L'entièreté du contenu du document a été fournie par M. Borelli pendant ses enseignements lors de l'année scolaire 2020-2021.

Le but de ce polycopié est de fournir aux élèves de M1G un document de cours parallèle aux diapositives qu'utilise M. Borelli lors de ses cours, ceci afin d'en faciliter les lectures. Ainsi, le contenu est identiquement le même et ne contient aucune note personnelle.
Ce document a été réalisé en collaboration par Mathilde Gaillard, Matthieu Jentile, Sébastien Pierrisnard, Michael Yang et Jules Armand. Chacun des collaborateurs est issu de la promotion 2020-2021 du M1G et ont donc suivis les enseignements de M. Borelli.

Malgré les précautions de chacun des auteurs, il est possible que des erreurs se soient glissées çà et là. Dans ce cas (ou pour toute autre remarque vis-à-vis de ce document), il est recommandé de contacter M. Borelli, par exemple à l'adresse borrelli@math.univ-lyon1.fr.
Enfin, toutes les images présentes dans ce polycopié ne sont pas forcément libres de droits. Il n'est donc pas autorisé au lecteur de les utiliser comme bon lui semble, si ce n'est pour une utilisation <u>personnelle</u>.

Les collaborateurs sont profondément reconnaissants envers M. Borelli pour sa confiance en eux dans l'élaboration de ce document.

Table des matières

1 Courbes paramétrées **2**

I Régularité 2

II Giuseppe Peano 7

III Courbes en polaire 8

IV Enveloppes 11

V Alexis Clairaut 15

Chapitre 1

Courbes paramétrées

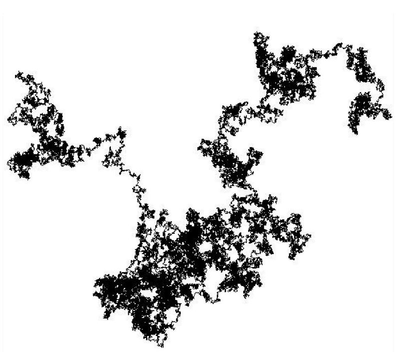
I Régularité

Définition :
On appelle **courbe paramétrée** de classe C^k, $k \geq 0$, toute application $\gamma : I \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles deux-à-deux disjoints.
L'ensemble $\Gamma \coloneqq \gamma(I)$ s'appelle le **support** de γ .

Proposition 1.1 :

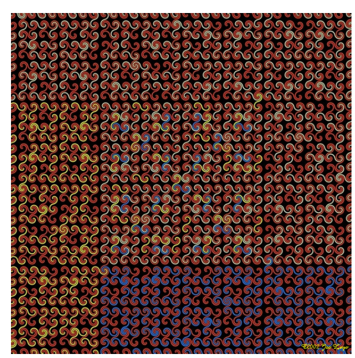
1. Si I est un intervalle, alors Γ est connexe.
2. Si I est un segment, alors Γ est compacte.

Sauf mention explicite du contraire, dans ce cours I sera un intervalle de $\mathbb{R}$.
Les courbes paramétrées C^0 peuvent s'éloigner très fortement de ce que l'intuition suggère.



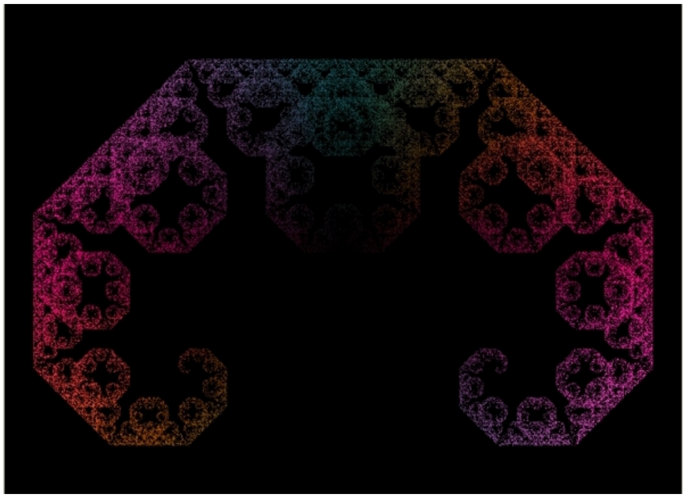
Trajectoire brownienne

Courbe de Péano-Hilbert



Courbe de Péano-Hilbert

Dans ce cours, on suppose que γ est C^k avec $k \geqslant 1$. En cas de doute, considérer que $k = +\infty$.
Ne pas confondre la courbe paramétrée avec son support.



« Dragon de Lévy »

Exemple : Soient

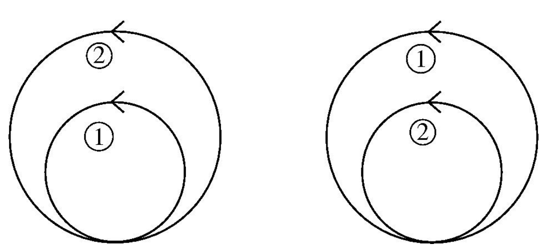
$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \gamma_1 : &]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \theta & \longmapsto & (\cos\theta, \sin\theta) \end{array}$$

Ces courbes ont le même support : le cercle unité privé du point (-1,0).

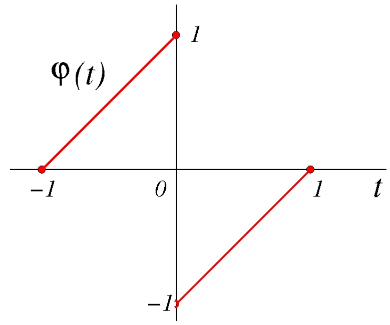
Définition :
On dit que $\gamma_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un C^k-**REPARAMÉTRAGE** $(k \geq 1)$ de $\gamma_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ s'il existe un C^k- DIFFÉOMORPHISME $\varphi : J \longrightarrow I$ tel que $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \varphi$.

REMARQUE :

- Une application φ est un C^k-difféomorphisme si elle est bijective et que φ et φ^{-1} sont C^k. Dans l'exemple précédent, γ_1 est un reparamétrage C^∞ de γ_0 avec $\varphi(\theta) = \tan\frac{\theta}{2}$.
- Si γ_1 est un C^k-reparamétrage de γ_0 alors les deux courbes paramétrées ont même support. La réciproque est <u>**fausse**</u> même pour $k = 0$.



$$\begin{array}{ccc} \gamma_0 \uparrow & & \uparrow \gamma_1 \\ I = [-1,0] \cup [0,1] & \xrightarrow{\varphi} & I = [-1,0] \cup [0,1] \end{array}$$



• On définit une relation d'équivalence entre les courbes paramétrées C^k de la façon suivante :

$$\gamma_0 \sim_k \gamma_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma_1 \text{ est un } C^k-\text{reparamétrage de } \gamma_0.$$

Définition : Une classe d'équivalence s'appelle une **COURBE GÉOMÉTRIQUE** C^k.

Exemple :

1. Soient
$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t, t^3) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \gamma_1 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (2t, 8t^3) \end{array}$$
On a $\gamma_0 = \gamma_1 \circ \varphi$ avec $\varphi(t) = \frac{t}{2}$ donc $\gamma_1 \underset{+\infty}{\sim} \gamma_0$.
2. Soient
$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t, t^3) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \gamma_2 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t^3, t^9) \end{array}$$
On a $\gamma_0 = \gamma_2 \circ \psi$ avec $\psi(t) = t^{\frac{1}{3}}$. Or ψ n'est un C^k-difféomorphisme pour aucun $k \geq 1$, ainsi
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma_2 \underset{k}{\not\sim} \gamma_0.$$

Définition : On appelle **COURBES GÉOMÉTRIQUES ORIENTÉES** C^k les classes d'équivalence pour la relation,

$$\gamma_0 \underset{k}{\overset{\circ}{\sim}} \gamma_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_0 \circ \varphi \text{ où } \varphi \text{ est un } C^k\text{-difféomorphisme tel que } \varphi' > 0.$$

Définition : Une courbe paramétrée $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est dite **RÉGULIÈRE** en $t \in I$ si $\boldsymbol{\gamma'(t) \neq 0}$. Dans ce cas, la droite passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\gamma'(t)$ est appelée la **TANGENTE** de la courbe paramétrée γ en t. Si de plus γ est injective, on parle de la tangente en $\gamma(t)$.

Une courbe paramétrée peut ne pas avoir de tangente au sens de cette définition alors que son support, vu comme un graphe, peut admettre une tangente (au sens de la tangente d'un graphe).

Exemple : Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (t^3, t^9)$. Puisque $\gamma'(0) = 0$, cette courbe paramétrée n'a pas de tangente en $t = 0$. Pourtant son support est le graphe de $f(x) = x^3$ qui lui admet une tangente horizontale en $x = 0$.

Définition : Une courbe géométrique est dite **RÉGULIÈRE** si l'un de ses représentants $\gamma_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est régulier en tous points. Cette définition est cohérente puisque si

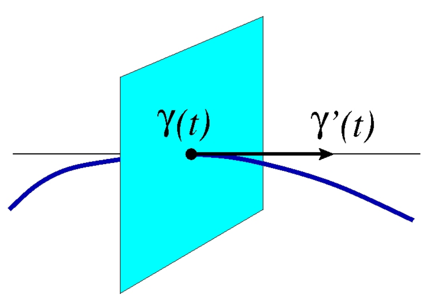
$$\gamma_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

est un autre représentant alors $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \varphi$ et $\gamma_1' = \varphi' * \gamma_0' \circ \varphi$.
Puisque φ est C^k-difféomorphisme,

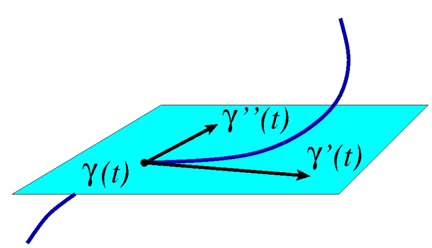
$$\varphi' \neq 0 \text{ et } \gamma_1'(t) = 0 \iff \gamma'(\varphi(t)) = 0\,.$$

Définition :

1) Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Tout plan contenant la tangente s'appelle **PLAN TANGENT**. Si de plus, $\mathbb{R}^3$ est muni d'un produit scalaire, alors le plan perpendiculaire à la tangente s'appelle **PLAN NORMAL** et toute droite perpendiculaire à la tangente s'appelle une **DROITE NORMALE**.
2) Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Un point $t \in I$ pour lequel $\boldsymbol{\gamma'(t)}$ **et** $\boldsymbol{\gamma''(t)}$ **sont linéairement indépendants** est dit **BIRÉGULIER**. En un tel point t, on appelle **PLAN OSCULATEUR** le plan $\gamma(t) + Vect(\gamma'(t), \gamma''(t))$. Si γ est injective, on parle de plan osculateur au point $\gamma(t)$.



Plan normal

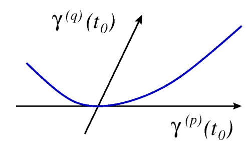


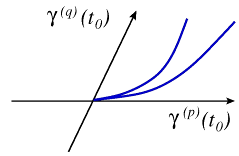
Plan osculateur

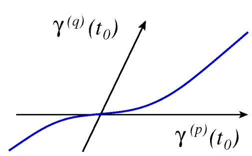
3) Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe C^∞ et $t_0 \in I$. On note $p \geq 1$ le plus petit entier tel que $\boldsymbol{\gamma^{(p)}(t_0) \neq 0}$ et $q > p$ le plus petit entier tel que

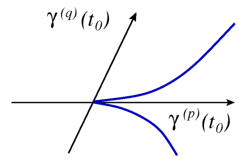
$$\boldsymbol{dim\ Vect(\gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0)) = 2}$$

Proposition 1.2 :
Si les entiers p et q existent alors la courbe prend au voisinage de t_0 l'une des formes suivantes :

<table>
<tr><th></th><th>p impair</th><th>p pair</th></tr>
<tr><td>q pair</td><td>

Point ordinaire</td><td>

Point de rebroussement de 2nd espèce</td></tr>
<tr><td>q impair</td><td>

Point d'inflexion</td><td>

Point de rebroussement de 1ère espèce</td></tr>
</table>

***Démonstration* :** On suppose d'abord que

$$\gamma^{(p+1)}(t_0) = ... = \gamma^{(q-1)}(t_0) = 0$$

Le développement limité de γ s'écrit :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p\,!}\,\gamma^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q\,!}\,\gamma^{(q)}(t_0) + o((t-t_0)^q)$$

d'où le tableau. Le cas général procède du même principe.

□

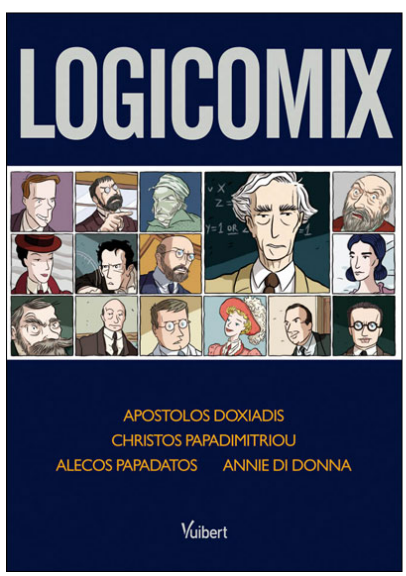
Remarque : Attention, les entiers p et q peuvent ne pas exister même si γ est C^∞. Pensez à $\gamma(t) = (t, 0)$. Réfléchir également au cas des courbes paramétrées C^∞ mais non analytiques.

II Giuseppe Peano

Giuseppe Peano (1858-1932)

Bertrand Russell (1872-1970)

- Mathématicien italien essentiellement intéressé par la formalisation des mathématiques.
- Découvre de nombreux contre-exemples, « sa » courbe en est le plus célèbre.
- Pionnier de la méthode axiomatique moderne : il met au point une axiomatisation de l'arithmétique qui porte aujourd'hui son nom.
- Consacre la fin de sa vie à la mise au point et à la promotion du *latino sine flexione* un latin à la grammaire très simplifiée, qu'il voyait comme une langue pour les échanges internationaux, en particulier scientifiques.
- Protagoniste indirect de la *crise des fondements des mathématiques* au travers de l'influence de son oeuvre sur Bertrand Russell.



III Courbes en polaire

Une courbe polaire est de la forme :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

et M un point de $\mathbb{R}^2$.

Définition : Tout couple (r,θ) tel que $\Phi(r,\theta) = M$ s'appelle un **SYSTÈME DE COORDONNÉES POLAIRES** de M.

REMARQUE : Notons que Φ n'est pas injective.

On pose $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi,\pi[$ et $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$.

Lemme 1.1 : *L'application $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathcal{U}$ est un C^∞-difféomorphisme.*

Démonstration **:** En exercice. L'application réciproque est donnée par

$$\begin{array}{rccl} \Phi^{-1} : & \mathcal{U} & \longrightarrow & \Omega \\ & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = 2arctan\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array} \right. \end{array}$$

□

Définition :

1) Une courbe est dite **DÉFINIE PARAMÉTRIQUEMENT EN COORDONNÉES POLAIRES**, si elle est donnée sous la forme

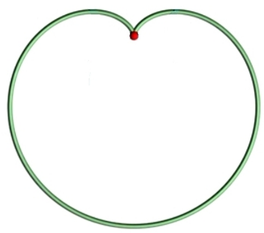
$$t \longmapsto \gamma(t) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$$

2) Une courbe paramétrée est dite **POLAIRE**, si elle s'écrit sous la forme

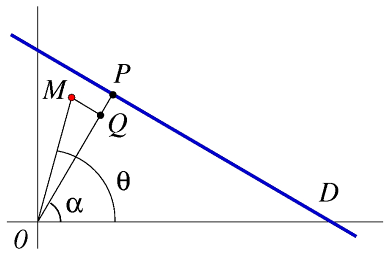
$$\theta \longmapsto \gamma(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$$

Exemple :

1) <u>Cardioïde :</u> $r(\theta) = 1 + \cos\theta$



2) <u>Equation polaire des droites :</u> Soit D une droite du plan ne passant pas par l'origine O. On note P l'image de O par la projection orthogonale sur D.



Soit (h, α) les coordonnées polaires de P. On a

$$\overline{OQ} = r\cos(\theta - \alpha) \quad \text{et}$$

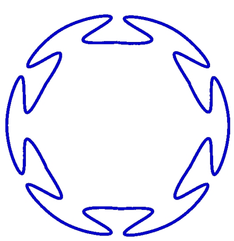
$$M \in D \iff Q = P \iff \overline{OQ} = h \iff r\cos(\theta - \alpha) = h$$

Lemme 1.2 : Une équation polaire de D est donnée par

$$\forall\,\theta \in \left]\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}\right[, \quad r(\theta) = \frac{h}{\cos(\theta - \alpha)}.$$

Question (laissée à votre sagacité) : Que se passe-t-il si la droite D passe par l'origine ?

Exercice : Le dessin ci-dessous peut-il être le support d'une courbe polaire ?



Proposition 1.3 : Une courbe polaire C^1 est régulière ssi

$$\boldsymbol{r^2 + (r')^2 \neq 0}$$

En particulier une courbe polaire C^1 a au plus un point singulier qui est nécessairement à l'origine.

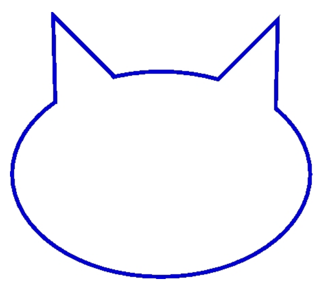
Démonstration **:** Un calcul direct montre que

$$\|\gamma'(\theta)\|^2 = r^2(\theta) + (r')^2(\theta)$$

$$\gamma'(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\theta) = 0$$

Donc l'unique point singulier est à **l'origine**. □

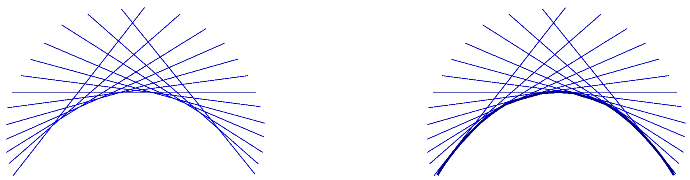
Exercice : Le dessin ci-dessous peut-il être le support d'une courbe polaire ?



Réponse : Oui en C^0, non en C^1. En revanche, ce support est celui d'une courbe paramétrée C^1 (et même C^∞).

IV Enveloppes

Définition : On dit que le support Γ d'une courbe paramétrée injective est l'**ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE DROITES** $\mathcal{F}$ si l'ensemble des tangentes à la courbe est $\mathcal{F}$.



Observation naïve : Tout support Γ de courbe paramétrée régulière injective γ est donc l'enveloppe de la famille de droites constituée par ses tangentes.

Le problème se pose donc dans l'autre sens : étant donnée $\mathcal{F}$ comment déterminer γ ?

Soient $a, b, c \in C^1(I)$ telles que $\forall\, t \in I$, $(a(t), b(t)) \neq (0, 0)$. Ainsi, pour $t \in I$, l'équation $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ définit une droite D_t. On pose $\mathcal{F} = (D_t)_{t \in I}$.

Proposition 1.4 :
Si $\forall\, t \in I$, $\delta(t) = a(t)\, b'(t) - b(t)\, a'(t) \neq 0$, alors la courbe enveloppe de $\mathcal{F}$ est le support de $t \longmapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ où

$$x(t) = \frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} b(t) & c(t) \\ b'(t) & c'(t) \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad y(t) = -\frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} a(t) & c(t) \\ a'(t) & c'(t) \end{vmatrix}$$

***Démonstration* :**
Cherchons une courbe enveloppe qui soit le support d'une courbe paramétrée γ telle que

$$\forall\, t \in I, \quad \gamma(t) \in D_t \quad \text{et} \quad \gamma'(t) \in \overrightarrow{D_t}$$

Ces conditions conduisent aux deux équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) & = & 0 \\ a(t)x'(t) + b(t)y'(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

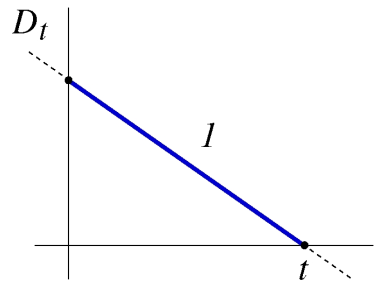
En dérivant la première équation et compte tenu de la seconde, ce système est équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) & = & 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

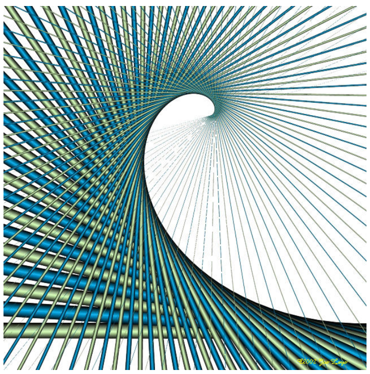
dont la résolution fournit les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ données dans la proposition.

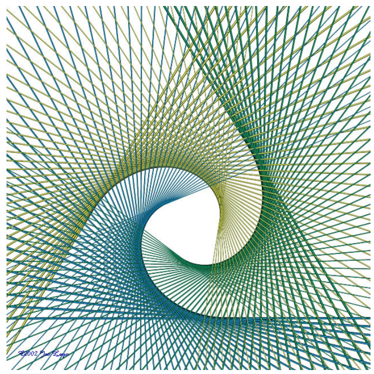
□

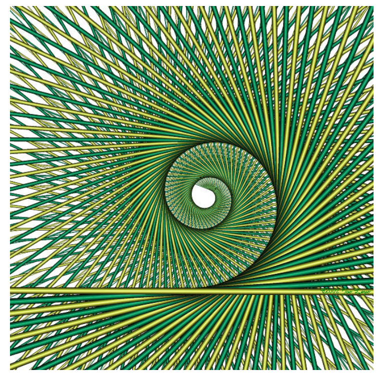
Exercice : Trouver l'enveloppe de la famille de droites $(D_t)_{t\in[0,1]}$ du dessin ci-dessous.

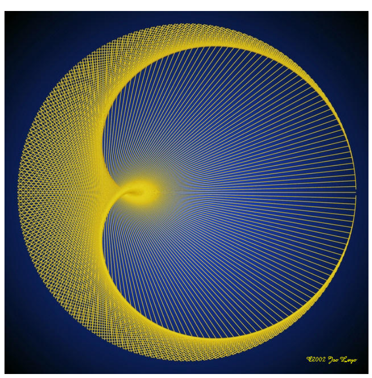


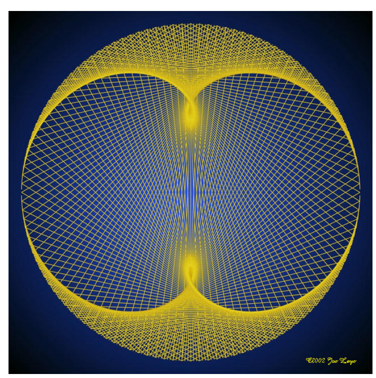
Exemple :

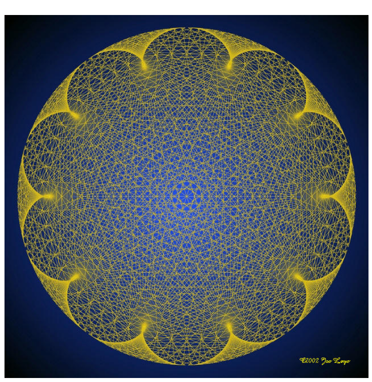


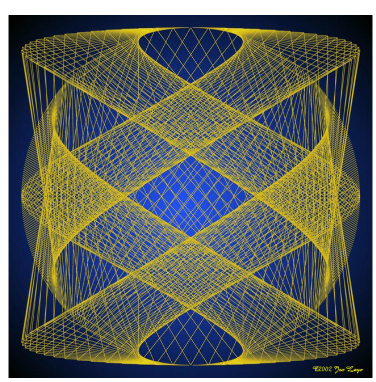








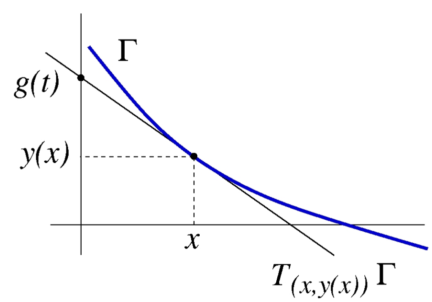




Equation de Clairaut : Soit $g \in C^1(I)$ et $(D_t)_{t \in I}$, la famille de droites d'équation $y = tx + g(t)$ et soient $y : I \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ et $\Gamma = \{(x, y(x)) \mid x \in I\}$. Si Γ est courbe enveloppe de $(D_t)_{t \in I}$ alors y satisfait l'équation différentielle $y = xy' + g(y')$.
La réciproque est délicate. Elle conduit à la notion de solution générale et de solution singulière de l'équation de Clairaut.

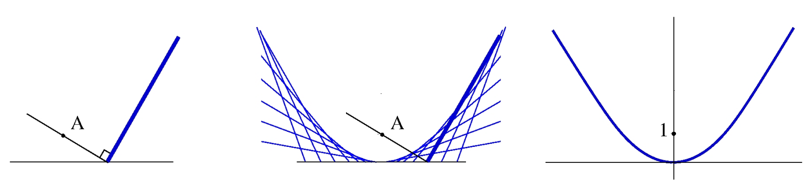
***Démonstration* :** Soit $t \in I$ et $(x, y(x))$ un point de Γ où la tangente est D_t alors

$$\begin{aligned} (x, y(x)) \in D_t &\iff y(x) = tx + g(t) && (1) \\ T_{(x,y(x))}\Gamma = D_t &\implies y'(x) = t && (2) \end{aligned}$$

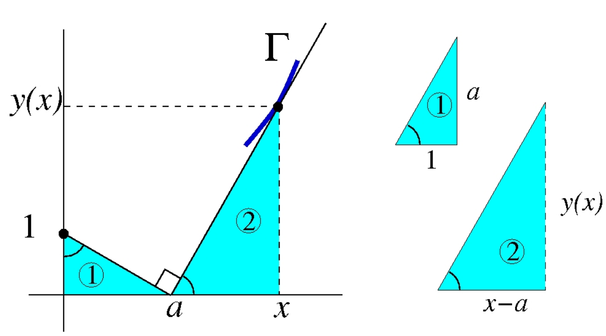


En éliminant t dans (1) grâce à (2) on obtient l'équation de Clairaut. □

Exemple : On considère la famille des équerres infinies dont l'un des côtés est astreint à passer par un point A et dont l'angle droit est sur une droite horizontale. Soit $\mathcal{F}$ la famille de droites déduite des positions de l'autre côté.



Il s'agit de montrer que l'enveloppe est une parabole. On choisit le repère de façon à ce que A ait pour coordonnées $(0, 1)$. On note a l'abscisse du sommet de l'angle droit.



Les triangles 1 et 2 sont semblables donc

$$\frac{y(x)}{x-a} = \frac{a}{1} \qquad (1)$$

L'hypoténuse du triangle 2 est la tangente à Γ en $(x, y(x))$ donc si $x \neq a$,

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x-a}$$

(Au fait que se passe-t-il si $x = a$?)

Le cumul des deux égalités précédentes donne $y'(x) = a$, d'où en reportant dans (1) :

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x - y'(x)}$$

et

$$y(x) = xy'(x) - (y'(x))^2 \qquad (2)$$

qui est l'équation de Clairaut de notre problème. Si l'on dérive (2), il vient

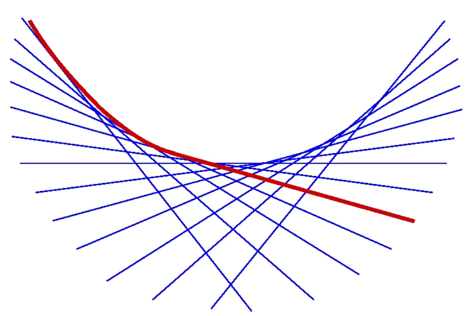
$$y'(x) = y'(x) + xy''(x) - 2y''(x)y'(x)$$

$$0 = y''(x)(x - 2y'(x))$$

$x - 2y'(x) = 0 \iff y(x) = \frac{1}{4}x^2 + cte$, en remplaçant dans (2) on voit que nécessairement $cte = 0$.

$y''(x) = 0 \iff y(x) = \alpha x + \beta$ et en remplaçant dans (2) on voit que nécessairement $\beta = -\alpha^2$.

Réciproquement $y_\alpha = \alpha x - \alpha^2$ et $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ sont solutions de (2) mais ce ne sont pas là toutes les solutions, d'autres peuvent être obtenues par raccordement.



Une solution obtenue par raccordement

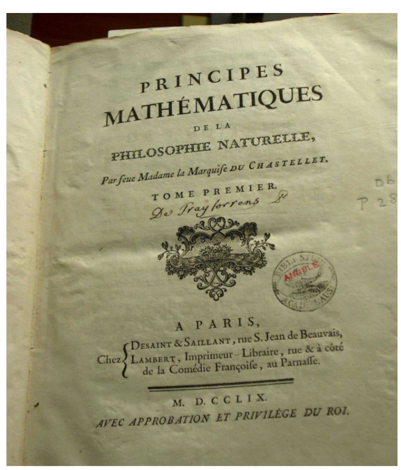
Les solutions linéaires y_α sont appelées SOLUTIONS GÉNÉRALES de l'équation de Clairaut, la solution $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ est elle dite SOLUTION SINGULIÈRE.

V Alexis Clairaut

Alexis Clairaut (1713-1765)

- Un des plus grands mathématiciens de son temps.
- Lit son premier mémoire à l'Académie des sciences alors qu'il n'a pas treize ans et devient académicien à dix-huit ans.
- Participe à l'expédition en Laponie destinée à vérifier l'aplatissement de la Terre aux pôles.
- Résout au moyen d'une approximation au troisième ordre le problème du mouvement de l'apside de la Lune et conforte ainsi la théorie de Newton.
- Il a pour élève la marquise du Châtelet avec laquelle il réalisera la première traduction en français des *Principia* de Newton.

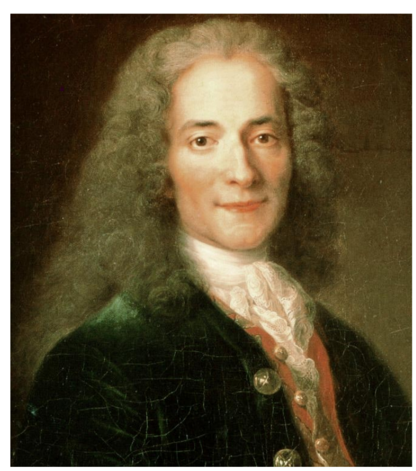
Marquise du Châtelet(1706 -1749)



PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE,
Par feue Madame la Marquise DU CHASTELLET.
TOME PREMIER.

A PARIS,
Chez DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais, LAMBERT, Imprimeur-Libraire, rue & à côté de la Comédie Françoise, au Parnasse.
M. D. CCLIX.
AVEC APPROBATION ET PRIVILÈGE DU ROI.

Clairaut et du Châtelet



Voltaire

« La marquise du Châtelet est bien meilleure élève que Voltaire »