M1G S1 : Géométrie

Vincent Borrelli   Mathilde Gaillard   Matthieu Jentile

Sébastien Pierrisnard   Michael Yang

Université de Lyon | Université Claude Bernard Lyon 1

Résumé

Ce document est un polycopié de cours du module Géométrie enseigné lors du premier semestre du Master 1 Mathématiques Générales (M1G) de Lyon, réalisé par Monsieur Vincent Borelli. L'entièreté du contenu du document a été fournie par M. Borelli pendant ses enseignements lors de l'année scolaire 2020-2021.

Le but de ce polycopié est de fournir aux élèves de M1G un document de cours parallèle aux diapositives qu'utilise M. Borelli lors de ses cours, ceci afin d'en faciliter les lectures. Ainsi, le contenu est identiquement le même et ne contient aucune note personnelle.
Ce document a été réalisé en collaboration par Mathilde Gaillard, Matthieu Jentile, Sébastien Pierrisnard, Michael Yang et Jules Armand. Chacun des collaborateurs est issu de la promotion 2020-2021 du M1G et ont donc suivis les enseignements de M. Borelli.

Malgré les précautions de chacun des auteurs, il est possible que des erreurs se soient glissées çà et là. Dans ce cas (ou pour toute autre remarque vis-à-vis de ce document), il est recommandé de contacter M. Borelli, par exemple à l'adresse borrelli@math.univ-lyon1.fr.
Enfin, toutes les images présentes dans ce polycopié ne sont pas forcément libres de droits. Il n'est donc pas autorisé au lecteur de les utiliser comme bon lui semble, si ce n'est pour une utilisation personnelle.

Les collaborateurs sont profondément reconnaissants envers M. Borelli pour sa confiance en eux dans l'élaboration de ce document.

Table des matières

Chapitre 2

Propriétés métriques des courbes

Dans tout ce chapitre, on munit $\mathbb{R}^3$ d'un produit scalaire.

I Longueur et courbure

Définition : Soient $I = (a, b)$ et $\gamma : I \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée.
• La **LONGUEUR de** γ est la quantité

$$Long(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \leq +\infty$$

• L'**ABSCISSE CURVILIGNE** est la fonction

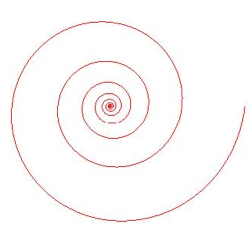
$$t \longmapsto S(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| \, du$$

Exemple :
1) Soient

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \gamma_1 & := & \gamma_{|[0,2\pi]} \\ \gamma_2 & := & \gamma_{|[0,4\pi]} \end{array} \right.$$

alors $Long(\gamma) = +\infty$, $\quad Long(\gamma_1) = 2\pi$ et $Long(\gamma_2) = 4\pi$

2) **Spirale logarithmique/Spira Mirabilis** : C'est la courbe paramétrée plane γ définie en polaire par $r(\theta) = ae^{b\theta}$ où $a > 0$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.



Notons que $\lim\limits_{\theta \longrightarrow -\infty} \gamma(\theta) = O$, i.e. l'origine est le point asymptote.

Rappelons que

$$\begin{aligned}\|\gamma'(\theta)\|^2 &= r(\theta)^2 + r'(\theta)^2\\ &= a^2(1+b^2)e^{2b\theta}.\end{aligned}$$

Soit $X > 0$. On a

$$\begin{aligned}\int_{-X}^{\theta}\|\gamma'(u)\|du &= \int_{-X}^{\theta} a\sqrt{1+b^2}e^{bu}du\\ &= \left[\frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}e^{bu}\right]_{-X}^{\theta}\\ &= \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}\left(r(\theta)-r(-X)\right).\end{aligned}$$

D'où, en passant à la limite,

$$S(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta}\|\gamma'(u)\|du = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}\,r(\theta)$$

Définition : On dit qu'une courbe γ est **PARAMÉTRÉE PAR LA LONGUEUR D'ARC** (ou encore **PARAMÉTRÉE PAR L'ABSCISSE CURVILIGNE**) lorsque $\forall t \in I$, $\|\gamma'(t)\| = 1$.

Proposition 2.1 : Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ une courbe de classe $\mathcal{C}^k$ régulière. Il existe un $\mathcal{C}^k$-reparamétrage $\varphi : [0,L] \longrightarrow [a,b]$ tel que $\beta = \gamma\circ\varphi$ soit paramétrée par la longueur d'arc.

***Démonstration* :** La fonction abscisse curviligne est dérivable et

$$S'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0.$$

Par conséquent S est une fonction C^k strictement croissante, c'est donc un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $[a,b]$ dans $[0,L]$.
On pose

$$\begin{array}{rccc}\varphi = S^{-1} : & [0,L] & \longrightarrow & [a,b]\\ & s & \longmapsto & t=\varphi(s)\end{array}$$

et on a

$$\varphi'(s) = \frac{1}{S'(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}$$

Posons $\beta := \gamma\circ\varphi : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On a

$$\beta'(s) = \gamma'(\varphi(s)).\varphi'(s)$$

d'où

$$\|\beta'(s)\| = \|\gamma'(\varphi(s))\|.\frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|} = 1$$

□

Proposition 2.2 : Soit $\beta = \gamma\circ\varphi$ un $\mathcal{C}^k$-reparamétrage ($k \geq 1$) de γ. $Long(\gamma) = Long(\beta)$.

***Démonstration* :** Il s'agit d'appliquer la formule de changement de variables dans une intégrale.

En effet

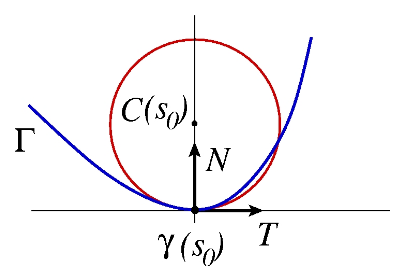
$$\begin{aligned} Long(\beta) &= \int_J \|\beta'(t)\| dt \\ &= \int_J \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| dt \\ &= \int_J \|\gamma'(\varphi(t))\| . \|\varphi'(t)\| dt \\ &= \int_I \|\gamma'(u)\| du \\ &= Long(\gamma). \end{aligned}$$

□

Définition : Soit $\gamma : I \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ paramétrée par la longueur d'arc.
• Le nombre $k(s) := \|\gamma''(s)\|$ est appelé la **COURBURE de** γ **en** s (ou encore, **courbure principale**).
• Un point $s \in I$ où $k(s) \neq 0$ est dit **BIRÉGULIER**.
• Soit s un point birégulier. On appelle **NORMALE PRINCIPALE en** s le vecteur $N(s) := \frac{1}{\|\gamma''(s)\|}\gamma''(s)$.

Si $\gamma : I \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est régulière et n'est pas paramétrée par la longueur d'arc, alors la courbure de γ en t est celle de $\gamma \circ \varphi$ ($\varphi = S^{-1}$) au point $t = \varphi(s)$.

Définition : • On appelle **CENTRE DE COURBURE en un point** s_0 d'une courbe birégulière paramétrée par la longueur d'arc le point $C(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} N(s_0)$.



• Le **CERCLE DE COURBURE au point** s_0 est le cercle de centre $C(s_0)$ et de rayon $\dfrac{1}{k(s_0)}$.

Interprétation géométrique : Le développement de Taylor de γ s'écrit

$$\begin{aligned} \gamma(s) - \gamma(s_0) &= (s - s_0)\gamma'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\gamma''(s_0) + o((s - s_0)^2) \\ &= (s - s_0)T + k(s_0)\frac{(s - s_0)^2}{2} N + o((s - s_0)^2) \end{aligned}$$

Un paramétrage par la longueur d'arc δ du cercle de centre $C = \gamma(s_0) + \dfrac{1}{k(s_0)} N$ et de rayon $\dfrac{1}{k(s_0)}$ est donné dans le repère $(\gamma(s_0), T, N)$ par

$$\delta(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k(s_0)} \end{pmatrix} + \frac{1}{k(s_0)} \begin{pmatrix} \sin(k(s_0)(s - s_0)) \\ -\cos(k(s_0)(s - s_0)) \end{pmatrix}$$

Le développement de Taylor de δ s'écrit

$$\delta(s) - \delta(s_0) = (s - s_0)T + k(s_0)\frac{(s - s_0)^2}{2}N + o((s - s_0)^2)$$

Ainsi, le cercle de courbure en s_0 à γ approche γ à l'ordre 2 en s_0.

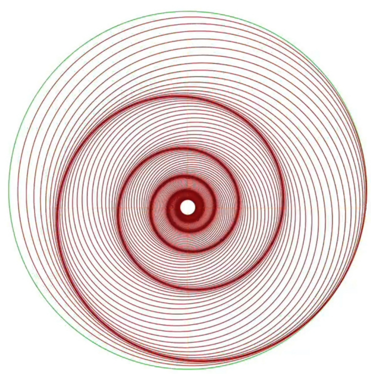
Proposition 2.3 : Soit γ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^3$ birégulière. Si $k'(s_0) \neq 0$, alors le support de γ traverse le cercle osculateur en s_0.

***Démonstration* :** Se placer dans le repère $(C(s_0), T, N)$ et définir

$$s \longmapsto f(s) = \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle$$

Faire un DL à l'ordre 3 pour constater que $f(s) - R^2 = -\frac{k'(s_0)}{3k(s_0)}(s - s_0)^3 + o((s - s_0)^3)$. □

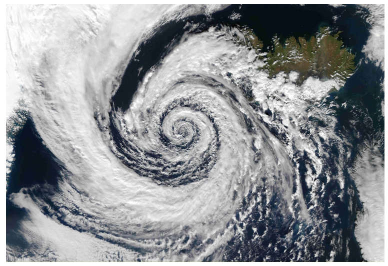
Définition : On appelle **SPIRALE** une courbe C^3 birégulière et telle que pour tout $t \in I$ $k'(t) \neq 0$.



De telles courbes traversent en tout point leur cercle osculateur.

II Spirales dans la Nature

Une spirale logarithmique



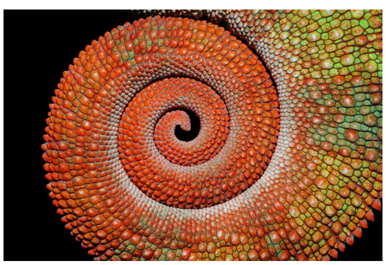
Une dépression en forme de spirale logarithmique

Une galaxie en forme de spirale logarithmique

Des escargots

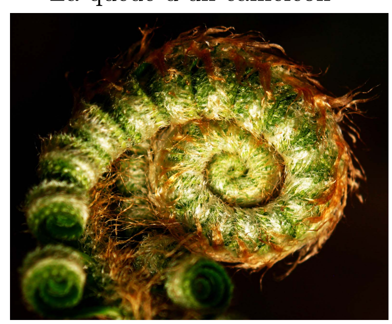
Le cœur d'un tournesol

La queue d'un caméléon



La queue d'un caméléon

Un chou romanesco



Une fougère

Une fougère

Un coeur d'aloès

Une nébuleuse en forme de spirale d'Archimède

III Courbes du plan

Proposition 2.4 : Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe plane paramétrée par longueur d'arc. Pour tout $s \in I$, $(T(s), N(s))$ est une BON de $\mathbb{E}^2 = \big(\mathbb{R}^2, \langle .,. \rangle\big)$.

Joseph Serret jeune...

y

... et moins jeune.

Théorème 2.1 (Formules de Serret-Frenet) :

1) $\dfrac{dT}{ds}(s) = k(s)N(s)$

2) $\dfrac{dN}{ds}(s) = -k(s)T(s)$

Démonstration **:** D'une part,

$$\forall s \in I,\ \langle N(s), N(s)\rangle = 1 \Longrightarrow \forall s \in I,\ \left\langle \frac{dN}{ds}(s), N(s)\right\rangle = 0$$

Donc il existe une fonction $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{dN}{ds}(s) = \alpha(s)T(s)$$

D'autre part

$$\forall s \in I,\ \langle N(s), T(s)\rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall s \in I,\ \left\langle \frac{dN}{ds}(s), T(s)\right\rangle = -\left\langle N(s), \frac{dT}{ds}(s)\right\rangle$$

Or

$$\frac{dT}{ds}(s) = \gamma''(s) = k(s)N(s)$$

d'où

$$\alpha(s) = \left\langle \frac{dN}{ds}(s), T(s)\right\rangle = -k(s)$$

$\square$

Définition : Soit γ une courbe de $\mathbb{E}^2$ orienté birégulière paramétrée par la longueur d'arc.

- La **NORMALE ALGÉBRIQUE** est le vecteur $N_{alg} := Rot_{+\frac{\pi}{2}}(T)$.
- La **COURBURE ALGÉBRIQUE** est le nombre k_{alg} tel que $\frac{dT}{ds} = k_{alg} N_{alg}$.

Courbure et normale algébriques ne diffèrent au plus que d'un signe de la courbure et la normale principales. Si $N = N_{alg}$, alors $k = k_{alg}$ et si $N = -N_{alg}$, alors $k = -k_{alg}$. Dans tous les cas, $|k_{alg}| = k$.

Proposition 2.5 : Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^2$ une courbe plane régulière mais non nécessairement paramétrée par la longueur d'arc. $\forall t \in I$,

$$k_{alg}(t) = \frac{x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

Démonstration **:** Par définition

$$k_{alg}(t) := \langle (\gamma \circ \varphi)''(s), N_{alg}(\varphi(s)) \rangle$$

avec $\varphi = S^{-1}$ et $t = \varphi(s)$.
On a

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \varphi)''(s) &= (\gamma'(\varphi(s)).\varphi'(s))' \\ &= \gamma''(\varphi(s)).\varphi'(s)^2 + \gamma'(\varphi(s)).\varphi''(s). \end{aligned}$$

On a

$$k_{alg}(t) = \langle (\gamma \circ \varphi)''(s), N_{alg}(\varphi(s)) \rangle$$

et puisque

$$\langle \gamma'(\varphi(s)), N_{alg}(\varphi(s)) \rangle = 0$$

on en déduit

$$k_{alg}(t) = \langle \gamma''(\varphi(s)).\varphi'(s)^2, N_{alg}(\varphi(s)) \rangle.$$

La normale algébrique est donnée par

$$N_{alg}(\varphi(s)) = \frac{1}{\sqrt{x'(\varphi(s))^2 + y'(\varphi(s))^2}} \begin{pmatrix} -y'(\varphi(s)) \\ x'(\varphi(s)) \end{pmatrix}$$

où $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.
Puisque

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi'(s))\|^2} = \frac{1}{x'(\varphi(s))^2 + y'(\varphi(s))^2}$$

on déduit

$$k_{alg} = \frac{1}{(x'(\varphi(s))^2 + y'(\varphi(s))^2)^{3/2}} \langle \begin{pmatrix} x''(\varphi(s)) \\ y''(\varphi(s)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y'(\varphi(s)) \\ x'(\varphi(s)) \end{pmatrix} \rangle$$

Ce qui est l'expression recherchée. $\square$

Corollaire 2.1 : Soit γ une courbe polaire.

$$k_{alg}(\theta) = \frac{r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)}{(r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{3/2}}$$

Exemple : Spirale logarithmique : Puisque $r(\theta) = ae^{b\theta}$ on a

$$r' = br \text{ et } r'' = b^2 r$$

d'où

$$r^2 + 2(r')^2 - rr'' = (1+b^2)r^2 \text{ et } r^2 + (r')^2 = (1+b^2)r^2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} k_{alg} &= \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(1+b^2)r^2}{(1+b^2)^{\frac{3}{2}} r^3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+b^2}r}. \end{aligned}$$

Le rayon de courbure au point θ est donc

$$R(\theta) = \frac{1}{k(\theta)} = \sqrt{1+b^2}r(\theta)$$

Rappelons que

$$S(\theta) = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} r(\theta)$$

ainsi

$$R(\theta) = bS(\theta).$$

Pour une spirale logarithmique, rayon de courbure et longueur d'arc sont donc proportionnels.

Théorème 2.2 (Théorème fondamental des courbes planes) : Soit $k_{alg} : [a,b] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$. Il existe une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}^2$ paramétrée par la longueur d'arc telle que sa courbure algébrique soit k_{alg}. De plus, γ est unique à déplacement près.

Démonstration **:** Existence : Soit

$$\begin{array}{rccc} \theta_0 : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \displaystyle\int_a^s k_{alg}(u)du \end{array}$$

et $\gamma_0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}^2$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(s) &=& \displaystyle\int_a^s \cos\big(\theta_0(u)\big)\, du \\ y(s) &=& \displaystyle\int_a^s \sin\big(\theta_0(u)\big)\, du \end{array} \right.$$

On a immédiatement $\|\gamma_0'(s)\| = 1$ et $\gamma_0''(s) = k_{alg}(s)N_{alg}(s)$ d'où l'existence.

Unicité : Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}^2$ ayant la fonction k_{alg} pour courbure algébrique, γ étant paramétrée par la longueur d'arc. Il existe $\theta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que$\forall \in [a,b]$, $\gamma'(s) = \cos\big(\theta(s)\big)e_1 + \sin\big(\theta(s)\big)e_2$ où (e_1, e_2) est la base standard de $\mathbb{E}^2$. En particulier $\forall s \in [a,b]$, $\theta'(s) = k_{alg}(s)$. On a donc $\theta(s) = \theta(a) + \int_a^s k_{alg}(u)\, du = \theta(a) + \theta_0(s)$.
Quitte à effectuer une rotation d'angle $-\theta(a)$ on peut supposer que $\forall s \in [a,b]$, $\theta(s) = \theta_0(s)$. En intégrant il vient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(s) & = & x_0 + \displaystyle\int_a^s \cos\big(\theta_0(u)\big)\, du \\ y(s) & = & y_0 + \displaystyle\int_a^s \sin\big(\theta_0(u)\big)\, du \end{array}\right.$$

Quitte à effectuer une translation de vecteur $-(x_0, y_0)$, on a $\forall s \in [a,b]$, $\gamma(s) = \gamma_0(s)$. $\square$

Remarque : On ne peut pas remplacer k_{alg} par k pour l'unicité.

Contre-exemple :

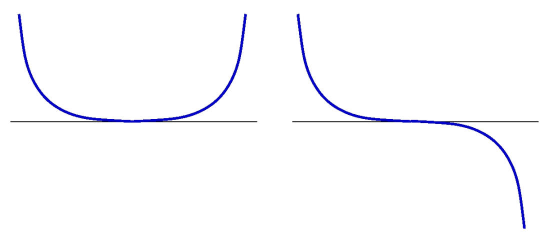
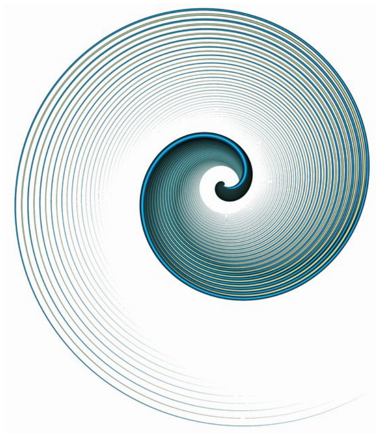
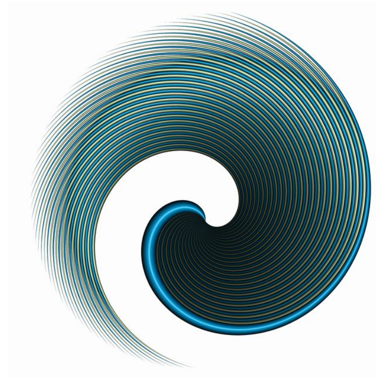
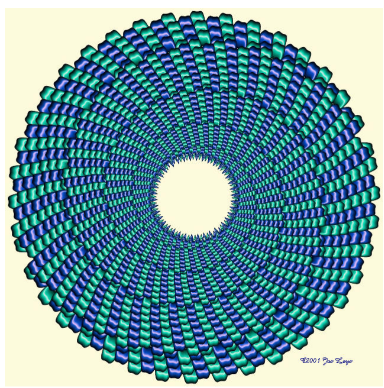


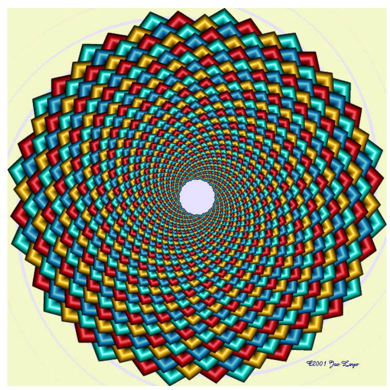
Figure 2.4 – Fonctions k_{alg} différentes mais fonctions k identiques

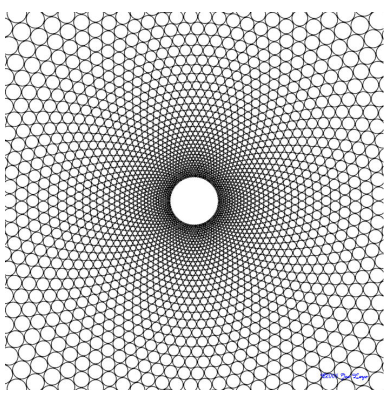
IV Toujours des spirales

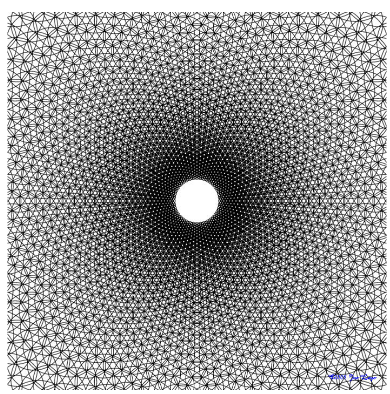












V Courbes de l'espace

On considère $\gamma : I \xrightarrow{\mathcal{C}^3} \mathbb{E}^3$ paramétrée par la longueur d'arc et $\mathbb{E}^3$ orienté.

Définition : Soit $s \in I$ un point birégulier. Le vecteur $B(s) := T(s) \wedge N(s)$ s'appelle la **BINORMALE en s à γ**.

Proposition 2.6 : Pour tout $s \in I$, le triplet $(T(s), N(s), B(s))$ est une BON directe de $\mathbb{E}^3$.

Compte tenu de ce que $\forall s \in I$, $\langle N(s), N(s)\rangle = 1$ et $\langle B(s), B(s)\rangle = 1$, on obtient en dérivant

$$\begin{cases} T' &= kN \\ N' &= aT + bB \\ B' &= cT + dN. \end{cases}$$

Définition : Le nombre $b = \langle N', B\rangle$ s'appelle la **TORSION de** γ et se note τ.

Les relations $\langle N, T\rangle = 0$, $\langle B, T\rangle = 0$ et $\langle B, N\rangle = 0$ montrent que $a = -k$, $c = 0$ et $d = -\tau$.

Théorème 2.3 (Formules de Serret-Frenet) :

$$\begin{cases} T' &= kN \\ N' &= -kT + \tau B \\ B' &= -\tau N. \end{cases}$$

Rappelons que, dans ces formules, les dérivations se font par rapport à l'abscisse curviligne.

Proposition 2.7 : Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ une courbe $\mathcal{C}^3$ birégulière mais non nécessairement paramétrée par la longueur d'arc On a

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad B(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}, \quad N(t) = B(t) \wedge T(t)$$

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \quad \text{et} \quad \tau(t) = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$$

***Démonstration* :** Procéder de la même façon que pour les courbes planes... □

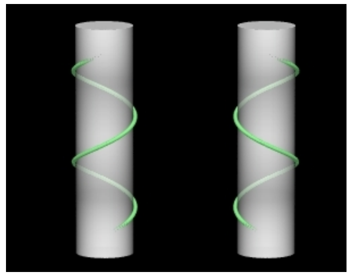
Exemple : Hélice circulaire : Soient $a > 0$, $b > 0$ et $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) &= & a\cos t \\ y(t) &= & \pm a \sin t \\ z(t) &= & bt \end{pmatrix}$$

Un calcul direct montre que l'abscisse curviligne compté depuis $t = 0$ vaut $S(t) = \sqrt{a^2 + b^2}\, t$. Puis que

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

En particulier k et τ sont des fonctions constantes.



Théorème 2.4 (Théorème fondamental des courbes gauches) : Soit $k : [a,b] \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}_+^*$ et $\tau : [a,b] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$. Il existe une courbe $\gamma : [a,b] \xrightarrow{\mathcal{C}^3} \mathbb{E}^3$ paramétrée par la longueur d'arc de courbure k et de torsion τ. Cette courbe est unique à déplacement près.

Remarque : Ce résultat ne se généralise par au cas $k : [a,b] \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}_+$.

VI Interprétation cinématique

Si on interprète $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ comme la trajectoire d'un point mobile, alors $\gamma'(t)$ est appelé le **vecteur vitesse à l'instant** t et $\gamma''(t)$ le **vecteur accélération**.

Notation :
1) $V(t)$ désigne la norme du vecteur vitesse.
2) $(\gamma'')^N$ désigne la composante normale de l'accélération.

Proposition 2.8 : Notons $R(t) = \dfrac{1}{k(t)}$ le rayon de courbure de γ. $\forall t \in I$,

$$\|(\gamma''(t))^N\| = \frac{V^2(t)}{R(t)}$$

Démonstration **:** On reparamétrise γ par $\varphi = S^{-1}$ de sorte que $\gamma \circ \varphi$ soit paramétrée par la longueur d'arc. On a vu précédemment que

$$(\gamma \circ \varphi)''(s) = \gamma''(\varphi(s)).\varphi'(s)^2 + \gamma'(\varphi(s)).\varphi''(s).$$

Par conséquent

$$\gamma''(\varphi(s)) = \frac{1}{\varphi'(s)^2}\big((\gamma \circ \varphi)''(s) - \gamma'(\varphi(s)).\varphi''(s)\big) \quad (*)$$

Or

$$(\gamma \circ \varphi)''(s) = k(\varphi(s)).N(s) \quad \text{et} \quad \gamma'(\varphi(s)) = \|\gamma'(\varphi(s))\|.T(s)$$

Les deux termes du membre de droite de la formule $(*)$ donnent donc respectivement la composante normale et la composante tangentielle de l'accélération. En particulier

$$(\gamma''(t))^N = \frac{1}{\varphi'(s)^2}(\gamma \circ \varphi)''(s)$$

Puisque

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|}$$

on obtient donc $(\gamma''(t))^N = k(t)\|\gamma'(t)\|^2$, ce qui est la formule recherchée. $\square$

VII Spirales en architecture

Newgrange, 3200 ans av. JC

L'intérieur

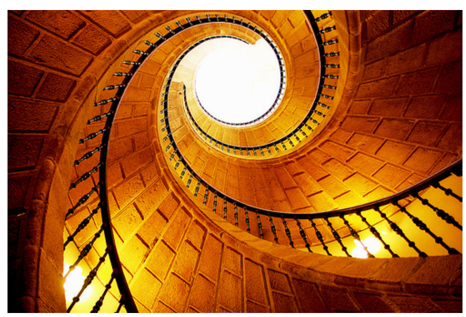
La « pierre d'entrée »

Spirales logarithmiques à Corinthe, II siècle avant JC

Escaliers « Tulip Stairs », maison de la reine, à Greenwich 1635

Escaliers de l'abbaye de Melk, Autriche 1736

Escaliers "Giuseppe Momo" en double hélice, musée du Vatican, 1932



Triple hélice au musée Pobo Galego, Espagne 1976

Escaliers en hélice du musée Guggenheim, New York 1959

Cortile della pigna Vatican