# M1G S1 : Géométrie

Vincent Borrelli Mathilde Gaillard Matthieu Jentile

Sébastien Pierrisnard Michael Yang

**Résumé**

Ce document est un polycopié de cours du module Géométrie enseigné lors du premier semestre du Master 1 Mathématiques Générales (M1G) de Lyon, réalisé par Monsieur Vincent Borelli. L'entièreté du contenu du document a été fournie par M. Borelli pendant ses enseignements lors de l'année scolaire 2020-2021.

Le but de ce polycopié est de fournir aux élèves de M1G un document de cours parallèle aux diapositives qu'utilise M. Borelli lors de ses cours, ceci afin d'en faciliter les lectures. Ainsi, le contenu est identiquement le même et ne contient aucune note personnelle.
Ce document a été réalisé en collaboration par Mathilde Gaillard, Matthieu Jentile, Sébastien Pierrisnard, Michael Yang et Jules Armand. Chacun des collaborateurs est issu de la promotion 2020-2021 du M1G et ont donc suivis les enseignements de M. Borelli.

Malgré les précautions de chacun des auteurs, il est possible que des erreurs se soient glissées çà et là. Dans ce cas (ou pour toute autre remarque vis-à-vis de ce document), il est recommandé de contacter M. Borelli, par exemple à l'adresse borrelli@math.univ-lyon1.fr.
Enfin, toutes les images présentes dans ce polycopié ne sont pas forcément libres de droits. Il n'est donc pas autorisé au lecteur de les utiliser comme bon lui semble, si ce n'est pour une utilisation personnelle.

Les collaborateurs sont profondément reconnaissants envers M. Borelli pour sa confiance en eux dans l'élaboration de ce document.

# Table des matières

# Chapitre 4

# Théorème d'inversion locale

## I Le théorème du point fixe

**Définition :** Soient $(X,d)$ et $(X',d')$ deux espaces métriques.

1) Soient $f:(X,d)\longrightarrow(X',d')$ et $k\in\mathbb{R}_+^*$. $f$ est dite **K-LIPSCHITZIENNE** lorsque $\forall x_1,x_2\in X$,

$$d'\big(f(x_1),f(x_2)\big)\leqslant k\,d(x_1,x_2)$$

2) Une fonction $k$-lipschitzienne telle que $k<1$ est appelée une **CONTRACTION**.

**Théorème 4.1 (**Théorème du point fixe de Banach (1920)) :
Soient $(X,d)$ un espace métrique complet non vide et $T:X\to X$ une contraction. $T$ admet un unique point fixe.

***Démonstration* :** Remarquons d'abord que l'inégalité de contraction interdit d'avoir deux points fixes.
• Soit $x_0\in X$. On considère la suite des itérés $x_n=T^n(x_0)=T\circ\ldots\circ T(x_0)$. Observons que si cette suite converge alors sa limite est nécessairement un point fixe de $T$. En effet si $x_\infty=\lim\limits_n T^n(x_0)$ alors, puisque $T$ lipschitzienne est continue,

$$T(x_\infty)=T\left(\lim_n T^n(x_0)\right)=\lim_n T\left(T^n(x_0)\right)=\lim_n T^{n+1}(x_0)=x_\infty$$

• Il ne reste plus qu'à démontrer que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. Soient $p\geqslant q$ et $x\in X$. Notons que

$$\begin{aligned}d\big(x,T^{p-q}(x)\big)&\leqslant d\big(x,T(x)\big)+\ldots+d\big(T^{p-q-1}(x),T^{p-q}(x)\big)\\&\leqslant\left(1+k+\ldots+k^{p-q-1}\right)d\big(x,T(x)\big)\\&\leqslant\frac{1}{1-k}\,d\big(x,T(x)\big)\end{aligned}$$

On substitue $x = T^q(x_0)$ pour obtenir

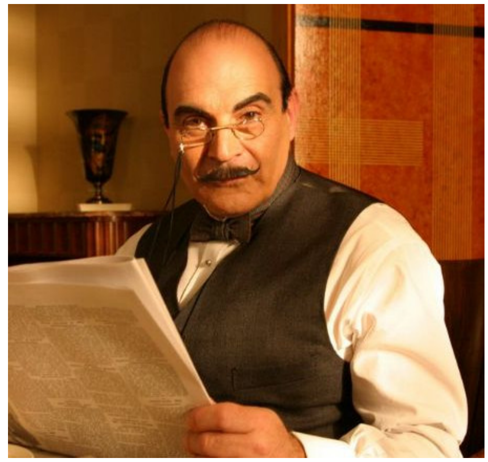
$$\begin{aligned} d\big(T^q(x_0), T^p(x_0)\big) &\leqslant \frac{1}{1-k}\ d\big(T^q(x_0), T^{q+1}(x_0)\big) \\ &\leqslant \frac{k^q}{1-k}\ d\big(x_0, T(x_0)\big) \end{aligned}$$

et puisque $k < 1$, $\big(T^n(x_0)\big)_n$ est de Cauchy. $\square$

Ce théorème est souvent appelé *Théorème du point fixe de Picard* en France. Émile Picard n'a pas découvert ce théorème, mais il fut le premier à l'utiliser pour établir l'existence de solutions d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles.

## II Émile Picard

Émile Picard
(1856-1941)



Une vague ressemblance ? David
Suchet incarnant Hercule Poirot

• Élève brillant mais peu attiré par les maths. Il haïssait la géométrie et ne l'apprenait que pour "ne pas être puni".

• Réussit le concours de l'École polytechnique (2ème) et de l'École normale supérieure (1er). Il choisit la rue d'Ulm après un entretien avec Louis Pasteur.

• Il épouse Marie Hermite, fille de son professeur Charles Hermite. Ils auront deux fils et une fille qui seront tous les trois tués lors de la première guerre mondiale.

• Il devient rapidement célèbre en démontrant le *Grand Théorème de Picard* : toute fonction holomorphe ayant une singularité essentielle prend chaque valeur une infinité de fois sur tout voisinage de cette singularité, avec au plus une exception (penser à $z \mapsto exp(z^{-1})$, l'exception est la valeur 0).

• Le *Petit Théorème de Picard* dit ceci : toute fonction entière non constante prend chaque valeur une fois au moins, avec au plus une exception (penser à $z \mapsto exp(z)$, l'exception est la valeur 0).

• Il exerce à l'École centrale pendant 42 ans formant à la mécanique plus de dix mille ingénieurs. Il est célèbre pour la clarté de ses cours.

• Il devient membre de l'Académie des Sciences à 33 ans (l'élection dut être reportée à cause de son jeune âge) puis membre de l'Académie Française à 68 ans.

• Il réussit grâce à sa grande influence à organiser le boycott des scientifiques allemands après la première guerre mondiale. Albert Einstein, venu donner une série de conférences à Paris en 1922, n'est pas invité à l'Académie des sciences !

## III Théorème d'inversion locale

Le théorème d'inversion locale et celui des fonctions implicites seront énoncés ici en dimension infinie. Contrairement au théorème du point fixe, l'intérêt d'une version en dimension infinie ne saute pas aux yeux. En effet, pour la majorité des applications, la dimension finie suffit amplement. Néanmoins, et pour citer Wikipédia, « il n'est pas inutile de bénéficier de la généralité que confère le fait de choisir les variables dans un Banach ».
Par exemple, une application du théorème d'inversion locale en dimension infinie permet de démontrer d'une façon élémentaire le résultat non trivial suivant : *si un champ de vecteurs est $\mathcal{C}^r$ alors son flot est $\mathcal{C}^r$.*

Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach.

**Définition :** Soient $U$ un ouvert de $E$, $V$ un ouvert de $F$ et $a \in U$. Une application $f : U \longrightarrow V$ est dite **DIFFÉRENTIABLE EN $a$** lorsqu'il existe une application linéaire continue $L : E \longrightarrow F$ telle que pour tout $h \in E$ vérifiant $a + h \in U$ on ait

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o\big(\|h\|\big)$$

**REMARQUE :** Une application linéaire $L : E \longrightarrow F$ n'est pas nécessairement continue.

**Proposition 4.1 :** Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire $L$ soit continue est que

$$\sup_{\|h\|_E=1} \|L(h)\|_F < +\infty$$

**Proposition 4.2** (Théorème de l'isomorphisme de Banach) : Soit $L : E \longrightarrow F$ linéaire continue inversible. $L^{-1} : F \longrightarrow E$ est continue.

**Théorème 4.2** (Théorème d'inversion locale) :
Soient $U$ un ouvert de $E$, $a \in U$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ telle que $df_a : E \longrightarrow F$ soit inversible. Il existe un voisinage ouvert $V$ de $a$ tel que $f_{|V} : V \longrightarrow f(V)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
De plus, pour $1 \leqslant k \leqslant \infty$, si $f$ est $\mathcal{C}^k$, alors la fonction réciproque $f^{-1} : f(V) \longrightarrow V$ est $\mathcal{C}^k$.

***Démonstration* :** Quitte à composer $f$ par des translations, on peut toujours supposer que $a = 0_E$ et $f(a) = 0_F$. On ne change pas non plus le problème en composant $f$ à gauche par $\Phi = (df_a)^{-1}$. Puisque $d(\Phi \circ f)_a = \Phi \circ df_a = \mathrm{Id}$, on se ramène à prouver le théorème quand $E = F$, $df_a = \mathrm{Id}$ et $a = f(a) = 0$.
Soit $y \in E$. On va montrer dans un premier temps que si $y$ appartient à un voisinage suffisamment petit de 0 alors il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$ (on ne s'intéressera à la régularité de l'application $y \mapsto x$ que dans un second temps).
Pour tout $x \in E$, on pose $\varphi(x) := f(x) - x$ et pour tout $y \in E$, $T_y(x) := y - \varphi(x)$.
Notons que

$$y = f(x) \iff T_y(x) = x$$

Montrons que $T_y$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur une boule centrée en 0. Comme $\varphi$ est $C^1$ et que $d\varphi_0 = df_0 - Id = 0$, il existe une boule ouverte $B(r) \subset U$ telle que

$$\forall x \in B(r),\ \|d\varphi_x\| < 1/2$$

Par la majoration des accroissements finis, on a

$$\forall x_1, x_2 \in B(r),\ \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

d'où l'on déduit puisque $T_y(x) = y - \varphi(x)$ :

$$\forall x_1, x_2 \in B(r),\ \|T_y(x_1) - T_y(x_2)\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

ce qui montre que $T_y$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $B(r)$ (ainsi que $\varphi = -T_0$).

Montrons que $T_y$ a un unique point fixe si $y \in B(r/2)$. Puisque $\varphi(0) = 0$, on a

$$\forall x \in B(r),\ \|\varphi(x) - \varphi(0)\| < \frac{1}{2}\|x - 0\| \leqslant \frac{r}{2}$$

$$\forall x \in B(r),\ \|T_y(x)\| < \frac{r}{2} + \|y\|$$

En particulier $\|y\| \in B(r/2) \Longrightarrow T_y\left(\overline{B(r)}\right) \subset B(r)$. Puisque $\overline{B(r)}$ est fermé dans $E$, il est complet. Le théorème du point fixe assure l'existence d'un unique point fixe $g(y)$ dans $B(r)$.
Soit $V := \{x \in U \mid f(x) \in B(r/2)\}$. On vient de montrer que $f_{|V} : V \longrightarrow f(V)$ est une bijection dont l'inverse est $g$.

Montrons que $g = f^{-1}$ est continue. Soient $y_1, y_2 \in f(V)$ et $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$. On a

$$\begin{aligned} g(y_2) - g(y_1) &= x_2 - x_1 \\ &= T_{y_2}(x_2) - T_{y_1}(x_1) \\ &= y_2 - \varphi(x_2) - y_1 + \varphi(x_1) \end{aligned}$$

d'où $\|g(y_2) - g(y_1)\| \leqslant \|y_2 - y_1\| + \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\|$.
Puisque $\varphi$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne, on déduit

$$\begin{aligned} \|g(y_2) - g(y_1)\| &\leqslant \|y_2 - y_1\| + \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| \\ &\leqslant \|y_2 - y_1\| + \frac{1}{2}\|g(y_2) - g(y_1)\| \end{aligned}$$

d'où $\frac{1}{2}\|g(y_2) - g(y_1)\| \leqslant \|y_2 - y_1\|$.
Ainsi $g = f^{-1}$ est 2-lipschitzienne, donc continue.
Puisque $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $U$ et que $df_0 = \mathrm{Id}$, il existe un rayon $r' > 0$ tel que $df_x$ soit inversible pour tout $x \in B(r')$. En remplaçant dans l'étude précédente $r$ par $\min(r, r')$, on peut toujours supposer que

$df_x$ est inversible en tout point de $V$.

On va montrer que $g = f^{-1}$ est différentiable sur $V$. La différentiabilité de $f$ en $x_0 \in V$ s'écrit

$$y - y_0 = df_{x_0}(x - x_0) + R(x)$$

où $R(x)$ est un $o\big(\|x - x_0\|\big)$, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|R(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

En composant par $(df_{x_0})^{-1}$, il vient $(df_{x_0})^{-1}(y - y_0) = x - x_0 + (df_{x_0})^{-1}(R(x))$, i.e.

$$g(y) - g(y_0) = (df_{x_0})^{-1}(y - y_0) - (df_{x_0})^{-1}(R(g(y)))$$

Il s'agit de voir que le reste $R'(y) = -(df_{x_0})^{-1}(R(g(y)))$ est un $o\big(\|y - y_0\|\big)$.
Puisque $g$ est 2-lipschitzienne, on a

$$\|x - x_0\| = \|g(y) - g(y_0)\| \leqslant 2\,\|y - y_0\|$$

$$\frac{1}{\|y - y_0\|} \leqslant \frac{2}{\|x - x_0\|}$$

$$\frac{\|R'(y)\|}{\|y - y_0\|} \leqslant \frac{2\,\|(df_{x_0})^{-1}(R(x))\|}{\|x - x_0\|} = 2\left\|(df_{x_0})^{-1}\left(\frac{R(x)}{\|x - x_0\|}\right)\right\|$$

Ainsi $R'(y)$ est un $o\big(\|y - y_0\|\big)$ et $g = f^{-1}$ est différentiable sur $V$.

Sans surprise $dg_{y_0} = (df_{x_0})^{-1}$, i.e. $d(f^{-1})_{y_0} = (df_{f^{-1}(y_0)})^{-1}$.

Montrons que $f^{-1}$ est $\mathcal{C}^1$. Puisque $f^{-1}$ est continue et que $x \mapsto df_x$ est aussi continue (car $f$ est $\mathcal{C}^1$), la formule $d(f^{-1})_{y_0} = (df_{f^{-1}(y_0)})^{-1}$ montre que $y_0 \mapsto d(f^{-1})_{y_0}$ est continue par composition d'applications continues. Ainsi $f^{-1}$ est $\mathcal{C}^1$.

Il reste à montrer que si $f$ est $\mathcal{C}^k$, alors $f^{-1}$ est $\mathcal{C}^k$ également.
Par récurrence : supposons que $f^{-1}$ soit $\mathcal{C}^s$ pour $1 \leqslant s \leqslant k-1$.
La formule $d(f^{-1})_{y_0} = (df_{f^{-1}(y_0)})^{-1}$ montre que $y_0 \mapsto d(f^{-1})_{y_0}$ est $\mathcal{C}^s$ et donc que $f^{-1}$ est $\mathcal{C}^{s+1}$. $\square$

**Remarque :** Si $E$ et $F$ sont de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(F)$ puisque $df_a : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme vectoriel.

**Corollaire 4.1 :** Les points fixes non dégénérés sont isolés.

***Démonstration*** **:** Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$ ayant au moins un point fixe, disons 0 pour fixer les idées.
Puisque $T$ n'est pas supposée contractante, il n'y a aucune raison pour que ce point fixe soit unique. Néanmoins, si $dT_0$ ne possède pas 1 comme valeur propre (on dit dans ce cas que 0 est un point fixe

non dégénéré), alors le point fixe 0 est isolé, i.e. il existe un voisinage de 0 dans lequel il est l'unique point fixe de $T$.

En effet, soit $f = T - \mathrm{id} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Le point $x \in \mathbb{R}^n$ est un point fixe si et seulement si $f(x) = 0$. On a $df_0 = dT_0 - \mathrm{Id}$ donc $\mathrm{Ker}(df_0) = \{0\}$ puisque 1 n'est pas valeur propre de $dT_0$. Ainsi $df_0$ est inversible.

En appliquant le théorème d'inversion locale, on obtient l'existence d'un voisinage $V$ de 0 tel que $f_{|V} : V \longrightarrow f(V)$ soit un difféomorphisme. En particulier, on a l'équivalence

$$x \in V \text{ et } f(x) = 0 \iff x = 0$$

i.e 0 est l'unique point fixe de $T$ dans $V$. $\square$

## IV Le théorème des fonctions implicites

Le théorème d'inversion local résout en $x$ une équation $y = f(x)$. Le théorème des fonctions implicites résout en $y$ une équation $f(x, y) = 0$. On va voir que ce problème apparemment plus général se ramène au précédent.

Soient $E_1$, $E_2$ et $F$ trois espaces de Banach, $U_1$ un ouvert de $E_1$, $U_2$ un ouvert de $E_2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U_1, U_2)$. Notons $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) : E_2 \longrightarrow F$ la différentielle de $y \mapsto f(x, y)$, une application linéaire continue.

**Théorème 4.3 (**Théorème des fonctions implicites) :
Soit $(a, b) \in U_1 \times U_2$ tel que $f(a, b) = 0$.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ est inversible, alors il existe des voisinages $V(a) \subset U_1$ et $V(b) \subset U_2$ et une application $\varphi : V(a) \longrightarrow V(b)$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\varphi(a) = b$ et

$$\forall (x, y) \in V(a) \times V(b),\ f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

De plus, la différentielle de $\varphi$ est donnée par

$$d\varphi_a = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

Enfin, si $f$ est $\mathcal{C}^k$ pour $1 \leqslant k \leqslant +\infty$, alors $\varphi$ est $\mathcal{C}^k$.

***Démonstration* :** L'idée est la suivante : on introduit

$$\begin{array}{rccc} g: & U_1 \times U_2 & \longrightarrow & U_1 \times F \\ & (x, y) & \longmapsto & \big(x, f(x, y)\big) \end{array}$$

dont on va montrer au moyen du théorème d'inversion locale qu'elle est inversible au voisinage de $(a, b)$.
L'inverse de $g$ est nécessairement de la forme

$$(x, z) \mapsto g^{-1}(x, z) = \big(x, \phi(x, z)\big)$$

Il suffit désormais de remarquer que

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\iff g(x, y) = (x, 0) \\ &\iff (x, y) = g^{-1}(x, 0) \\ &\iff y = \phi(x, 0) \end{aligned}$$

Montrons que $dg_{(a,b)} : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 \times F$ est inversible. Il faut pour cela résoudre l'équation $(v_1', v_2') = dg_{(a,b)}(v_1, v_2)$. Or

$$dg_{(a,b)}(v_1, v_2) = \left(v_1,\ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(v_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(v_2)\right)$$

ainsi
$$(v_1, v_2) = \left(v_1', \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)^{-1}\left(v_2' - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(v_1')\right)\right)$$
donc $dg_{(a,b)}$ est inversible.

Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage $V(a)\times V(b) \subset E_1 \times E_2$ tel que $g_{|V(a)\times V(b)}$ soit un $C^1$-difféomorphisme. Quitte à rétrécir $V(a)$, on peut toujours supposer que $\phi\big(V(a), 0\big) \subset V(b)$. Pour tout $(x, y) \in V(a) \times V(b)$, on a
$$f(x,y) = 0 \iff y = \phi(x,0)$$
La formule de $d\varphi_a$ s'obtient en différentiant $f\big(x, \phi(x,0)\big) = 0$ comme fonction composée. $\square$

## V Application aux courbes implicites

Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $F \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Notons $\Gamma = F^{-1}(0)$ le lieu des zéros de $F$.

**Définition :** $\Gamma$ est appelé une **COURBE PLANE DÉFINIE IMPLICITEMENT**.

**Exemple :**
**Coniques** : Pour $F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \delta$, $F^{-1}(0)$ est une conique.

**Définition :** Soit $(x_0, y_0) \in \Gamma$. $(x_0, y_0)$ est dit **RÉGULIER** lorsque les dérivées partielles $F_x(x_0, y_0)$ et $F_y(x_0, y_0)$ de $F$ ne sont pas toutes deux nulles.

**Proposition 4.3 :** Soit $(x_0, y_0)$ un point régulier de $\Gamma$. Il existe une courbe paramétrée régulière $\gamma : ]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[ \longrightarrow \Gamma$ telle que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ et dont une équation cartésienne de la tangente en $t_0$ est donnée par $F_x(x_0, y_0)(X - x_0) + F_y(x_0, y_0)(Y - y_0) = 0$.

***Démonstration*** **:** Supposons pour fixer les idées que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe $\varphi : V(x_0) \longrightarrow V(y_0)$ de classe $C^1$ telle que $\forall (x, y) \in V(x_0) \times V(y_0)$

$$(x, y) \in \Gamma \iff y = \varphi(x).$$

Quitte à rétrécir $V(x_0)$, on peut toujours supposer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $V(x_0) = ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ . On pose $t_0 := x_0$ et on définit

$$\begin{array}{cccc} \gamma : & ]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \big(t, \varphi(t)\big) \end{array}$$

Il est clair que $\gamma$ est de classe $C^1$, que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ et que $\gamma\Big(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\Big) \subset \Gamma$.
La courbe paramétrée $\gamma$ est régulière puisque $\gamma'(t) = \big(1, \varphi'(t)\big) \neq (0, 0)$. De plus,

$$\varphi'(t_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

donc $\big(F_y(x_0, y_0), -F_x(x_0, y_0)\big)$ est un vecteur tangent non nul de $\gamma$ en $t_0$.
Par conséquent $\big(F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)\big)$ est un vecteur normal non nul de $\gamma$ en $t_0$. De là, l'expression de l'équation de la tangente donnée dans la proposition. □

**Exercice** : Soient $a \geqslant b > 0$. Montrer que tous les points de l'ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

sont réguliers. Montrer ensuite qu'une équation cartésienne de la tangente en un point $(x_0, y_0)$ de $E$ est donnée par

$$\frac{x_0}{a^2} X + \frac{y_0}{b^2} Y = 1$$

## VI Ulisse Dini


Ulisse Dini (1845-1918)

• Mathématicien italien issu d'une famille relativement modeste. Il obtient une bourse à 20 ans pour étudier les mathématiques à Paris. Il y rencontre Joseph Bertrand et Charles Hermite.
• De retour à Pise, il succède à Enrico Betti à la chaire universitaire d'« Analyse et de Haute Géométrie ». Il a 25 ans. Il obtient une seconde chaire, celle d'« Analyse infinitésimale », à 31 ans. Il finit recteur de l'université de Pise à 43 ans.
• Élu au conseil municipal de Pise à 25 ans. Il est député au parlement italien à 35 ans et sénateur à 47 ans.
• La question des fonctions implicites remonte à René Descartes (1637). Pendant plus de 200 ans les mathématiciens vont proposer des méthodes plus ou moins bien justifiées pour aborder les problèmes d'inversion (en particulier Gottfried Leibniz, Johann Bernoulli et Leonhard Euler). C'est Ulisse Dini qui donnera la première démonstration du *Théorème des fonctions implicites* en 1878 à 33 ans.
• Son domaine de prédilection est celui des séries de fonctions. On lui doit le fameux *Théorème de Dini* : La convergence simple d'une suite monotone de fonctions à valeurs réelles définies et continues sur un espace compact vers une fonction continue implique sa convergence uniforme.