CM-I : Le théorème d'inversion locale

Vincent Borrelli

Université de Lyon

Surfaces de Dini et autres fleurs géométriques

Le théorème du point fixe

• On rappelle qu'une application $f : (X, d) \longrightarrow (X', d')$ entre deux espaces métriques est dite k-LIPSCHITZIENNE si pour tout $x_1, x_2 \in X$ on a

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq k\, d(x_1, x_2)$$

Si $k < 1$, on dit que f est une CONTRACTION.

Théorème du point fixe de Banach (1920).– *Soit (X, d) un espace métrique complet non vide et soit $T : X \to X$ une contraction. Alors T admet un point fixe qui est unique.*

Remarque.– Ce théorème est souvent appelé *Théorème du point fixe de Picard* en France. Émile Picard n'a pas découvert ce théorème, en revanche il fut le premier à l'utiliser pour établir l'existence de solutions d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles.

Le théorème du point fixe

Démonstration.– Remarquons d'abord que l'inégalité de contraction interdit d'avoir deux points fixes.

• Soit $x_0 \in X$. On considère la suite des itérés

$$x_n = T^n(x_0) = T \circ \ldots \circ T(x_0)$$

Observons que si cette suite converge alors sa limite est nécessairement un point fixe de T. En effet si

$$x_\infty = \lim_n T^n(x_0)$$

alors, puisque T lipschitzienne est continue,

$$T(x_\infty) = T(\lim_n T^n(x_0)) = \lim_n T(T^n(x_0)) = \lim_n T^{n+1}(x_0) = x_\infty$$

Le théorème du point fixe

• Il ne reste plus qu'à démontrer que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. Soient $p \geq q$ et $x \in X$. Notons que

$$\begin{aligned} d(x, T^{p-q}(x)) &\leq d(x, T(x)) + ... + d(T^{p-q-1}(x), T^{p-q}(x)) \\ &\leq (1 + k + ... + k^{p-q-1}) d(x, T(x)) \\ &\leq \frac{1}{1-k} d(x, T(x)) \end{aligned}$$

On substitue $x = T^q(x_0)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} d(T^q(x_0), T^p(x_0)) &\leq \frac{1}{1-k} d(T^q(x_0), T^{q+1}(x_0)) \\ &\leq \frac{k^q}{1-k} d(x_0, T(x_0)) \end{aligned}$$

et puisque $k < 1$, $(T^n(x_0))_n$ est de Cauchy. $\square$

Émile Picard (1856-1941)

Émile Picard (1856-1941)

• Élève brillant mais peu attiré par les maths. Il haïssait la géométrie et ne l'apprenait que pour "ne pas être puni".

• Réussit le concours de l'École polytechnique (2ème) et de l'École normale supérieure (1er). Il choisit la rue d'Ulm après un entretien avec Louis Pasteur.

• Il épouse Marie Hermite, fille de son professeur Charles Hermite. Ils auront deux fils et une fille qui seront tous les trois tués lors de la première guerre mondiale.

• Il devient rapidement célèbre en démontrant le *Grand Théorème de Picard* : toute fonction holomorphe ayant une singularité essentielle prend chaque valeur une infinité de fois sur tout voisinage de cette singularité, avec au plus une exception (penser à $z \mapsto exp(z^{-1})$), l'exception est la valeur 0).

Émile Picard (1856-1941)

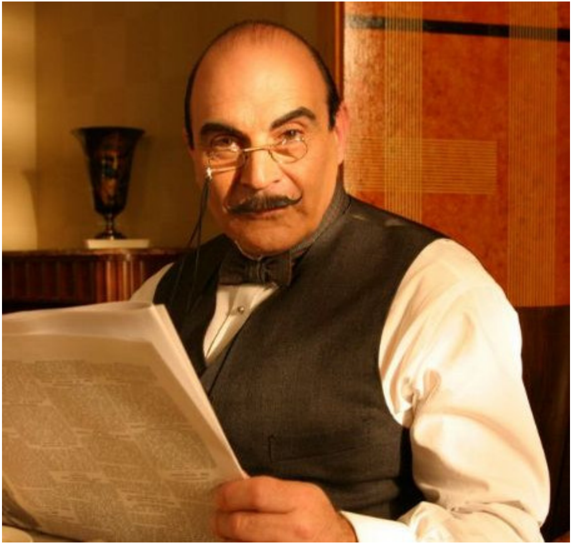
• Le *Petit Théorème de Picard* dit ceci : toute fonction entière non constante prend chaque valeur une fois au moins, avec au plus une exception (penser à $z \mapsto exp(z)$, l'exception est la valeur 0)

• Il exerce à l'École centrale pendant 42 ans formant à la mécanique plus de dix mille ingénieurs. Il est célèbre pour la clarté de ses cours.

• Il devient membre de l'Académie des Sciences à 33 ans (l'élection dut être reportée à cause de son jeune âge) puis membre de l'Académie Française à 68 ans.

• Il réussit grâce à sa grande influence à organiser le boycott des scientifiques allemands après la première guerre mondiale. Albert Einstein, venu donner une série de conférences à Paris en 1922, n'est pas invité à l'Académie des sciences !

Émile Picard (1856-1941)



Une vague ressemblance ? David Suchet incarnant Hercule Poirot

Inversion locale

• Le théorème d'inversion locale et celui des fonctions implicites seront énoncés ici en dimension infinie.

• Contrairement au théorème du point fixe, l'intérêt d'une version en dimension infinie ne saute pas aux yeux. En effet, pour la majorité des applications, la dimension finie suffit amplement.

• Néanmoins, et pour citer Wikipédia, « il n'est pas inutile de bénéficier de la généralité que confère le fait de choisir les variables dans un Banach »

• Par exemple, une application du théorème d'inversion locale en dimension infinie permet de démontrer d'une façon élémentaire le résultat non trivial suivant : *si un champ de vecteurs est C^r alors son flot est C^r.*

Inversion locale

• Soient E et F deux espaces de Banach. Rappelons qu'une application $f : U \subset E \longrightarrow V \subset F$ est dite DIFFÉRENTIABLE en $a \in U$ s'il existe une application linéaire CONTINUE $L : E \longrightarrow F$ telle que pour tout $h \in E$ vérifiant $a + h \in U$ on ait

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|).$$

• Une application linéaire $L : E \longrightarrow F$ entre deux espaces de Banach n'est pas nécessairement continue.

• Une condition nécessaire et suffisante pour que L soit continue est que $\sup_{\|h\|_E=1} \|L(h)\|_F < +\infty$.

• Si $L : E \longrightarrow F$ linéaire continue est inversible alors son inverse $L^{-1} : F \longrightarrow E$ est nécessairement continue (théorème de l'isomorphisme de Banach).

Inversion locale

Théorème d'inversion locale.– *Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $a \in U$. Soit $f : U \longrightarrow F$ une application C^1 telle que $df_a : E \longrightarrow F$ soit inversible. Alors il existe un voisinage ouvert V de a tel que*

$$f_{|V} : V \longrightarrow f(V)$$

soit un C^1-difféomorphisme. De plus si f est C^k, $1 \leq k \leq \infty$, la fonction réciproque $f^{-1} : f(V) \longrightarrow V$ est C^k.

Remarque.– Si E et F sont de dimension finie alors

$$\dim\ E = \dim\ F$$

puisque $df_a : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme vectoriel.

Inversion locale

Démonstration.– Quitte à composer f par des translations, on peut toujours supposer que $a = 0_E$ et $f(a) = 0_F$. On ne change pas non plus le problème en composant f à gauche par $\Phi = (df_a)^{-1}$. Mais puisque $d(\Phi \circ f)_a = \Phi \circ df_a = Id$ on se ramène donc à prouver le théorème quand $E = F$, $df_a = Id$ et $a = f(a) = 0$.

• Soit $y \in E$. On va montrer dans un premier temps que si y appartient à un voisinage suffisamment petit de 0 alors il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$ (on ne s'intéressera à la régularité de l'application $y \mapsto x$ que dans un second temps). Pour tout $x \in E$, on pose $\varphi(x) := f(x) - x$ et pour tout $y \in E$, $T_y(x) := y - \varphi(x)$. Notons que

$$y = f(x) \iff T_y(x) = x$$

Inversion locale

• Montrons que T_y est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur une boule centrée en 0. Comme φ est C^1 et que $d\varphi_0 = df_0 - Id = 0$, il existe une boule ouverte $B(r) \subset U$ telle que

$$\forall x \in B(r), \quad \|d\varphi_x\| < 1/2.$$

Par la majoration des accroissements finis, on a

$$\forall x_1, x_2 \in B(r), \quad \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

d'où l'on déduit puisque $T_y(x) = y - \varphi(x)$:

$$\forall x_1, x_2 \in B(r), \quad \|T_y(x_1) - T_y(x_2)\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

ce qui montre que T_y est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $B(r)$ (ainsi que $\varphi = -T_0$).

Inversion locale

• Montrons que T_y a un unique point fixe si $y \in B(r/2)$. Puisque $\varphi(0) = 0$, on a

$$\forall x \in B(r), \quad \|\varphi(x) - \varphi(0)\| < \frac{1}{2}\|x - 0\| \leq \frac{r}{2}$$

et donc

$$\forall x \in B(r), \quad \|T_y(x)\| < \frac{r}{2} + \|y\|.$$

En particulier

$$\|y\| \in B(r/2) \implies T_y(\overline{B(r)}) \subset B(r).$$

Puisque $\overline{B(r)}$ est fermé dans E, il est complet. Le théorème du point fixe assure l'existence d'un unique point fixe $g(y)$ dans $B(r)$.

Inversion locale

• Soit $V := \{x \in U \mid f(x) \in B(r/2)\}$. On vient de montrer que $f_{|V} : V \longrightarrow f(V)$ est une bijection dont l'inverse est g.

• Montrons que $g = f^{-1}$ est continue. Soient $y_1, y_2 \in f(V)$ et $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$, on a

$$\begin{aligned} g(y_2) - g(y_1) &= x_2 - x_1 \\ &= T_{y_2}(x_2) - T_{y_1}(x_1) \\ &= y_2 - \varphi(x_2) - y_1 + \varphi(x_1) \end{aligned}$$

d'où

$$\|g(y_2) - g(y_1)\| \leq \|y_2 - y_1\| + \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\|$$

Inversion locale

Puisque φ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne, on déduit

$$\begin{aligned} \|g(y_2)-g(y_1)\| &\leq \|y_2-y_1\| + \frac{1}{2}\|x_2-x_1\| \\ &\leq \|y_2-y_1\| + \frac{1}{2}\|g(y_2)-g(y_1)\| \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{2}\|g(y_2)-g(y_1)\| \leq \|y_2-y_1\|.$$

Ainsi $g = f^{-1}$ est 2-lipschitzienne donc continue.

Inversion locale

• Puisque f est C^1 sur U et que $df_0 = Id$, il existe un rayon $r' > 0$ tel que df_x soit inversible pour tout $x \in B(r')$. En remplaçant dans l'étude précédente r par $\min(r, r')$, on peut toujours supposer que df_x est inversible en tout point de V.

• On va montrer que $g = f^{-1}$ est différentiable sur V. La différentiabilité de f en $x_0 \in V$ s'écrit

$$y - y_0 = df_{x_0}(x - x_0) + R(x)$$

où $R(x)$ est un $o(\|x - x_0\|)$, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|R(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Inversion locale

En composant par $(df_{x_0})^{-1}$ il vient

$$(df_{x_0})^{-1}(y - y_0) = x - x_0 + (df_{x_0})^{-1}(R(x))$$

i.e.

$$g(y) - g(y_0) = (df_{x_0})^{-1}(y - y_0) - (df_{x_0})^{-1}(R(g(y)))$$

Il s'agit de voir que le reste

$$R'(y) = -(df_{x_0})^{-1}(R(g(y)))$$

est un $o(\|y - y_0\|)$.

Inversion locale

Puisque g est 2-lipschitzienne, on a

$$\|x - x_0\| = \|g(y) - g(y_0)\| \leq 2\|y - y_0\|$$

d'où

$$\frac{1}{\|y - y_0\|} \leq \frac{2}{\|x - x_0\|}$$

et

$$\frac{\|R'(y)\|}{\|y - y_0\|} \leq \frac{2\|(df_{x_0})^{-1}(R(x))\|}{\|x - x_0\|} = 2\left\|(df_{x_0})^{-1}\left(\frac{R(x)}{\|x - x_0\|}\right)\right\|$$

ainsi $R'(y)$ est un $o(\|y - y_0\|)$ et $g = f^{-1}$ est différentiable sur V.

- Sans surprise $dg_{y_0} = (df_{x_0})^{-1}$ i. e. $d(f^{-1})_{y_0} = (df_{f^{-1}(y_0)})^{-1}$.

Inversion locale

• Montrons que f^{-1} est C^1. Puisque f^{-1} est continue et que $x \mapsto df_x$ est aussi continue (car f est C^1), la formule

$$d(f^{-1})_{y_0} = (df_{f^{-1}(y_0)})^{-1}$$

montre que $y_0 \mapsto d(f^{-1})_{y_0}$ est continue par composition d'applications continues. Ainsi f^{-1} est C^1.

• Il reste à montrer que si f est C^k alors f^{-1} est C^k également. Par récurrence : supposons que f^{-1} soit C^s pour $1 \leq s \leq k-1$, alors la formule

$$d(f^{-1})_{y_0} = (df_{f^{-1}(y_0)})^{-1}.$$

montre que $y_0 \mapsto d(f^{-1})_{y_0}$ est C^s et donc que f^{-1} est C^{s+1}.
$\square$

Une application

Les points fixes non dégénérés sont isolés.– Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 ayant au moins un point fixe, disons 0 pour fixer les idées.

• Puisque T n'est pas supposée contractante, il n'y a aucune raison pour que ce point fixe soit unique.

• Néanmoins, si dT_0 ne possède pas 1 comme valeur propre (on dit dans ce cas que 0 est un point fixe NON DÉGÉNÉRÉ) alors le point fixe 0 est ISOLÉ, i. e. il existe un voisinage de 0 dans lequel il est l'unique point fixe de T.

• En effet, soit $f = T - id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Le point $x \in \mathbb{R}^n$ est un point fixe si et seulement si $f(x) = 0$.

• On a $df_0 = dT_0 - Id$ et donc $\ker df_0 = \{0\}$ puisque 1 n'est pas valeur propre de dT_0. Ainsi df_0 est inversible.

Une application

• En appliquant le théorème d'inversion locale, on obtient l'existence d'un voisinage V de 0 tel que $f_{|V} : V \longrightarrow f(V)$ soit un difféomorphisme.

• En particulier, on a l'équivalence

$$x \in V \text{ et } f(x) = 0 \iff x = 0$$

i.e 0 est l'unique point fixe de T dans V. $\square$

Le théorème des fonctions implicites

• Le théorème d'inversion local résout en x une équation $y = f(x)$. Le théorème des fonctions implicites résout en y une équation $f(x, y) = 0$. On va voir que ce problème apparemment plus général se ramène au précédent.

• Pour la suite, on note E_1, E_2 et F trois espaces de Banach, U_1 un ouvert de E_1 et U_2 un ouvert de E_2 et $f : U_1 \times U_2 \longrightarrow F$ de classe C^1. On note aussi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) : E_2 \longrightarrow F$$

la différentielle de $y \mapsto f(x, y)$ qui est une application linéaire continue.

Le théorème des fonctions implicites

Théorème des fonctions implicites.– *Soit* $(a,b) \in U_1 \times U_2$ *tel que* $f(a,b) = 0$*. On suppose que* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ *est inversible. Alors il existe des voisinages* $V(a) \subset U_1$ *et* $V(b) \subset U_2$ *et une application* $\varphi : V(a) \longrightarrow V(b)$ *de classe* C^1 *vérifiant* $\varphi(a) = b$ *et*

$$\forall\,(x,y) \in V(a) \times V(b), \quad f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

La différentielle de φ *est donnée par la formule suivante*

$$d\varphi_a = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).$$

De plus si f *est* C^k, $1 \leq k \leq +\infty$, *alors* φ *est* C^k.

Fonctions implicites

Idée de la démonstration.– On introduit

$$\begin{array}{rccc} g: & U_1 \times U_2 & \longrightarrow & U_1 \times F \\ & (x,y) & \longmapsto & (x, f(x,y)) \end{array}$$

dont on va montrer au moyen du théorème d'inversion locale qu'elle est inversible au voisinage de (a,b). Son inverse est nécessairement de la forme

$$(x,z) \mapsto g^{-1}(x,z) = (x, \phi(x,z))$$

Ensuite, il suffit de remarquer que

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) = 0 & \Longleftrightarrow & g(x,y) = (x,0) \\ & \Longleftrightarrow & (x,y) = g^{-1}(x,0) \\ & \Longleftrightarrow & y = \phi(x,0) \end{array}$$

Fonctions implicites

Démonstration.– Montrons que

$$dg_{(a,b)} : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 \times F$$

est inversible. Il faut pour cela résoudre l'équation

$$(v_1', v_2') = dg_{(a,b)}(v_1, v_2).$$

Or

$$dg_{(a,b)}(v_1, v_2) = \left(v_1, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(v_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(v_2) \right)$$

ainsi

$$(v_1, v_2) = \left(v_1', \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right)^{-1} \left(v_2' - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(v_1') \right) \right)$$

donc $dg_{(a,b)}$ est inversible.

Fonctions implicites

• Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage $V(a) \times V(b) \subset E_1 \times E_2$ tel que $g_{|V(a)\times V(b)}$ soit un C^1-difféomorphisme.

• Quitte à rétrécir $V(a)$ on peut toujours supposer que $\phi(V(a), 0) \subset V(b)$. Pour tout $(x, y) \in V(a) \times V(b)$ on a alors

$$f(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \phi(x, 0)$$

• La formule de $d\varphi_a$ s'obtient en différentiant

$$f(x, \phi(x, 0)) = 0$$

comme fonction composée. $\square$

Une application aux courbes implicites

Définition.– Une COURBE PLANE DÉFINIE IMPLICITEMENT est le lieu $\Gamma = F^{-1}(0)$ des zéros d'une fonction $F : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

• Par exemple si $F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \delta$ alors Γ est une conique.

Définition.– Un point $(x_0, y_0) \in \Gamma$ est dit RÉGULIER si les dérivées partielles $F_x(x_0, y_0)$ et $F_y(x_0, y_0)$ de F ne sont pas toutes deux nulles.

Proposition.– *Soit* (x_0, y_0) *un point régulier de* $\Gamma = F^{-1}(0)$. *Il existe une courbe paramétrée régulière* $\gamma :]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\longrightarrow \Gamma$ *telle que* $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ *et dont une équation cartésienne de la tangente en* t_0 *est donnée par*

$$F_x(x_0, y_0)(X - x_0) + F_y(x_0, y_0)(Y - y_0) = 0.$$

Application aux courbes implicites

Démonstration.– Supposons pour fixer les idées que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe $\varphi : V(x_0) \longrightarrow V(y_0)$ de classe C^1 telle que pour tout $(x, y) \in V(x_0) \times V(y_0)$

$$(x, y) \in \Gamma \iff y = \varphi(x).$$

• Quitte à rétrécir $V(x_0)$ on peut toujours supposer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $V(x_0) =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$. On pose $t_0 := x_0$ et on définit

$$\begin{array}{rccc} \gamma : &]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t, \varphi(t)) \end{array}$$

Il est clair que γ est de classe C^1, que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ et que $\gamma(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[) \subset \Gamma$.

Application aux courbes implicites

• La courbe paramétrée γ est régulière puisque

$$\gamma'(t) = (1, \varphi'(t)) \neq (0, 0)$$

• De plus on a

$$\varphi'(t_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

donc $(F_y(x_0, y_0), -F_x(x_0, y_0))$ est un vecteur tangent non nul de γ en t_0.

• Par conséquent $(F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0))$ est un vecteur normal non nul de γ en t_0. De là, l'expression de l'équation de la tangente donnée dans la proposition. $\square$

Application aux courbes implicites

Exercice.– Soit $a \geq b > 0$. Montrer que tous les points de l'ellipse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

sont réguliers. Montrer ensuite qu'une équation cartésienne de la tangente en un point (x_0, y_0) de E est donnée par

$$\frac{x_0}{a^2} X + \frac{y_0}{b^2} Y = 1.$$

Ulisse Dini (1845-1918)

Ulisse Dini (1845-1918)

• Mathématicien italien issu d'une famille relativement modeste. Il obtient une bourse à 20 ans pour étudier les mathématiques à Paris. Il y rencontre Joseph Bertrand et Charles Hermite.

• De retour à Pise, il succède à Enrico Betti à la chaire universitaire d'« Analyse et de Haute Géométrie ». Il a 25 ans. Il obtient une seconde chaire, celle d'« Analyse infinitésimale », à 31 ans. Il finit recteur de l'université de Pise à 43 ans.

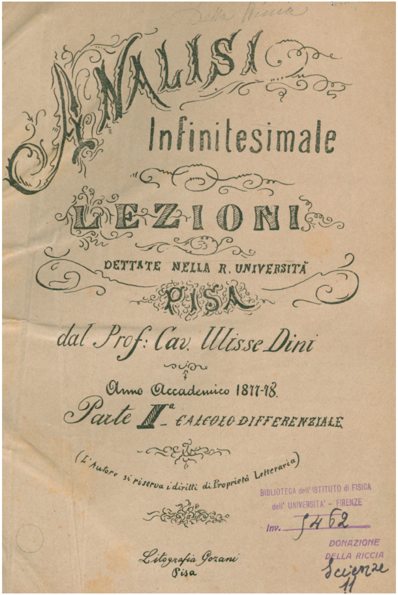
• Élu au conseil municipal de Pise à 25 ans. Il est député au parlement italien à 35 ans et sénateur à 47 ans.

Ulisse Dini (1845-1918)

• La question des fonctions implicites remonte à René Descartes (1637). Pendant plus de 200 ans les mathématiciens vont proposer des méthodes plus ou moins bien justifiées pour aborder les problèmes d'inversion (en particulier Gottfried Leibniz, Johann Bernoulli et Leonhard Euler). C'est Ulisse Dini qui donnera la première démonstration du *Théorème des fonctions implicites* en 1878 à 33 ans.

• Son domaine de prédilection est celui des séries de fonctions. On lui doit le fameux *Théorème de Dini* : La convergence simple d'une suite monotone de fonctions à valeurs réelles définies et continues sur un espace compact vers une fonction continue implique sa convergence uniforme.

Ulisse Dini (1845-1918)



ANALISI

Infinitesimale

LEZIONI

DETTATE NELLA R. UNIVERSITÀ

PISA

dal Prof: Cav. Ulisse Dini

Anno Accademico 1877-78.

Parte Iª CALCOLO DIFFERENZIALE

(L'Autore si riserva i diritti di Proprietà Letteraria)

Litografia Gozani
Pisa