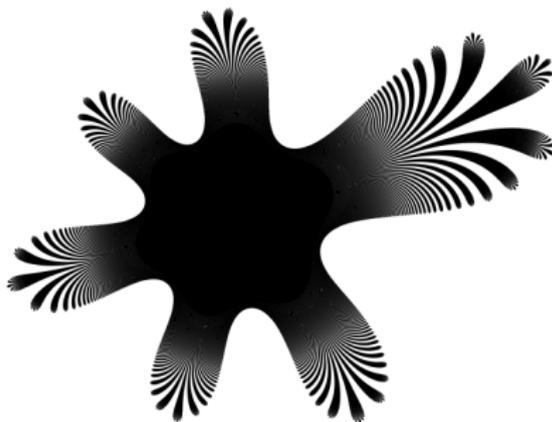


# CM-C5 : Compléments sur les courbes

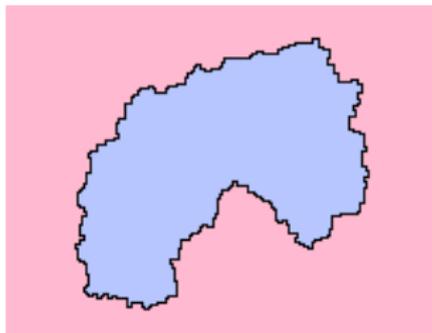
Vincent Borrelli

Université de Lyon



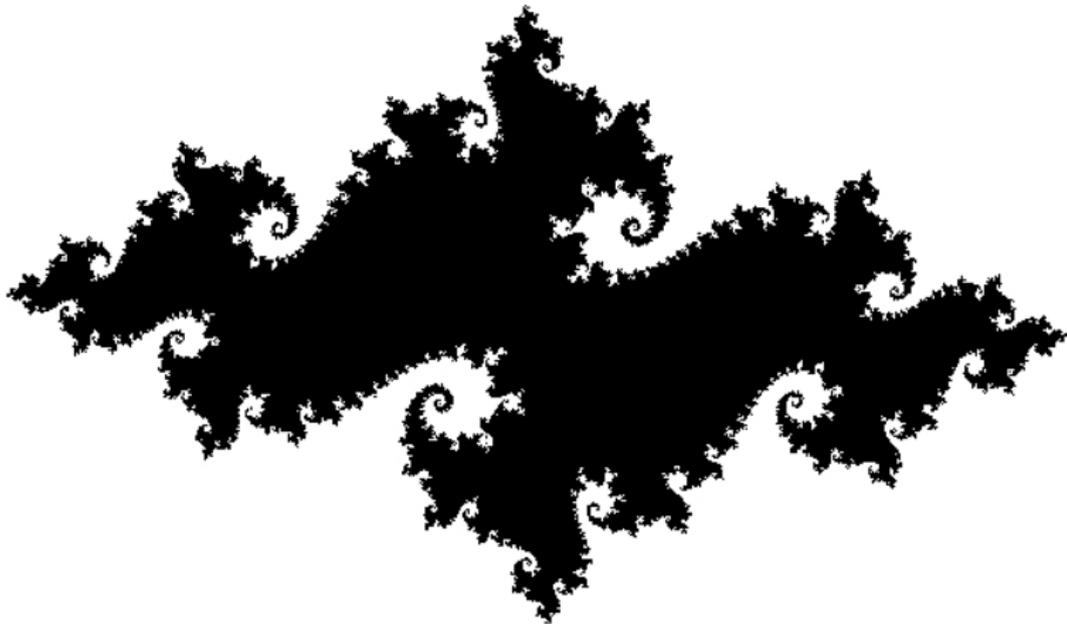
# Le théorème de Jordan

**Théorème de Jordan 1887.** – *Le support d'un lacet simple  $C^0$  du plan sépare  $\mathbb{R}^2$  en deux composantes connexes, une bornée et l'autre non.*



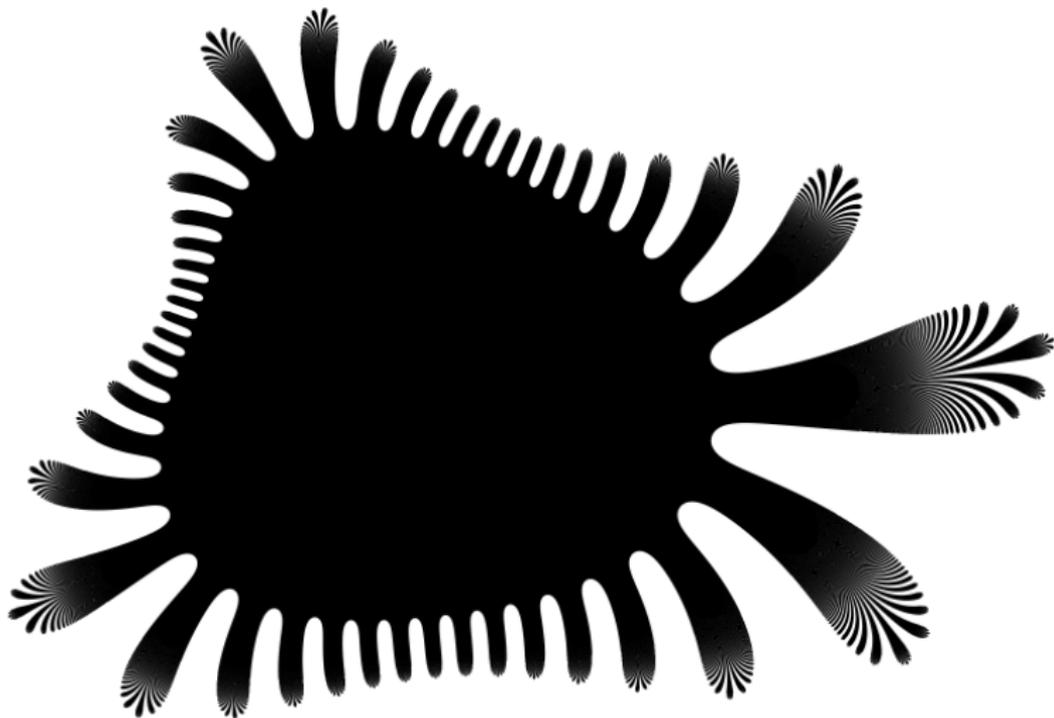
- Attention : résultat célèbre pour le caractère apparemment intuitif de son énoncé et la difficulté de sa démonstration.

# Le théorème de Jordan



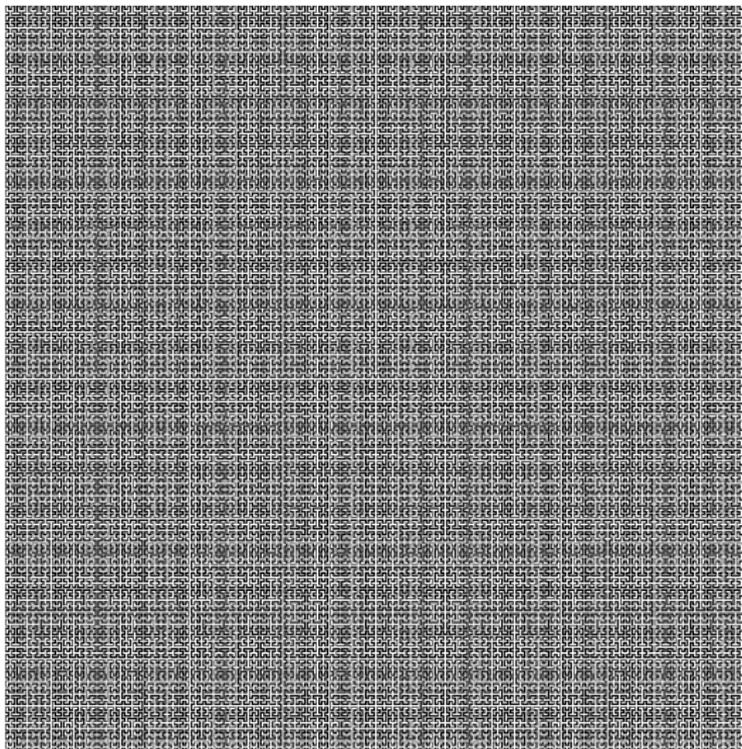
*Un ensemble de Julia*

# Le théorème de Jordan



*Un hérisson*

# Le théorème de Jordan



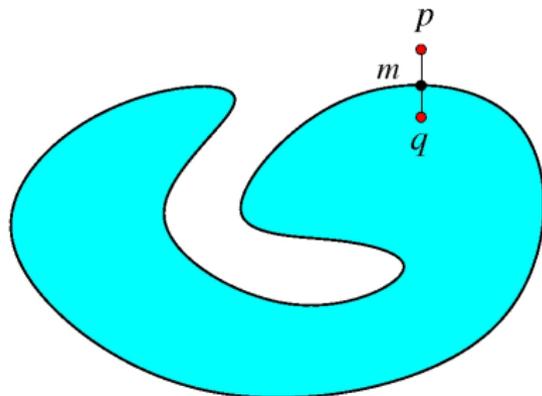
*Une courbe de Péano-Hilbert*

## Le théorème de Jordan

**Idée de la démonstration.**— Pour simplifier, on suppose que le lacet est  $C^\infty$ .

**PREMIÈRE ÉTAPE.**— Soit  $m \in \Gamma = \gamma([a, b])$ . On montre qu'il existe deux points  $p$  et  $q$  de la normale à  $\Gamma$  en  $m$ , situés de part et d'autre de  $m$  tel que

$$|N(\gamma, p) - N(\gamma, q)| = 1.$$



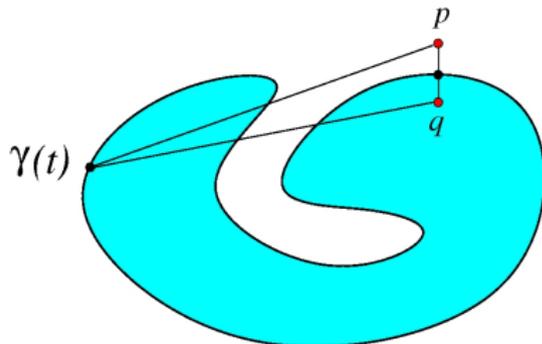
# Le théorème de Jordan

- L'idée pour démontrer que le nombre de rotation change d'une unité c'est de remarquer qu'il s'agit en fait d'un problème local. En effet, si  $\gamma(t)$  est loin de  $p$  et de  $q$  on a

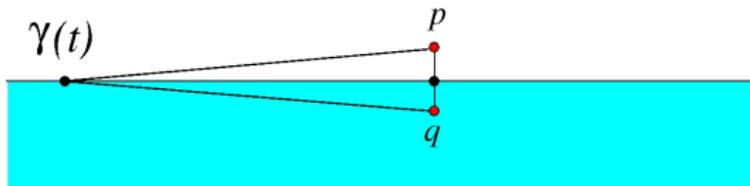
$$\frac{(x(t) - x_p)y'(t) - (y(t) - y_p)x'(t)}{(x(t) - x_p)^2 + (y(t) - y_p)^2}$$
$$\approx$$
$$\frac{(x(t) - x_q)y'(t) - (y(t) - y_q)x'(t)}{(x(t) - x_q)^2 + (y(t) - y_q)^2}.$$

## Le théorème de Jordan

- Par conséquent, les expressions dans les intégrales définissant  $N(\gamma, p)$  et  $N(\gamma, q)$  vont être relativement proches sauf éventuellement au voisinage de  $m$ .



- Un modèle local permet ensuite de voir que les nombres de rotation vont différer d'une unité.



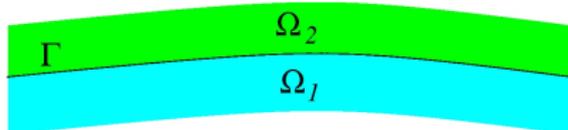
## Le théorème de Jordan

ETAPE 2.— Commençons par observer que l'application

$$\begin{aligned} N(\gamma, \cdot) : \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ p &\longmapsto N(\gamma, p) \end{aligned}$$

est constante sur les composantes connexes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  puisqu'elle est continue et à valeur dans  $\mathbb{Z}$ .

- Par conséquent, d'après l'étape 1,  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  possède au moins deux composantes connexes.
- En uniformisant le raisonnement de l'étape 1, on montre que le complémentaire de  $\Gamma$  dans un voisinage normal de  $\Gamma$  est formé de deux composantes connexes exactement. On les note  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .



## Le théorème de Jordan

ETAPE 3.— Décomposons  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  en composantes connexes :

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = C_1 \cup \dots \cup C_n \cup \dots$$

On peut toujours supposer  $\Omega_1 \subset C_1$  et  $\Omega_2 \subset C_2$ .

- Comme  $\Gamma$  est fermée, les  $C_i$  sont ouverts et nécessairement

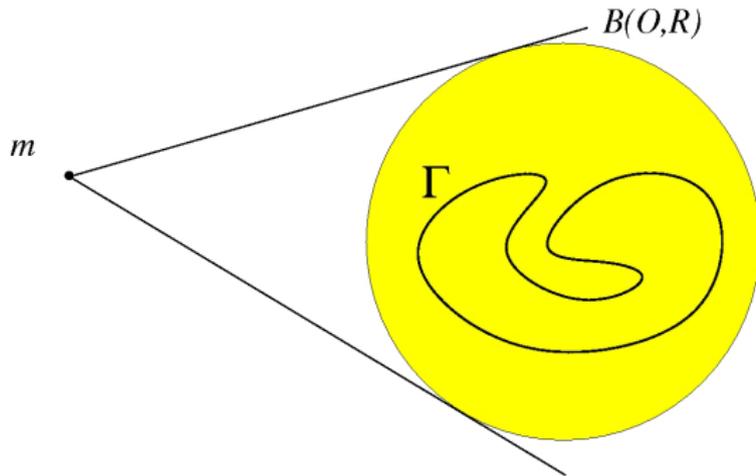
$$\partial C_i = \overline{C_i} \setminus C_i \subset \Gamma.$$

- D'autre part  $\partial C_i \neq \emptyset$  car si  $\partial C_i = \emptyset$  alors  $\overline{C_i} = C_i$ , ce qui signifie que  $C_i$  serait un ouvert-fermé, donc  $C_i = \mathbb{R}^2$ , contradiction.
- Au bilan  $\emptyset \neq \partial C_i \subset \Gamma$ . Mais, d'après l'étape 2, tout point de  $\Gamma$  a un voisinage ne rencontrant que  $\Omega_1 \subset C_1$  et  $\Omega_2 \subset C_2$ . Il ne peut donc y avoir que deux composantes connexes.

## Le théorème de Jordan

ETAPE 4.— Il faut maintenant montrer qu'une des composantes est bornée et l'autre non. Remarquons que  $\overline{C}_1$  et  $\overline{C}_2$  ne peuvent être toutes les deux compacts puisque  $\mathbb{R}^2 = \overline{C}_1 \cup \overline{C}_2$ .

- Puisque  $\Gamma$  est compact, il existe  $R > 0$  tel que  $\Gamma \subset B(O, R)$ . Soit  $m$  dans le complémentaire de  $B(O, R)$ . Notons qu'alors  $N(\gamma, m) = 0$  (le dessin explique pourquoi !)



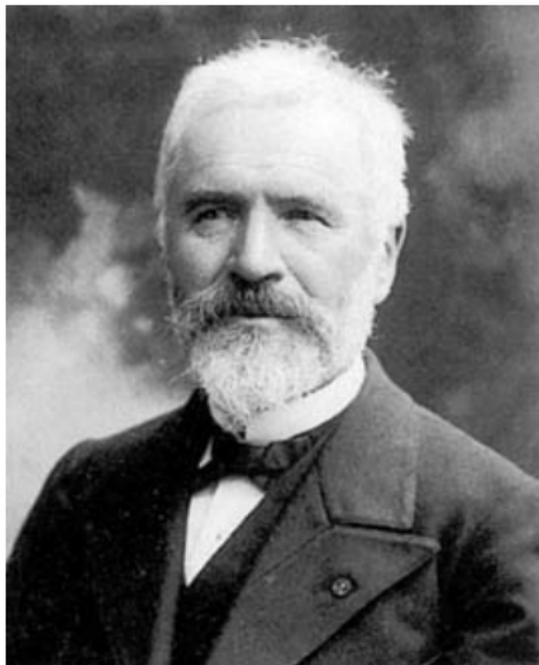
## Le théorème de Jordan

- D'après les étapes précédentes, tout point dans le complémentaire de  $B(O, R)$  appartient donc à la même composante connexe, disons  $C_1$ . Par conséquent, la composante  $C_2$  est contenue dans  $B(O, R)$ , c'est dire qu'elle est bornée. □



**Théorème de Jordan-Schönflies 1906 (admis).** – *La composante bornée est homéomorphe à un disque, la composante non bornée à un disque épointé.*

# Camille Jordan (1838-1922)



## Camille Jordan (1838-1922)

- Mathématicien né à Lyon... le laboratoire de mathématiques de l'université Lyon I porte son nom.
- Petit neveu d'un autre Camille Jordan, homme politique français, meneur royaliste du soulèvement de Lyon contre la Convention nationale en 1793.
- Outre le *théorème de Jordan*, il a laissé son nom à la *réduction de Jordan* (traduction matricielle de la réduction des endomorphismes) et au *théorème de Jordan-Hölder* sur les suites de composition des groupes.
- Pédagogue infatigable, il forme, encourage et fascine toute une génération de mathématiciens.

## Camille Jordan (1838-1922)



*Camille Jordan, élève à l'Ecole Polytechnique.*

# Le théorème des quatre sommets

**Définition.**— On appelle SOMMET d'une courbe paramétrée plane  $C^3$  un point où  $k'_{alg}$  s'annule.

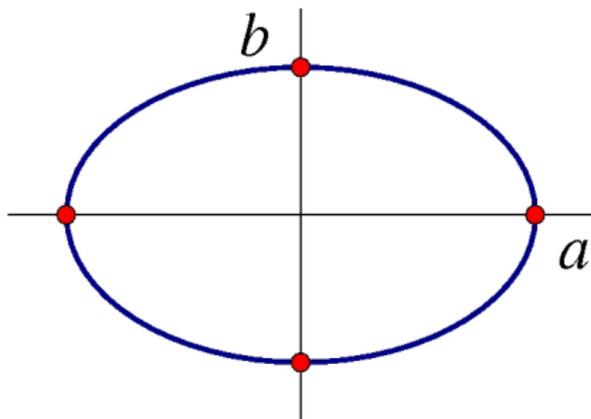
**Exemple.**— L'ellipse

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi[ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (a \cos t, b \sin t) \end{array}$$

a pour courbure

$$k_{alg}(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

## Le théorème des quatre sommets



- D'où

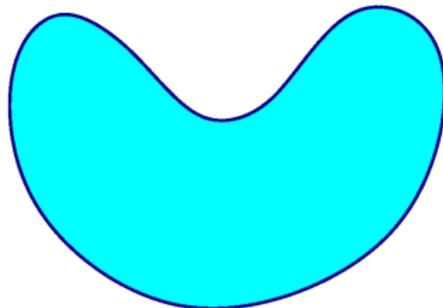
$$k'_{alg}(t) = \frac{3ab(b^2 - a^2) \cos t \sin t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}.$$

Ainsi  $\gamma$  a quatre sommets correspondant à  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  
 $t = \pi$  et  $t = \frac{3\pi}{2}$ .

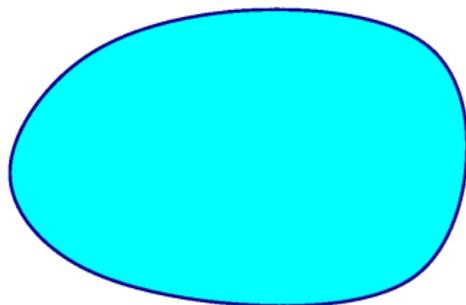
# Le théorème des quatre sommets

**Définition.**— Soit  $\gamma$  une courbe paramétrée  $C^1$  fermée simple. On dit que  $\gamma$  est CONVEXE si la composante bornée qu'elle définit est CONVEXE.

**Exemple.**—



*Non convexe*



*Convexe*

# Le théorème des quatre sommets

**Lemme.**— Soit  $\gamma : [a, b] \xrightarrow{C^3} \mathbb{R}^2$  fermée simple. Alors  $\gamma$  a deux sommets.

**Démonstration.**— La fonction *courbure algébrique*  $k_{alg}$  se prolonge sur  $\mathbb{R}$  en une fonction périodique  $C^1$ . En particulier elle admet un maximum et un minimum dans chaque période. En ces points  $k'_{alg} = 0$ . □

**Théorème des quatre sommets.**— Soit  $\gamma : [a, b] \xrightarrow{C^3} \mathbb{R}^2$  fermée simple et convexe. Alors  $\gamma$  a quatre sommets.

- L'hypothèse « convexe » n'est pas nécessaire mais la démonstration est alors plus difficile.

## Le théorème des quatre sommets

**Démonstration.**— On sait que  $\gamma$  admet au moins deux sommets. On va raisonner par l'absurde en supposant que  $\gamma$  admet seulement deux ou trois sommets. En fait, pour fixer les idées, on va supposer qu'il y a exactement trois sommets

$$m_1 = \gamma(t_1), \quad m_2 = \gamma(t_2), \quad \text{et} \quad m_3 = \gamma(t_3)$$

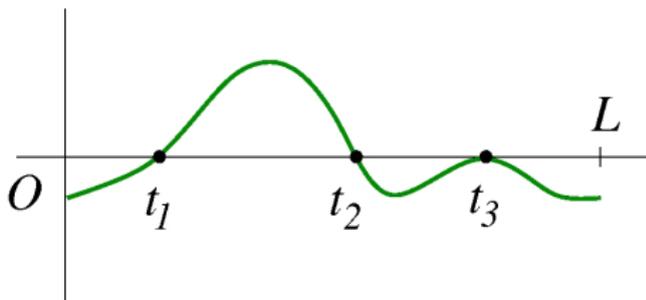
étant entendu que la démonstration s'adapte sans difficulté au cas de deux sommets.

- On suppose en outre que  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est paramétrée par la l.a. En effet, l'annulation de la dérivée de la courbure algébrique est préservée par le reparamétrage par la l.a. puisque

$$\frac{d}{ds}(k_{alg} \circ \varphi)(s) = \varphi'(s) \cdot k'_{alg}(\varphi(s)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} k'_{alg}(t).$$

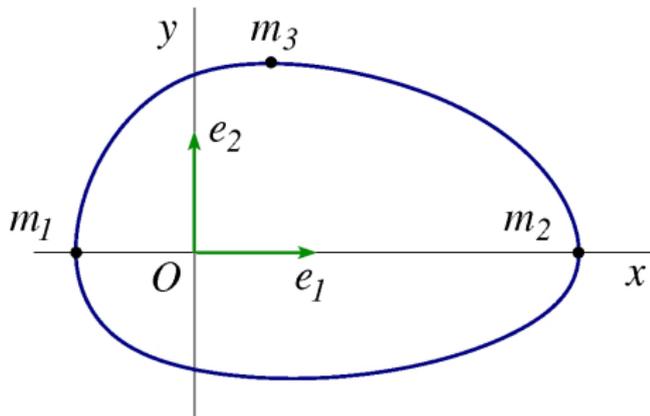
## Le théorème des quatre sommets

- Nécessairement  $k'_{alg}$  change de signe au moins une fois car  $k'_{alg} > 0$  (ou  $k'_{alg} < 0$ ) sur  $[0, L] \setminus \{t_1, t_2, t_3\}$  serait contradictoire avec  $k_{alg}(0) = k_{alg}(L)$ .



- Quitte à changer les indices ou les signes, on peut supposer que  $k'_{alg}$  est positive sur  $]t_1, t_2[$  et négative sur  $[0, L] \setminus ([t_1, t_2] \cup \{t_3\})$ .

# Le théorème des quatre sommets



- On prend pour axe  $(Ox)$  la droite  $(m_1 m_2)$  et on note  $(e_1, e_2)$  une base associée. Puisque  $\gamma$  est convexe, l'arc  $\gamma([t_1, t_2])$  est en dessous de  $(Ox)$  et l'arc  $\gamma([0, L] \setminus [t_1, t_2])$  au dessus de  $(Ox)$ .

## Le théorème des quatre sommets

- On a

$$\begin{aligned}\int_0^L k'_{alg}(s)\gamma(s) ds &= [k_{alg}(s)\gamma(s)]_0^L - \int_0^L k_{alg}(s)\gamma'(s) ds \\ &= 0 - \int_0^L k_{alg}(s)T(s) ds.\end{aligned}$$

- Or (formule de Frenet)

$$-k_{alg}(s)T(s) = \frac{d}{ds}N_{alg}(s)$$

donc

$$\int_0^L k'_{alg}(s)\gamma(s) ds = 0$$

et en particulier

$$\left\langle \int_0^L k'_{alg}(s)\gamma(s) ds, e_2 \right\rangle = \int_0^L k'_{alg}(s)\langle \gamma(s), e_2 \rangle ds = 0.$$

## Le théorème des quatre sommets

- Si  $s \in ]t_1, t_2[$  on a  $\langle \gamma(s), e_2 \rangle \leq 0$  et l'inégalité est stricte sur un ouvert non vide. Comme  $k'_{alg}(s) > 0$  on a donc :

$$\int_{t_1}^{t_2} k'_{alg}(s) \langle \gamma(s), e_2 \rangle ds < 0.$$

- De même sur  $[0, L] \setminus [t_1, t_2]$ , on a  $\langle \gamma(s), e_2 \rangle \geq 0$  et l'inégalité est stricte sur un ouvert non vide. Comme  $k'_{alg}(s) < 0$  on a donc :

$$\int_{[0, L] \setminus [t_1, t_2]} k'_{alg}(s) \langle \gamma(s), e_2 \rangle ds < 0.$$

- Au bilan

$$\int_0^L k'_{alg}(s) \langle \gamma(s), e_2 \rangle ds < 0.$$

Contradiction.



## Le théorème des quatre sommets



*Hermann Gluck*

**Théorème (Gluck, 1971).**– *Une fonction périodique est la courbure algébrique d'une courbe fermée simple si elle admet, sur une période, au moins deux maximums séparés par deux minimums.*