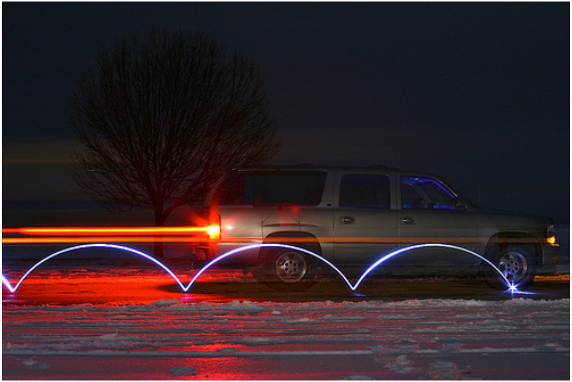
CM-C3 : La formule de Green-Riemann

Vincent Borrelli

Université de Lyon

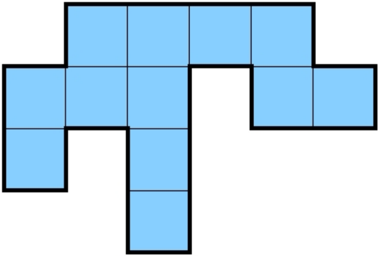


Une cycloïde

Exemples introductifs

Objectif de la formule de Green-Riemann.– Déterminer l'aire circonscrite par une courbe plane à partir du simple parcours de celle-ci.

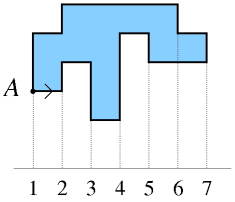
Exemple 1 : la méthode de l'arpenteur.– Soit D un domaine du plan réunion de carrés de côté 1 et de coordonnées entières.

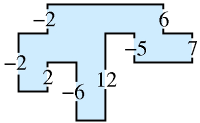


Un domaine formé de 12 carrés

Exemples introductifs

• On effectue une addition ou une soustraction à chaque arête verticale rencontrée le long du parcours. Dans cet exemple, on démarre au point A.





• La première arête est horizontale, elle compte 0.

• On monte ensuite d'une case sur la verticale n°2, on compte $+1 \times 2$.

• Puis vient une horizontale qui compte 0.

Exemples introductifs

• puis la verticale n°3 descendante de longueur 2, on la compte -2×3.

• la suivante compte 0.

• la verticale n°4 monte de trois cases, on compte $+3 \times 4$, etc...

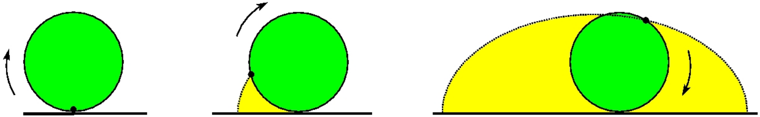
• On additionne le tout, le nombre obtenu donne l'aire de la figure

$$Aire(D) = 2 - 6 + 12 - 5 + 7 + 6 - 2 - 2 = 12.$$

• La méthode de l'arpenteur est une conséquence directe de la formule de Green-Riemann.

Exemples introductifs

Exemple 2 : la cycloïde ou roulette de Pascal.– Il s'agit de la trajectoire suivi par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite.



• En prenant le rayon du cercle égal à 1, on obtient paramétriquement :

$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{cases} x(t) & = & t - \sin t \\ y(t) & = & 1 - \cos t \end{cases}$$

Exemples introductifs

• La détermination de l'aire sous une arche de cycloïde a occupé un grand nombre de mathématiciens au XVIIème siècle. La question a finalement été résolue par Roberval.

• L'aire sous une arche de cycloïde est de 3π.

• La formule de Green-Riemann permet –entre autres– de retrouver facilement le résultat de Roberval.

Formes différentielles de $\mathbb{R}^2$

Définition.– Une FORME DIFFÉRENTIELLE DE DEGRÉ 1 sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ est une application

$$\alpha : \mathcal{U} \xrightarrow{C^\infty} (\mathbb{R}^2)^*.$$

• On note $\Omega^1(\mathcal{U})$ l'espace vectoriel des formes différentielles de degré 1 sur $\mathcal{U}$. On note aussi parfois $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)^*$ au lieu de $(\mathbb{R}^2)^*$.

• Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ alors $df \in \Omega^1(\mathcal{U})$.

• Soit (e_1, e_2) la base standard de $\mathbb{R}^2$. On note traditionnellement $dx := e_1^*$ et $dy := e_2^*$.

• Si $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ alors il existe $P, Q \in C^\infty(\mathcal{U})$ telles que

$$\alpha_{(x,y)} = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Formes différentielles de $\mathbb{R}^2$

• On pose

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^2)^* = \{ \text{ formes bilinéaires alternées } B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

Rappelons que B est alternée si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \qquad B(x,y) = -B(y,x).$$

Exemple.– Le déterminant de deux vecteurs dans la base standard de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & det(u,v). \end{array}$$

Définition.– Une FORME DIFFÉRENTIELLE DE DEGRÉ 2 sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ est une application

$$\omega : \mathcal{U} \xrightarrow{C^\infty} \Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*.$$

Formes différentielles de $\mathbb{R}^2$

• L'espace vectoriel des formes différentielles de degré 2 sur $\mathcal{U}$ est noté $\Omega^2(\mathcal{U})$.

• Si $\omega \in \Omega^2(\mathcal{U})$ alors il existe $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ telle que

$$\omega_{(x,y)} = f(x,y)det.$$

• Par convention, une forme différentielle de degré 0 sur $\mathcal{U}$ est une fonction $f : \mathcal{U} \stackrel{C^\infty}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ ainsi $\Omega^0(\mathcal{U}) = C^\infty(\mathcal{U})$.

• Il n'y a pas de forme différentielle de degré > 2 sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$.

Formes différentielles de $\mathbb{R}^2$

Définition.– Soient $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathcal{U})$. Le PRODUIT EXTÉRIEUR de α par β est la 2-forme différentielle

$$\alpha \wedge \beta : \mathcal{U} \longrightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*$$

définie pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, par

$$\alpha \wedge \beta_{(x,y)}(u, v) = \alpha_{(x,y)}(u)\beta_{(x,y)}(v) - \alpha_{(x,y)}(v)\beta_{(x,y)}(u).$$

- On a $det = dx \wedge dy$. Ainsi $\omega \in \Omega^2(\mathcal{U})$ s'écrit $\omega = f\, dx \wedge dy$.
- Bien sûr $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ et donc $\alpha \wedge \alpha = 0$.
- Si $\alpha = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy$ et $\beta = \beta_1 dx + \beta_2 dy$ alors

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) dx \wedge dy.$$

Formes différentielles de $\mathbb{R}^2$

• Notons que la différentielle usuelle est une application $\mathbb{R}$-linéaire $d : \Omega^0(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^1(\mathcal{U})$.

Définition.– La DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE est une extension de la différentielle usuelle à $\Omega^k(\mathcal{U})$,$k > 0$. Elle est encore notée

$$d : \Omega^k(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{U})$$

et définie comme suit :

• Si $\alpha_{(x,y)} = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ alors

$$d\alpha_{(x,y)} := \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dx \wedge dy$$

• Si $\omega_{(x,y)} = f(x,y)dx \wedge dy$ alors $d\omega := 0$.

Formes différentielles de $\mathbb{R}^2$

Proposition.– *Soit* $\lambda \in \Omega^k(\mathcal{U})$, $0 \le k \le 2$. *On a* $d(d\lambda) = 0$.

Démonstration.– Supposons $\lambda \in \Omega^0(\mathcal{U})$ i.e. $\lambda = f$ est une fonction. Alors

$$df_{(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

et

$$d(df) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\right) dx \wedge dy.$$

Puisque $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, le lemme de Schwarz implique $d(df) = 0$.

- Si $\lambda \in \Omega^1(\mathcal{U})$ alors $d\lambda \in \Omega^2(\mathcal{U})$ et donc $d(d\lambda) = 0$.
- Si $\lambda \in \Omega^2(\mathcal{U})$ alors $d\lambda = 0$ $\square$

Formes différentielles de $\mathbb{R}^2$

Exercice.– Montrer que si $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ et $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ alors

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + fd\alpha.$$

Blaise Pascal (1623-1662)

Blaise Pascal (1623-1662)

• Mathématicien, physicien, philosophe, moraliste et théologien !

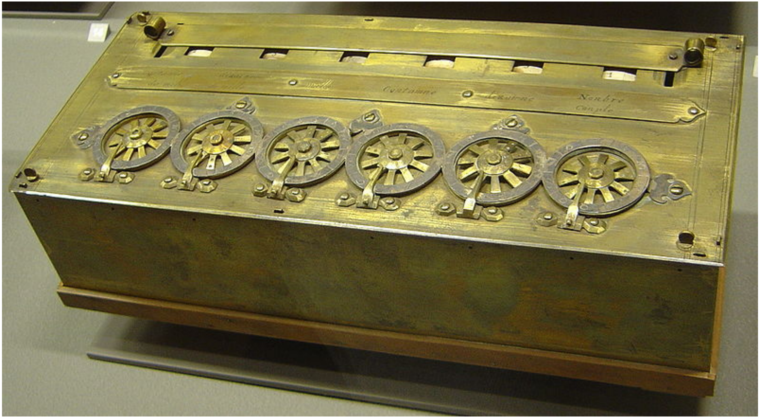
• Il invente en 1645 la Pascaline : une machine à calculer dont il construira une vingtaine d'exemplaires.

• Enfant précoce, il publie un traité de géométrie projective à seize ans !

• Il résout le « problème des partis » et donne ainsi naissance au calcul des probabilités.

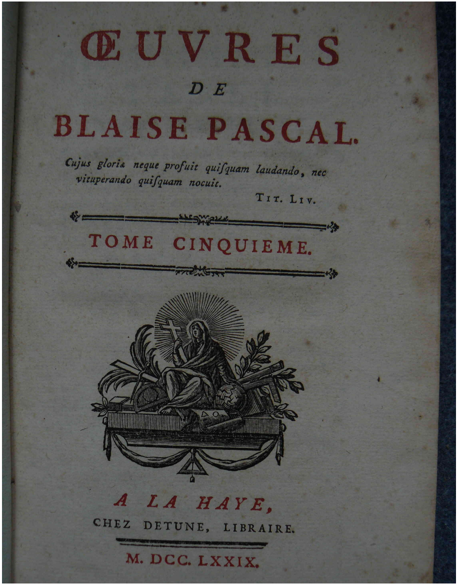
• Après une expérience mystique, il délaisse les mathématiques et la physique et se consacre à la réflexion philosophique et religieuse.

Blaise Pascal (1623-1662)



Blaise Pascal (1623-1662)

Blaise Pascal (1623-1662)



Blaise Pascal (1623-1662)

TRAITÉ GÉNÉRAL

DE LA ROULETTE:

Ou Problêmes touchant la Roulette, proposés publiquement & résolus par A. DETTONVILLE.

AVERTISSEMENT.

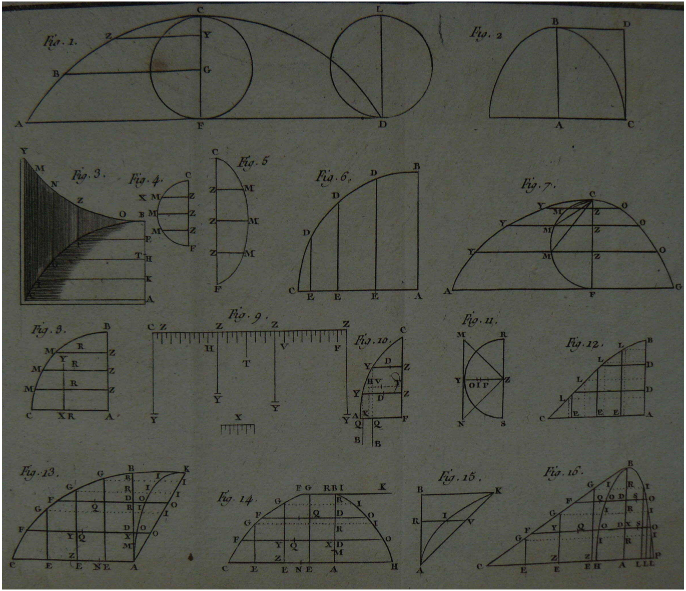
ON suppose ici qu'on sache la définition de la Roulette, & qu'on soit averti des Écrits qui ont été envoyés sur ce sujet à tous les Géometres pour leur proposer les problêmes suivants.

PROBLÊMES proposés au mois de Juin 1658.

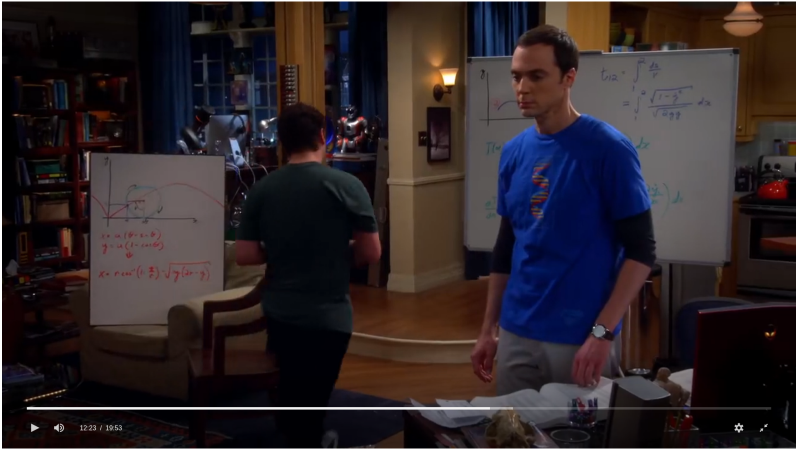
Étant donnée (Fig. 22.) *une portion quelconque de la Roulette* COS, *retranchée par une ordonnée quelconque* OS *à l'axe* CO: *trouver la dimension & le centre de gravité, tant du triligne* COS, *que de ses demi-solides formés par ce triligne, tourné premiérement autour de sa base* OS, *& ensuite autour de son axe* CO, *d'un demi-tour seulement : en supposant qu'on connoisse la raison de la base de la Roulette* AF *à son axe* FC, *c'est-à-dire, de la circonférence au diametre?* Fig. 22

TOME V. Bb PROBLÊMES

Blaise Pascal (1623-1662)



Big Bang Theory S8-E2



Intégration des formes différentielles

• Soient (e_1, e_2) la base standard de $\mathbb{E}^2$ orienté, $dx = e_1^*$, $dy = e_2^*$ les formes différentielles associées.

Définition.– La 2-forme $\omega_0 = dx \wedge dy$ s'appelle la FORME VOLUME canonique de $\mathbb{E}^2$.

Lemme.– *La 2-forme ω_0 ne dépend pas de la b.o.n. directe choisie pour la définir.*

Démonstration.– En effet, si $e_1' = R_\theta e_1$, $e_2' = R_\theta e_2$ alors

$$\left\{ \begin{array}{rcr} dx' = (e_1')^* & = & \cos\theta e_1^* + \sin\theta e_2^* \\ dy' = (e_2')^* & = & -\sin\theta e_1^* + \cos\theta e_2^*. \end{array} \right.$$

Intégration des formes différentielles

- Par conséquent

$$\begin{aligned} dx' \wedge dy' &= (\cos\theta dx + \sin\theta dy) \wedge (-\sin\theta dx + \cos\theta dy) \\ &= \cos^2\theta dx \wedge dy - \sin^2\theta dy \wedge dx \\ &= dx \wedge dy \end{aligned}$$

$\square$

Proposition.– *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \Omega^2(\mathcal{U}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathcal{U}) \\ & \omega & \longmapsto & f \end{array}$$

où

$$f = \frac{\omega(e_1, e_2)}{\omega_0(e_1, e_2)}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Intégration des formes différentielles

Démonstration.– Il suffit de remarquer que toute forme bilinéaire alternée de $\mathbb{R}^2$ est proportionnel à un déterminant. $\square$

Définition.– Soit D une partie quarrable de $\mathbb{E}^2$ et $\omega \in \Omega^2(\mathcal{U})$ alors l'INTÉGRALE DE ω SUR D est le nombre

$$\int_D \omega := \int_D f \, dxdy$$

où $f = \Phi(\omega)$.

• Formellement cette définition peut être vue comme un simple jeu d'écriture :

$$\int_D \omega = \int_D f\omega_0 = \int_D f \, dx \wedge dy = \int_D f \, dxdy.$$

Intégration des formes différentielles

• Soit $\gamma : I \stackrel{C^\infty}{\longrightarrow} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$.

DÉFINITION.– La 1-forme $\gamma^*\alpha \in \Omega^1(I)$ définie par

$$\forall X \in \mathbb{R}, \quad (\gamma^*\alpha)_t(X) = \alpha_{\gamma(t)}(d\gamma_t(X))$$

est appelé le TIRÉ EN ARRIÈRE de α par γ.

Exemple.– Soient $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ & t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \quad \text{et} \quad \alpha_{(x,y)} = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

Intégration des formes différentielles

• On note encore $\overrightarrow{\epsilon}$ le vecteur de la base o.n. directe de $\mathbb{E}$ orienté. On a

$$(\gamma^*\alpha)_t(\overrightarrow{\epsilon}) = \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \frac{\cos t(\cos t) - \sin t(-\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1.$$

• On note $dt = \overrightarrow{\epsilon}^*$. Ainsi $(\gamma^*\alpha)_t = dt$.

Définition.– Soient $\gamma = I \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$. L'INTÉGRALE CURVILIGNE de α le long de γ est le nombre

$$\int_\gamma \alpha := \int_I \gamma^*\alpha.$$

Exemple (suite).– Soit $I = [0, 2\pi]$. alors

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^{2\pi} \gamma^*\alpha = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Intégration des formes différentielles

Proposition.– *L'intégrale curviligne est indépendante des reparamétrages préservant l'orientation.*

Démonstration.– Soit $\varphi : J \longrightarrow I$ un reparamétrage tel que $\varphi' > 0$ et $\delta = \gamma \circ \varphi$. On a

$$\begin{aligned}
\int_J \delta^*\alpha &= \int_J \alpha_{\delta(s)}(\delta'(s))ds \\
&= \int_J \alpha_{\gamma(\varphi(s))}(\varphi'(s).\gamma'(\varphi(s)))ds \\
&= \int_J \alpha_{\gamma(\varphi(s))}(\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)ds \\
&= \int_I \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt
\end{aligned}$$

où bien sûr $t = \varphi(s)$. $\square$

Intégration des formes différentielles

Définition.– Une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ de classe C^k, $k \geq 1$, est dite FERMÉE si pour tout $j \in \{0, ..., k\}$ on a

$$\gamma^{(j)}(a) = \gamma^{(j)}(b).$$

• On dit aussi que γ est un LACET basé en $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Proposition.– *Si $\alpha = df$ et γ de classe C^1 fermée alors*

$$\int_\gamma \alpha = 0.$$

Démonstration.– On a

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma df = \int_a^b \gamma^*(df) = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt$$

$$= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)dt = f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a) = 0$$

Intégration des formes différentielles

Exemple.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (\cos t \sin t)$ et $\alpha = xdy + ydx$. Alors

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^{2\pi} \gamma^*\alpha = 0$$

car $\alpha = df$ avec $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto xy$.

Remarque.– La démonstration de la proposition laisse clairement apparaître que le résultat perdure pour γ fermée C^k-par morceaux, $k \geq 1$.

Gilles Personne de Roberval (1602-1675)

Gilles Personne de Roberval (1602-1675)

• Mathématicien, physicien, inventeur de la balance à deux fléaux dite « balance de Roberval ».

• D'origine modeste, il naquit dans le champ où sa mère faisait la moisson...

• Résout le problème de la quadrature de la cycloïde.

• Occupe simultanément trois chaires au Collège royal : une de philosophie et deux de mathématiques : celle de Pierre de La Ramée et celle de Pierre Gassendi !

• Une foi absolue dans le seul témoignage des sens. Célèbre pour son caractère entier et querelleur. Ses cours ont beaucoup de succès bien qu'il terrifie ses élèves par son ton impérieux et magistral.

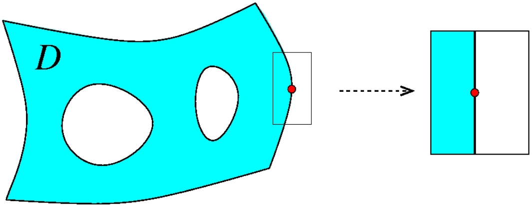
Gilles Personne de Roberval (1602-1675)

La formule de Green-Riemann

Définition.– Un lacet $\gamma : [a, b] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est dit *simple* si γ restreinte à $[a, b[$ est injective.

Définition.– Un COMPACT $D \subset \mathbb{R}^2$ est dit À BORD si sa frontière $\partial D = D \setminus \mathring{D}$ est une réunion disjointe d'un nombre fini de supports $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ de lacets simples et de classe C^1 par morceaux et si pour tout point régulier $p \in \Gamma_i$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de p et un difféomorphisme $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que

$$\phi(D \cap \mathcal{U}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x \leq 0\}.$$



Un compact à bord

La formule de Green-Riemann

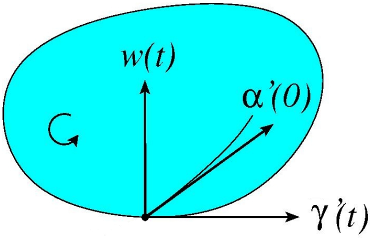
• Notons qu'un compact à bord est quarrable car il est compact et son bord est de mesure nulle.

Définition.– Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \partial D \subset \mathbb{E}^2$ un lacet simple régulier par morceaux. On dit que γ est ORIENTÉ POSITIVEMENT si pour tout $t \in]t_k, t_{k+1}[$, lorsque l'on complète $\gamma'(t)$ en une base $(\gamma'(t), w(t))$ orthogonale directe pour l'orientation de $\mathbb{E}^2$, alors le vecteur $w(t)$ « pointe à l'intérieur de D ».

La formule de Green-Riemann

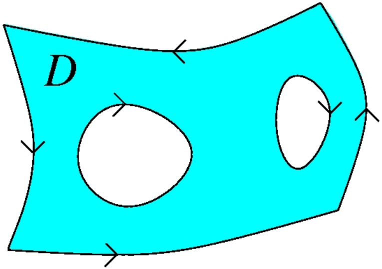
• « Pointer à l'intérieur de D » signifie que pour toute courbe $\alpha : I \longrightarrow D$ telle que $\alpha(0) = \gamma(t)$ et $\alpha'(0) \neq \gamma'(t)$ on a

$$\langle \alpha'(0), w(t) \rangle > 0.$$



La formule de Green-Riemann

• Il est clair que ∂D peut toujours être bordé positivement, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma_1, ..., \gamma_n$ lacets simples régulier par morceaux orientés positivement dont la réunion des supports est ∂D.



Un compact élémentaire bordé par des lacets simples orientés positivement

La formule de Green-Riemann

Lemme (admis).– *Si γ et δ sont deux lacets simples orientés positivement et de même support $\Gamma \subset \partial D$ alors il existe un reparamétrage continu, C^1 par morceaux, φ tel que $\gamma = \delta \circ \varphi$. En particulier pour toute 1-forme α définie sur un ouvert contenant Γ on a*

$$\int_\gamma \alpha = \int_\delta \alpha.$$

• Rappelons qu'en général, deux courbes paramétrées régulières de même support ne définissent pas la même courbe géométrique.

• Si $\gamma_1, ..., \gamma_n$ sont des lacets qui bordent positivement D et si α est une 1-forme définie sur un ouvert contenant ∂D on note

$$\int_{\partial D^+} \alpha := \int_{\gamma_1 \coprod ... \coprod \gamma_n} \alpha.$$

La formule de Green-Riemann

Théorème (formule de Green-Riemann).– *Soient $D \subset \mathbb{E}^2$ compact à bord, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant D et $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$. Alors*

$$\int_{\partial D^+} \alpha = \int_D d\alpha.$$

Autrement dit, en écrivant $\alpha = Pdx + Qdy$, a :

$$\int_{\partial D^+} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

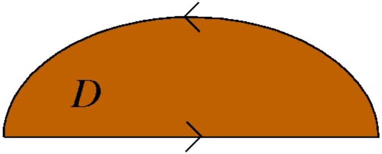
Corollaire.– *On a*

$$Aire(D) = \int_{\partial D^+} xdy = -\int_{\partial D^+} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} xdy - ydx.$$

La formule de Green-Riemann

Exemple : l'aire d'une arche de cycloïde.– Soit

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,4\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} (t,0) & \text{si } t \in [0,2\pi] \\ (4\pi - t + \sin t, 1 - \cos t) & \text{si } t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases} \end{array}$$



Clairement D est un compact à bord et γ le borde positivement. On a donc

$$Aire(D) = -\int_{\partial D^+} ydx = -\int_0^{4\pi} y(t)x'(t)dt$$

La formule de Green-Riemann

• Or, pour $t \in [0, 2\pi]$ on a $y(t) = 0$, par conséquent

$$Aire(D) = -\int_{2\pi}^{4\pi} y(t)x'(t)dt = -\int_{2\pi}^{4\pi} (1-\cos t)(-1+\cos t)dt.$$

• Soit

$$Aire(D) = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t)dt = 3\pi.$$

La valeur trouvée par Roberval en 1634 !

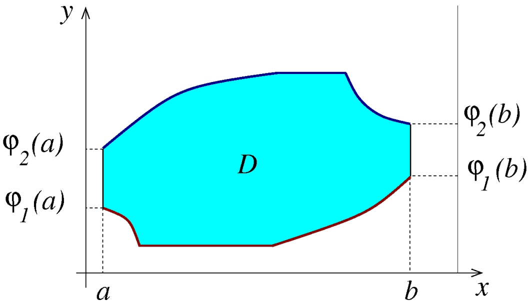
Exercice.– Montrer que la formule de l'arpenteur dérive de la formule de Green-Riemann.

La formule de Green-Riemann

Idée de la démonstration de la formule de Green-Riemann.– Etudions un exemple assez général dans lequel D est défini par les deux inégalités

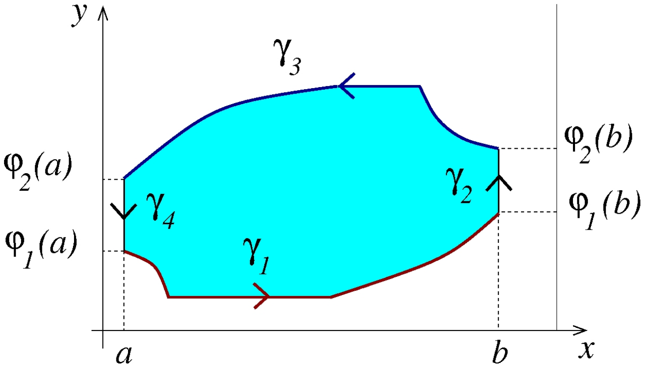
$$a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

où φ_1, φ_2 sont continues sur $[a, b]$ et C^1-par morceaux.



La formule de Green-Riemann

• Le bord de D peut être vu comme la juxtaposition des supports de 4 courbes paramétrées



La formule de Green-Riemann

- Le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\begin{aligned}\int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy\right) dx \\ &= \int_a^b P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))dx.\end{aligned}$$

- D'autre part

$$\int_{\gamma_1} P\, dx = \int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx$$

$$\int_{\gamma_2} P\, dx = \int_{\gamma_4} P\, dx = 0.$$

et

$$\int_{\gamma_3} P\, dx = \int_b^a P(x,\varphi_2(x))dx = -\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx.$$

La formule de Green-Riemann

• Par conséquent

$$\int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = -\int_{\partial D^+} Pdx.$$

• Symétriquement, si on change (x,y) en (y,x) et compte tenu du renversement d'orientation :

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy = \int_{\partial D^+} Qdy.$$

• Finalement

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + Qdy.$$

• Pour des compacts à bord plus généraux, la démonstration consiste à les découper en compacts du type précédent. $\square$

George Green (1793-1841)

George Green (1793-1841)

• Physicien britannique, son travail est peu reconnu par la communauté mathématique au cours de sa vie.

• Autodidacte, le jeune George Green ne passe qu'un an environ à l'école, entre 8 et 9 ans.

• Il travaille dans le moulin de son père et commence à étudier les mathématiques. La manière dont il obtient des informations sur les développements de cette science n'est pas claire pour les historiens.

• Il publie ses premiers résultats sur la base d'une souscription de 51 personnes, dont la plupart faisaient partie de ses amis et ne pouvaient probablement pas comprendre ses travaux.

George Green (1793-1841)

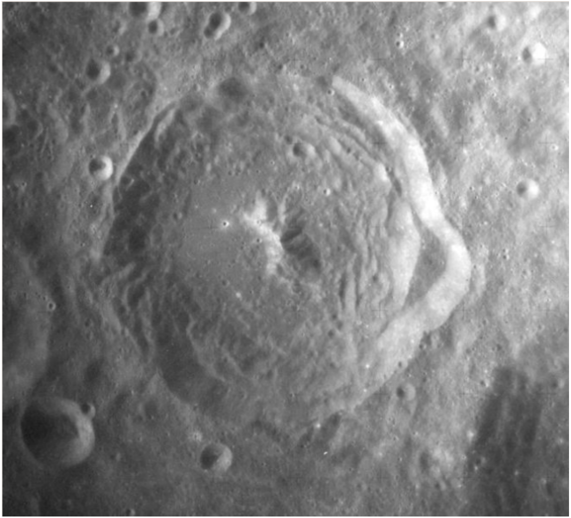
• Le mathématicien Edward Bromhead l'encourage et lui permet d'entrer à l'université de Cambridge... comme étudiant à 40 ans !

• Il publie en les domaines de l'optique, de l'acoustique et de l'hydrodynamique. C'est Lord Kelvin qui fera connaître ses travaux mathématiques.

• Son moulin a été restauré. Il sert maintenant de musée consacré à sa vie et à son travail.

George Green (1793-1841)

George Green (1793-1841)



Le cratère Green sur la Lune

Bernhard Riemann (1826-1866)

Bernhard Riemann (1826-1866)

• Un génie des mathématiques qui meurt précocément à 39 ans.

• Révolutionne la conception de la notion de géométrie, ouvre la voie aux géométries non euclidiennes et à la théorie de la relativité générale.

• Met au point la théorie des fonctions d'une variable complexe, il introduit notamment le concept des surfaces qui portent son nom ainsi que la sphère de Riemann.

• Etudie la répartition des nombres premiers au moyen de sa fameuse *fonction zêta.*

• La célèbre hypothèse de Riemann sur les zéros non triviaux de la fonction zêta fait partie des fameux 23 problèmes de Hilbert ainsi que des 7 problèmes du millénaire.

Brassicacées

Un raifort de l'ordre des Brassicacée, un ordre créé par Edward Bromhead qui était aussi botaniste...