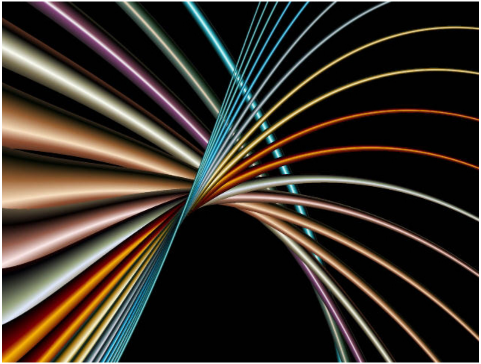
CM-C1 : Courbes paramétrées

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Une famille de courbes régulières

Régularité

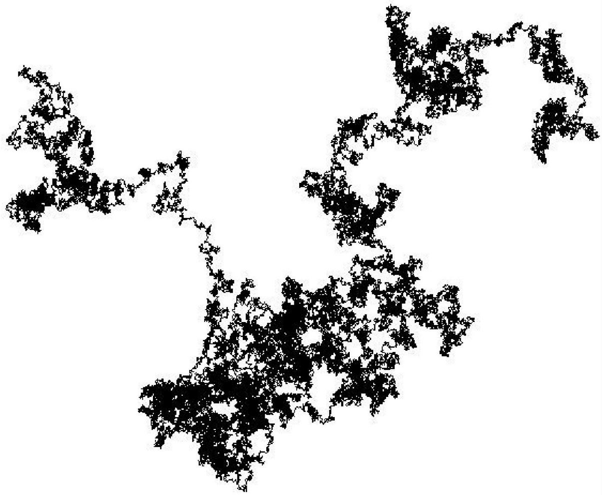
Définition.– On appelle COURBE PARAMÉTRÉE de classe C^k, $k \geq 0$, toute application $\gamma : I \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles deux-à-deux disjoints. L'ensemble $\Gamma := \gamma(I)$ s'appelle le SUPPORT de γ

• Si I est un intervalle Γ est connexe, si I est un segment, Γ est compacte.

• Sauf mention explicite du contraire, dans ce cours I sera un intervalle de $\mathbb{R}$.

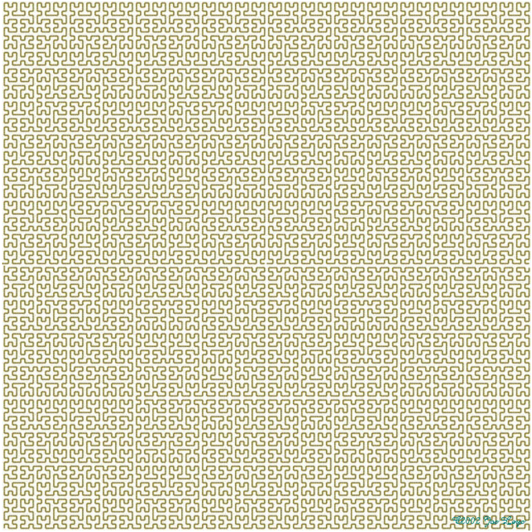
• Les courbes paramétrées C^0 peuvent s'éloigner très fortement de ce que l'intuition suggère.

Régularité



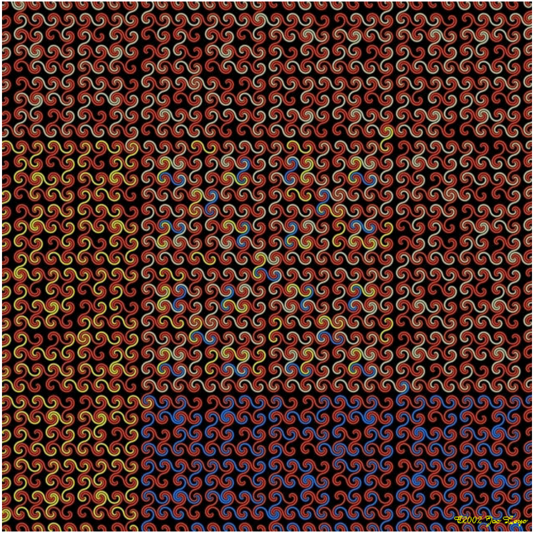
Une trajectoire brownienne

Régularité



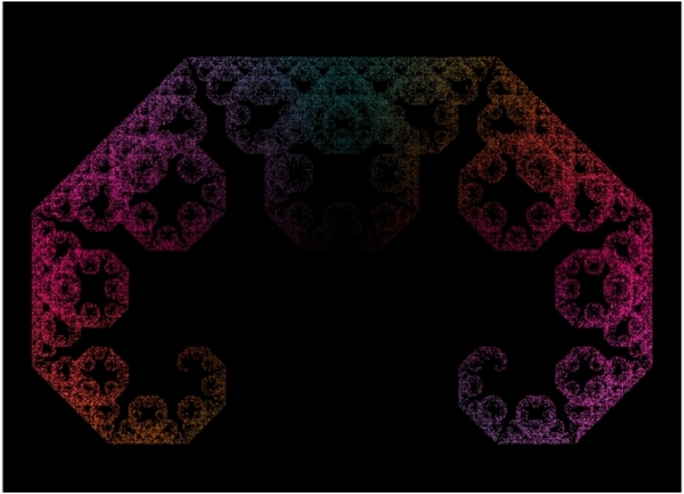
Une courbe de Péano-Hilbert

Régularité



Une autre

Régularité



La courbe dite du « dragon de Lévy »

Régularité

• Dans ce cours, on suppose que γ est C^k avec k au minimum plus grand ou égal à 1. En cas de doute, considérer que $k = +\infty$.

• Ne pas confondre la courbe paramétrée avec son support.

Un exemple.– Les supports de

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : &]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \theta & \longmapsto & (\cos\theta, \sin\theta) \end{array}$$

sont les mêmes : le cercle unité dont on a enlevé le point $(-1,0)$.

Régularité

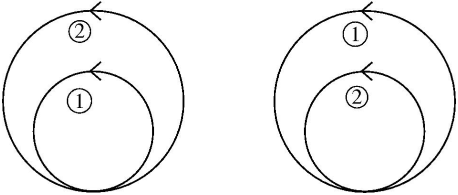
Définition.– On dit que $\gamma_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un C^k-REPARAMÉTRAGE ($k \geq 1$) de $\gamma_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ s'il existe un C^k-difféomorphisme $\varphi : J \longrightarrow I$ tel que $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \varphi$.

• Rappelons qu'une application φ est un C^k-difféomorphisme si elle est bijective et que φ et φ^{-1} sont toutes les deux C^k.

• Dans l'exemple précédent, γ_1 est un reparamétrage C^∞ de γ_0 avec $\varphi(\theta) = \tan\frac{\theta}{2}$.

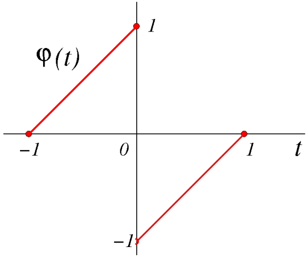
• Si γ_1 est un C^k-reparamétrage de γ_0 alors les deux courbes paramétrées ont même support. La réciproque est fausse même pour $k = 0$!

Régularité



$$\gamma_0 \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \gamma_1$$

$$I = [-1,0] \cup [0,1] \xrightarrow{\varphi} I = [-1,0] \cup [0,1]$$



Régularité

• On définit une relation d'équivalence entre les courbes paramétrées C^k de la façon suivante :

$$\gamma_0 \sim_k \gamma_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma_1 \text{ est un } C^k - \text{reparamétrage de } \gamma_0.$$

Définition.– Une classe d'équivalence s'appelle une COURBE GÉOMÉTRIQUE C^k.

Exemple.– Soient

$$\gamma_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, t^3) \end{array} \quad \text{et} \quad \gamma_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2t, 8t^3) \end{array}$$

On a $\gamma_0 = \gamma_1 \circ \varphi$ avec $\varphi(t) = \frac{t}{2}$ donc $\gamma_1 \sim_{+\infty} \gamma_0$.

Régularité

Exemple.– Soient

$$\gamma_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, t^3) \end{array} \quad \text{et} \quad \gamma_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t^3, t^9) \end{array}$$

On a $\gamma_0 = \gamma_2 \circ \psi$ avec $\psi(t) = t^{\frac{1}{3}}$. Or ψ n'est un C^k-difféomorphisme pour aucun $k \geq 1$, ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma_2 \not\sim_k \gamma_0.$$

Définition.– On appelle COURBES GÉOMÉTRIQUES ORIENTÉES C^k les classes d'équivalence pour la relation

$$\gamma_0 \overset{\circ}{\sim}_k \gamma_1 \iff \gamma_1 = \gamma_0 \circ \varphi \text{ où } \varphi \text{ est un } C^k\text{–difféomorphisme}$$

$$\text{tel que } \varphi' > 0.$$

Régularité

Définition.– Une courbe paramétrée $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est dite RÉGULIÈRE en $t \in I$ si $\gamma'(t) \neq 0$. Dans ce cas, la droite passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\gamma'(t)$ est appelée la TANGENTE de la courbe paramétrée γ en t. Si de plus γ est injective, on parle de la tangente en $\gamma(t)$.

• Une courbe paramétrée peut ne pas avoir de tangente au sens de cette définition alors que son support, vu comme un graphe, peut admettre une tangente (au sens de la tangente d'un graphe).

Exemple.– Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (t^3, t^9)$. Puisque $\gamma'(0) = 0$, cette courbe paramétrée n'a pas de tangente en $t = 0$. Pourtant son support est le graphe de $f(x) = x^3$ qui lui admet une tangente horizontale en $x = 0$.

Régularité

Définition.– Une courbe géométrique est dite RÉGULIÈRE si l'un de ses représentants $\gamma_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est régulier en tous points.

• Cette définition est cohérente puisque si

$$\gamma_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

est un autre représentant alors $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \varphi$ et $\gamma_1' = \varphi'.\gamma_0' \circ \varphi$. Puisque φ est C^k-difféomorphisme, $\varphi' \neq 0$ et

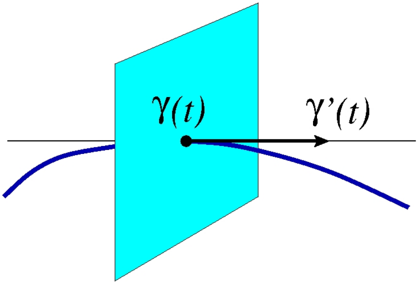
$$\gamma_1'(t) = 0 \iff \gamma'(\varphi(t)) = 0.$$

Régularité

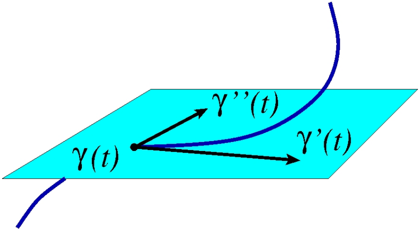
Définition.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Tout plan contenant la tangente s'appelle PLAN TANGENT. Si de plus $\mathbb{R}^3$ est muni d'un produit scalaire, alors le plan perpendiculaire à la tangente s'appelle PLAN NORMAL et toute droite perpendiculaire à la tangente s'appelle une DROITE NORMALE.

Définition.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Un point $t \in I$ pour lequel $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont linéairement indépendants est dit BIRÉGULIER. En un tel point t, on appelle PLAN OSCULATEUR le plan $\gamma(t) + Vect(\gamma'(t), \gamma''(t))$. Si γ est injective, on parle de plan osculateur au point $\gamma(t)$.

Régularité



Plan normal



Plan osculateur

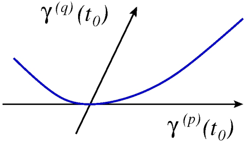
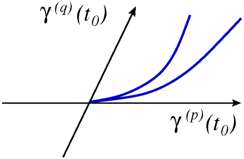
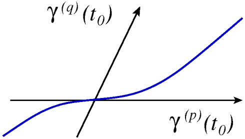
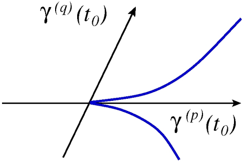
Régularité

• Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe C^∞ et $t_0 \in I$. On note $p \geq 1$ le plus petit entier tel que $\gamma^{(p)}(t_0) \neq 0$ et $q > p$ le plus petit entier tel que

$$dim\ Vect(\gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0)) = 2.$$

• Si les entiers p et q existent alors la courbe prend au voisinage de t_0 l'une des formes suivantes :

Régularité

	p impair	p pair
q pair	 Point ordinaire	 Point de rebroussement de 2nd espèce
q impair	 Point d'inflexion	 Point de rebroussement de 1ère espèce

Régularité

Démonstration.– On suppose d'abord que

$$\gamma^{(p+1)}(t_0) = \ldots = \gamma^{(q-1)}(t_0) = 0.$$

• Le développement limité de γ s'écrit :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\gamma^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\gamma^{(q)}(t_0) + o((t-t_0)^q)$$

d'où le tableau.

• Le cas général procède du même principe $\square$

Remarque.– Attention, les entiers p et q peuvent ne pas exister même si γ est C^∞. Penser à $\gamma(t) = (t, 0)$. Réfléchir également au cas des courbes paramétrées C^∞ mais non analytiques.

Giuseppe Peano (1858-1932)

Giuseppe Peano (1858-1932)

• Mathématicien italien essentiellement intéressé par la formalisation des mathématiques.

• Découvre de nombreux contre-exemples, « sa » courbe en est le plus célèbre.

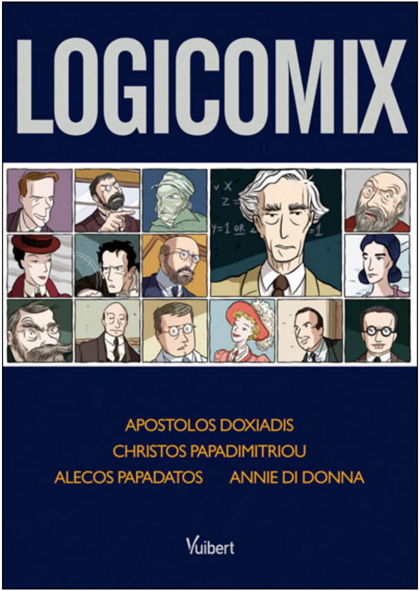
• Pionnier de la méthode axiomatique moderne : il met au point une axiomatisation de l'arithmétique qui porte aujourd'hui son nom.

• Consacre la fin de sa vie à la mise au point et à la promotion du *latino sine flexione* un latin à la grammaire très simplifiée, qu'il voyait comme une langue pour les échanges internationaux, en particulier scientifiques.

• Protagoniste indirect de la *crise des fondements des mathématiques* au travers de l'influence de son oeuvre sur Bertrand Russell.

Bertrand Russell (1872-1970)

La crise des fondements



Courbes en polaire

• On note

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

et M un point de $\mathbb{R}^2$.

Définition.– Tout couple (r,θ) tel que $\Phi(r,\theta) = M$ s'appelle un SYSTÈME DE COORDONNÉES POLAIRES de M.

• Notons que Φ n'est pas injective.

• On pose

$$\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi,\pi[\quad \text{et} \quad \mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}.$$

Courbes en polaire

Lemme.– *L'application* $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathcal{U}$ *est un* C^∞*-difféomorphisme.*

Démonstration.– En exercice. L'application réciproque est donnée par

$$\begin{array}{rccl} \Phi^{-1} : & \mathcal{U} & \longrightarrow & \Omega \\ & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = 2\arctan\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array} \right. \end{array}$$

$\square$

Courbes en polaire

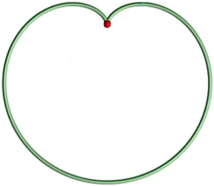
Définition.– Une courbe est dite DÉFINIE PARAMÉTRIQUEMENT EN COORDONNÉES POLAIRES si elle est donnée sous la forme

$$t \longmapsto \gamma(t) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)).$$

Une courbe paramétrée est dite POLAIRE si elle s'écrit sous la forme

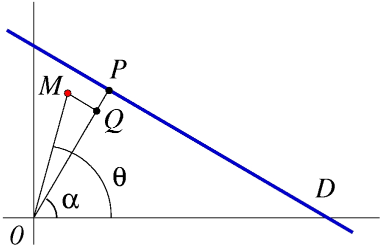
$$\theta \longmapsto \gamma(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta).$$

Exemple 1.– La cardioïde $r(\theta) = 1 + \cos\theta$



Courbes en polaire

Exemple 2.– Equation polaire des droites. Soit D une droite du plan ne passant pas par l'origine O. On note P l'image de O par la projection orthogonale sur D.



• Soit (h, α) les coordonnées polaires de P. On a

$$\overline{OQ} = r\cos(\theta - \alpha) \quad \text{et}$$

$$M \in D \iff Q = P \iff \overline{OQ} = h \iff r\cos(\theta - \alpha) = h.$$

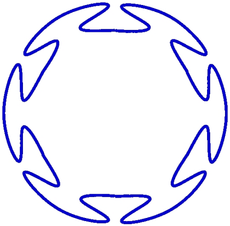
Courbes en polaire

Lemme.– *Une équation polaire de D est donnée par*

$$\forall \theta \in \left]\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}\right[, \quad r(\theta) = \frac{h}{\cos(\theta - \alpha)}.$$

Question (laissée à votre sagacité).– Que se passe-t-il si la droite D passe par l'origine ?

Exercice.– Le dessin ci-dessous peut-il être le support d'une courbe polaire ?



Courbes en polaire

Proposition.– *Une courbe polaire C^1 est régulière ssi*

$$r^2 + (r')^2 \neq 0.$$

En particulier une courbe polaire C^1 a, au plus, un point singulier qui est nécessairement à l'origine.

Démonstration.– Un calcul direct montre que

$$\|\gamma'(\theta)\|^2 = r^2(\theta) + (r')^2(\theta).$$

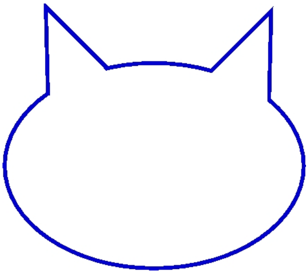
Donc

$$\gamma'(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\theta) = 0$$

i. e. le point singulier est à l'origine. □

Courbes en polaire

Exercice.– Le dessin ci-dessous peut-il être le support d'une courbe polaire ?

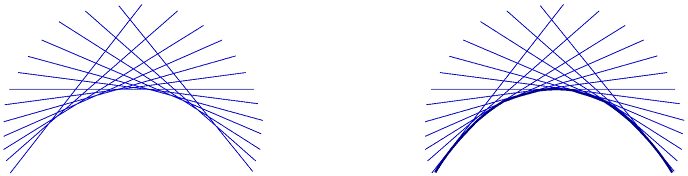


Réponse.– Oui en C^0, non en C^1.

• En revanche, ce support est celui d'une courbe paramétrée C^1 (et même C^∞).

Enveloppes

DÉFINITION.– On dit que le support Γ d'une courbe paramétrée injective est l'ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE DROITES $\mathcal{F}$ si l'ensemble des tangentes à la courbe est $\mathcal{F}$.



Observation naïve.– Tout support Γ de courbe paramétrée régulière injective γ est donc l'enveloppe de la famille de droites constituée par ses tangentes.

• Le problème se pose donc dans l'autre sens : étant donnée $\mathcal{F}$ comment déterminer γ ?

Enveloppes

• Soient $a, b, c \in C^1(I)$ telles que

$$\forall t \in I, \quad (a(t), b(t)) \neq (0,0).$$

Ainsi, pour $t \in I$, l'équation

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$$

définit une droite D_t. On pose $\mathcal{F} = (D_t)_{t \in I}$.

Proposition.– *Si*

$$\forall t \in I, \quad \delta(t) = a(t)b'(t) - b(t)a'(t) \neq 0$$

alors la courbe enveloppe de $\mathcal{F}$ est le support de $t \longmapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ *où*

$$x(t) = \frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} b(t) & c(t) \\ b'(t) & c'(t) \end{vmatrix}, \quad y(t) = -\frac{1}{\delta(t)} \begin{vmatrix} a(t) & c(t) \\ a'(t) & c'(t) \end{vmatrix}.$$

Enveloppes

Démonstration.– Cherchons une courbe enveloppe qui soit le support d'une courbe paramétrée γ telle que

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) \in D_t \quad \text{et} \quad \gamma'(t) \in \overrightarrow{D_t}.$$

• Ces conditions conduisent aux deux équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) & = & 0 \\ a(t)x'(t) + b(t)y'(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

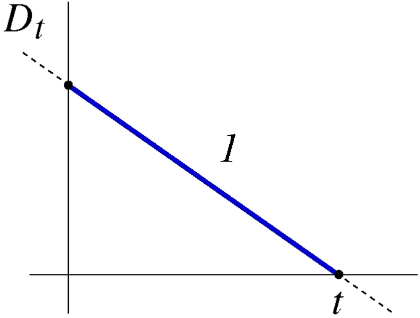
• En dérivant la première équation et compte tenu de la seconde, ce système est èquivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) & = & 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

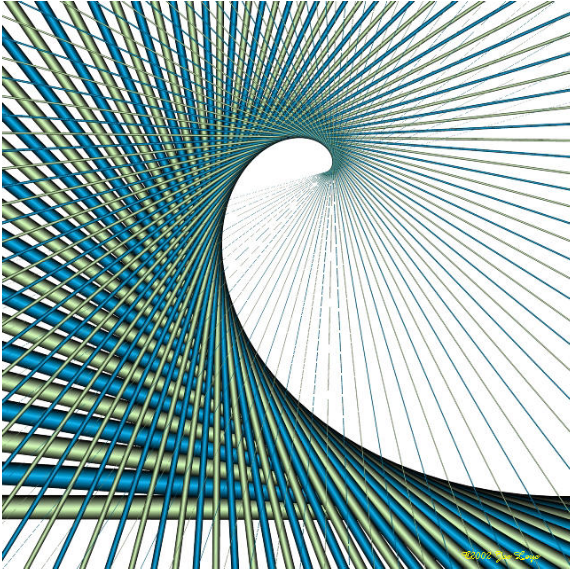
dont la résolution fournit les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ données dans la proposition.

Enveloppes

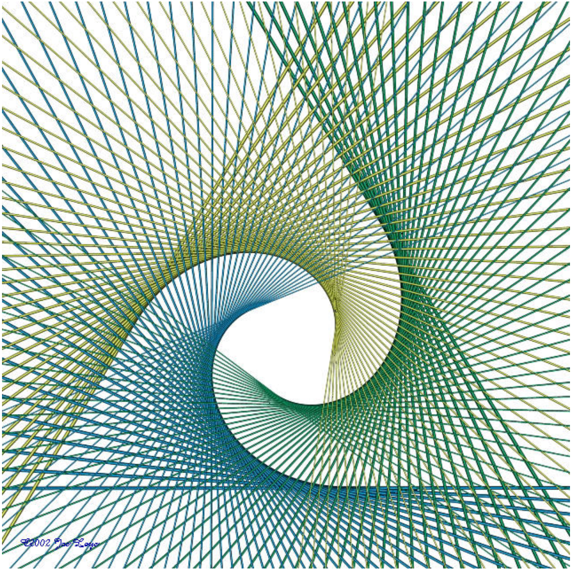
Exercice.– Trouver l'enveloppe de la famille de droites $(D_t)_{t\in[0,1]}$ du dessin ci-dessous.



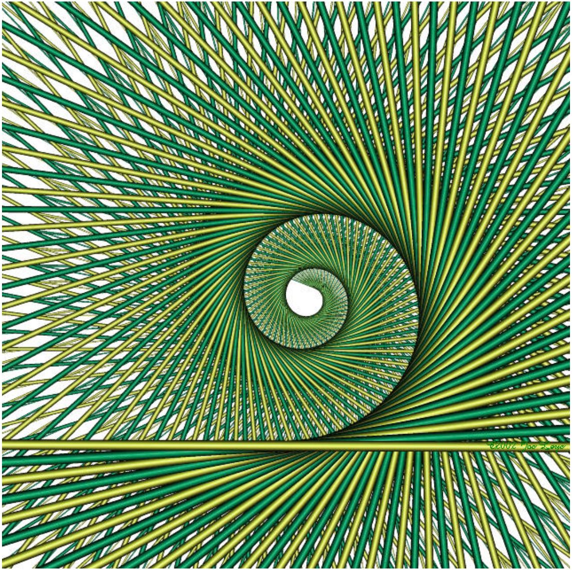
Enveloppes



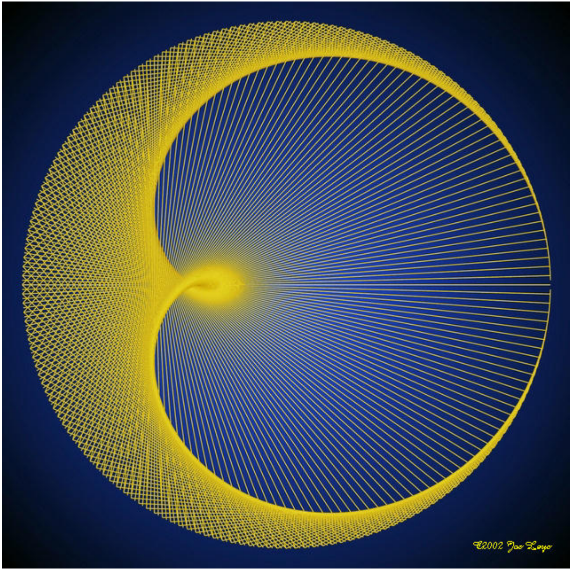
Enveloppes



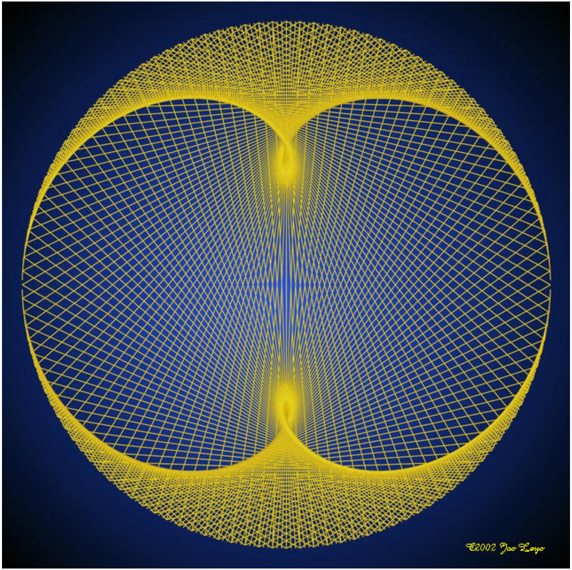
Enveloppes



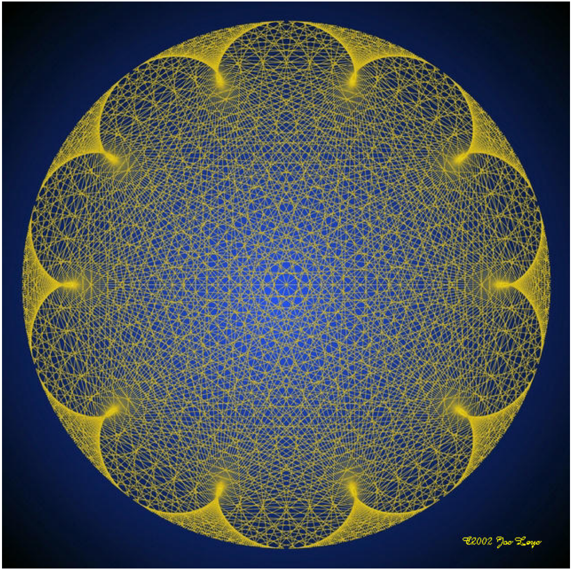
Enveloppes



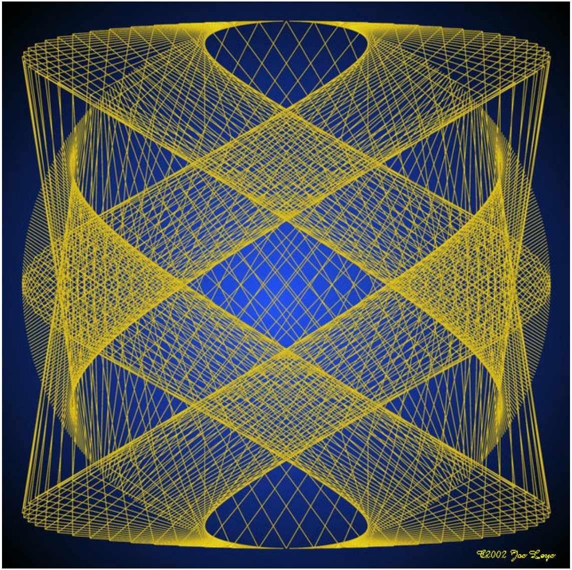
Enveloppes



Enveloppes



Enveloppes



Enveloppes

L'équation de Clairaut.– *Soit* $g \in C^1(I)$ *et* $(D_t)_{t\in I}$ *la famille de droites d'équation*

$$y = tx + g(t)$$

et soient $y : I \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ *et* $\Gamma = \{(x, y(x)) \mid x \in I\}$. *Si* Γ *est courbe enveloppe de* $(D_t)_{t\in I}$ *alors* y *satisfait à l'équation différentielle*

$$y = xy' + g(y').$$

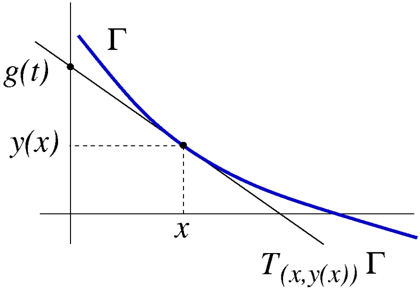
• La réciproque est délicate. Elle conduit à la notion de *solution générale* et de *solution singulière* de l'équation de Clairaut.

Enveloppes

Démonstration.– Soit $t \in I$ et $(x, y(x))$ un point de Γ où la tangente est D_t alors

$$(x, y(x)) \in D_t \iff y(x) = tx + g(t) \qquad (1)$$

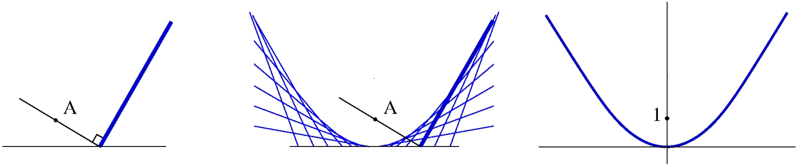
$$T_{(x,y(x))}\Gamma = D_t \implies y'(x) = t \qquad (2)$$



• En éliminant t dans (1) grâce à (2) on obtient l'équation de Clairaut.

Enveloppes

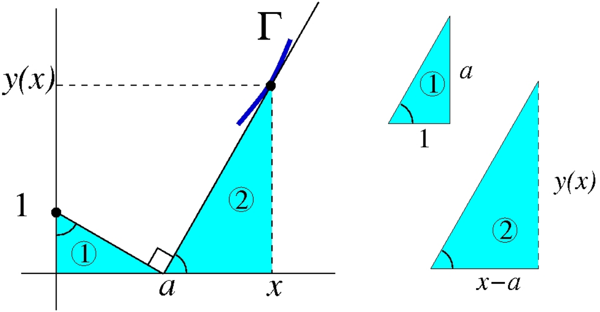
Exemple.– On considère la famille des équerres infinies dont l'un des côtés est astreint à passer par un point A et dont l'angle droit est sur une droite horizontale. Soit $\mathcal{F}$ la famille de droites déduite des positions de l'autre côté.



• Il s'agit de montrer que l'enveloppe est une parabole.

Enveloppes

• On choisit le repère de façon à ce que A ait pour coordonnées $(0, 1)$. On note a l'abscisse du sommet de l'angle droit.



• Les triangles 1 et 2 sont semblables donc

$$\frac{y(x)}{x-a} = \frac{a}{1} \qquad (1)$$

Enveloppes

• L'hypothénuse du triangle 2 est la tangente à Γ en $(x, y(x))$ donc, si $x \neq a$,

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x-a}.$$

(Au fait que se passe-t-il si $x = a$?)

• Le cumul des deux égalités précédentes donne $y'(x) = a$, d'où en reportant dans (1) :

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x - y'(x)}$$

et

$$y(x) = xy'(x) - (y'(x))^2 \qquad (2)$$

qui est l'équation de Clairaut de notre problème.

Enveloppes

• Si l'on dérive (2) il vient

$$y'(x) = y'(x) + xy''(x) - 2y''(x)y'(x)$$

d'où

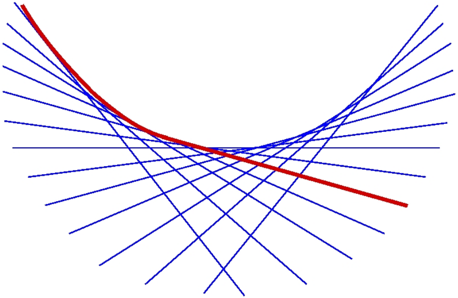
$$0 = y''(x)(x - 2y'(x)).$$

• $x - 2y'(x) = 0 \iff y(x) = \frac{1}{4}x^2 + cte$ et en remplaçant dans (2) on voit que nécessairement $cte = 0$.

• $y''(x) = 0 \iff y(x) = \alpha x + \beta$ et en remplaçant dans (2) on voit que nécessairement $\beta = -\alpha^2$.

• Réciproquement $y_\alpha = \alpha x - \alpha^2$ et $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ sont solutions de (2) mais ce ne sont pas là toutes les solutions, d'autres peuvent être obtenues par raccordement.

Enveloppes



Une solution obtenue par raccordement

• Les solutions linéaires y_α sont appelées SOLUTIONS GÉNÉRALES de l'équation de Clairaut, la solution $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ est elle dite SOLUTION SINGULIÈRE.

Alexis Clairaut (1713-1765)

Alexis Clairaut (1713-1765)

• Un des plus grands mathématiciens de son temps.

• Lit son premier mémoire à l'Académie des sciences alors qu'il n'a pas treize ans et devient académicien à dix-huit ans.

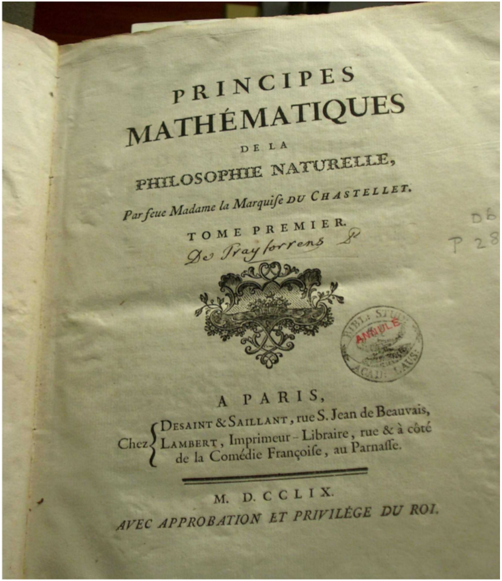
• Participe à l'expédition en Laponie destinée à vérifier l'aplatissement de la Terre aux pôles.

• Résout au moyen d'une approximation au troisième ordre le problème du mouvement de l'apside de la Lune et conforte ainsi la théorie de Newton.

• Il a pour élève la marquise du Châtelet avec laquelle il réalisera la première traduction en français des *Principia* de Newton.

La marquise du Châtelet (1706-1749)

Clairaut et du Châtelet



PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE,
Par feue Madame la Marquiſe DU CHASTELLET.
TOME PREMIER.
De Prayforrens

A PARIS,
Chez DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais,
LAMBERT, Imprimeur-Libraire, rue & à côté de la Comédie Françoiſe, au Parnaſſe.

M. D. CCLIX.
AVEC APPROBATION ET PRIVILÈGE DU ROI.

Voltaire jaloux ?

« La marquise du Châtelet est bien meilleure élève que Voltaire »