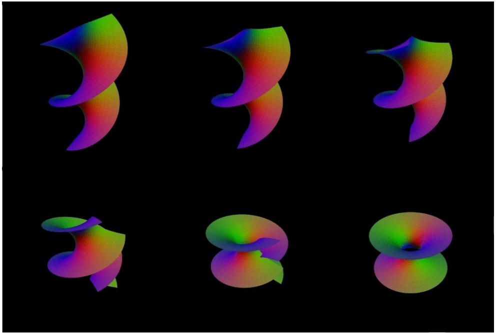
CM-R1 : Aspects métriques des sous-variétés

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Une famille de surfaces isométriques

Première forme fondamentale

• On suppose désormais que $\mathbb{R}^3$ est muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

• Soient $S \subset \mathbb{R}^3$ une sous-variété de dimension 2, $f : \mathcal{U} \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ une paramétrisation locale (= une immersion injective) et

$$\begin{array}{cccc} \gamma : & I & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ & t & \longmapsto & (u(t), v(t)) \end{array}$$

une courbe régulière. La courbe

$$\overline{\gamma} := f \circ \gamma : I \longrightarrow S$$

est une courbe paramétrée dont le support est inclu dans S. On dit alors que la courbe est ≪ tracée sur la surface ≫ .

Première forme fondamentale

- La longueur de $\overline{\gamma}$ est

$$\begin{aligned} Long(\overline{\gamma}) &= \int_I \|(\overline{\gamma})'(t)\| dt \\ &= \int_I \langle \frac{\partial}{\partial t}(f\circ\gamma)(t), \frac{\partial}{\partial t}(f\circ\gamma)(t)\rangle^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_I \Big(Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

avec

$$E(u,v) = \|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\|^2 \qquad G(u,v) = \|\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\|^2$$

$$F(u,v) = \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle.$$

Première forme fondamentale

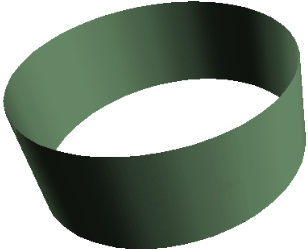
- La longueur de γ est

$$\begin{aligned} Long(\gamma) &= \int_I \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_I \left(u'(t)^2 + v'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

Proposition.– *Le paramétrage $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ préserve la longueur des courbes ssi*

$$\forall u, v \in \mathcal{U}, \quad E(u,v) = G(u,v) = 1 \quad et \quad F(u,v) = 0.$$

Première forme fondamentale

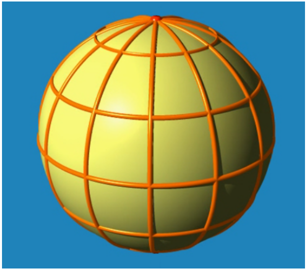


Exemple 1.– Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u), \sin(u), v) \end{array}$$

Un calcul immédiat montre que $E = G = 1$ et $F = 0$: la longueur des courbes est donc préservée.

Première forme fondamentale



Exemple 2.– Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\times]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\} \\ & (u,v) & \longmapsto & (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)) \end{array}$$

Un calcul immédiat montre que $E = \sin^2(v)$, $G = 1$ et $F = 0$: la longueur des courbes $u \longmapsto f(u, v_0)$ n'est pas préservée sauf si $v_0 = \frac{\pi}{2}$.

Première forme fondamentale

Définition.– Soient $S \subset \mathbb{R}^3$ une sous-variété de dimension 2 et $p \in S$. On appelle PREMIÈRE FORME FONDAMENTALE et on note $I_p(.,.)$ la forme bilinéaire sur T_pS qui est la restriction à T_pS du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit :

$$\forall X, Y \in T_pS, \quad I_p(X,Y) := \langle X, Y \rangle.$$

• Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ une paramétrisation (=immersion injective) de S. Supposons $p = f(u,v)$ et écrivons X et Y dans la base $(f_u(u,v), f_v(u,v))$ de T_pS :

$$X = X_u f_u + X_v f_v \quad \text{et } Y = Y_u f_u + Y_v fv.$$

Première forme fondamentale

• On a alors

$$\begin{aligned} I_p(X,Y) &= \langle X, Y\rangle \\ &= \langle X_u f_u + X_v f_v, Y_u f_u + Y_v fv\rangle \\ &= X_u Y_u \langle f_u, f_u\rangle + X_v Y_v \langle f_v, f_v\rangle \\ &\quad +(X_u Y_v + X_v Y_u)\langle f_u, f_v\rangle \\ &= X_u Y_u E(u,v) + X_v Y_v G(u,v). \\ &\quad +(X_u Y_v + X_v Y_u) F(u,v) \end{aligned}$$

• La matrice $Mat_{\mathcal{B}(f)}(I)$ de I_p dans la base $\mathcal{B}(f) = (f_u, f_v)$ est donc

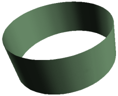
$$Mat_{\mathcal{B}(f)}(I) := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Première forme fondamentale

• En particulier

$$I_p(X,Y) = (X_u, X_v)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_u \\ Y_v \end{pmatrix}$$

Définition.– Les fonctions E, F et G sont appelées les COEFFICIENTS DE LA PREMIÈRE FORME FONDAMENTALE dans la base $\mathcal{B}(f) = (f_u, f_v)$.



Première forme fondamentale

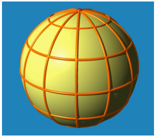
Exemple 1 (suite).– Dans la base $\mathcal{B}(f) = (f_u, f_v)$ donnée par

$$f_u = (-\sin(u), \cos(u), 0), \quad f_v = (0, 0, 1)$$

la matrice de la première forme fondamentale du cylindre est

$$Mat_{\mathcal{B}(f)}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est indépendante du point $p = f(u, v)$ choisi.



Première forme fondamentale

Exemple 2 (suite).– Dans la base $\mathcal{B}(f) = (f_u, f_v)$ donnée par

$$f_u = (-\sin(u)\sin(v), \cos(u)\sin(v), 0)$$

$$f_v = (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), -\sin(v))$$

la matrice de la première forme fondamentale de la sphère privée du pôle nord et du pôle sud est

$$Mat_{\mathcal{B}(f)}(I) = \begin{pmatrix} \sin^2(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle ne dépend que de v.

Première forme fondamentale

Définition.– Une application $\Phi : S_1 \to S_2$ entre deux sous-variétés de dimensions 2 est C^k-ISOMÉTRIQUE, $k \geq 1$, si pour toute C^k paramétrisation (= immersion injective)

$$f_1 : \mathcal{U} \longrightarrow S_1$$

l'application $f_2 = \Phi \circ f_1$ est une C^k paramétrisation de S_2 et si

$$Mat_{\mathcal{B}(f_1)}(I_{S_1}) = Mat_{\mathcal{B}(f_2)}(I_{S_2}).$$

Première forme fondamentale

• En particulier, si S_1 et S_2 sont isométriques alors pour toute courbe régulière

$$\overline{\gamma} : I \longrightarrow S_1$$

on a

$$Long(\overline{\gamma}) = Long(\Phi \circ \overline{\gamma}).$$

Exercice.– Soient $\Phi : S_1 \to S_2$ une application, $f_1 : \mathcal{U} \to S_1$ une paramétrisation et $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ une reparamétrisation (=difféomorphisme), montrer que

$$Mat_{\mathcal{B}(f_1)}(I_{S_1}) = Mat_{\mathcal{B}(f_2)}(I_{S_2})$$

implique

$$Mat_{\mathcal{B}(f_1\circ\varphi)}(I_{S_1}) = Mat_{\mathcal{B}(f_2\circ\varphi)}(I_{S_2}).$$

Première forme fondamentale

• Dans la définition d'une application isométrique, si la propriété est vérifiée pour une paramétrisation f_1 surjective alors elle sera vérifiée pour toute paramétrisation.

Exemple 3.– Soient $S_1 \subset \mathbb{E}^3$ le plan horizontal, $S_2 \subset \mathbb{E}^3$ le cylindre $x^2 + y^2 = 1$. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & S_1 & \longrightarrow & S_2 \\ & (x, y, 0) & \longmapsto & (\cos x, \sin x, y) \end{array}$$

est isométrique. En effet, considérons paramétrisation bijective suivante de S_1 :

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & S_1 \\ & (u, v) & \longmapsto & (u, v, 0). \end{array}$$

Première forme fondamentale

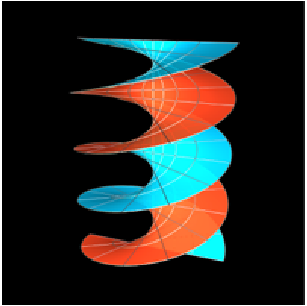
Alors l'application $f_2 = \Phi \circ f_1$ est donnée par

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & S_2 \\ & (u, v) & \longmapsto & (\cos(u), \sin(u), v) \end{array}$$

réalise une paramétrisation de S_2. D'après les calculs faits à l'exemple 1, on a

$$Mat_{\mathcal{B}(f_1)}(I_{S_1}) = Mat_{\mathcal{B}(f_2)}(I_{S_2}).$$

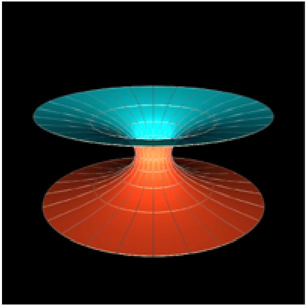
Première forme fondamentale



Exemple 4.– On considère l'hélicoïde $\mathcal{H}$ définie comme l'image de la paramétrisation ci-dessous :

$$\begin{array}{rccl} f_1 : &]0, 2\pi[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & (u, v) & \longmapsto & (sh(v)\cos(u), sh(v)\sin(u), u) \end{array}$$

Première forme fondamentale



Parallèlement, on considère également la caténoïde $\mathcal{C}$ définie comme étant l'image de la paramétrisation ci-dessous :

$$\begin{array}{rccl} f_2 : &]0, 2\pi[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & (u, v) & \longmapsto & (-ch(v)\sin(u), ch(v)\cos(u), v) \end{array}$$

Première forme fondamentale

- On a

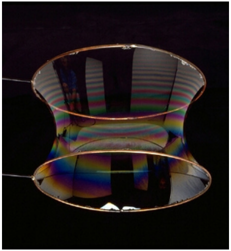
$$\|\frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v)\|^2 = \|\frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v)\|^2 = ch^2 v$$

$$\|\frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v)\|^2 = \|\frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v)\|^2 = ch^2 v$$

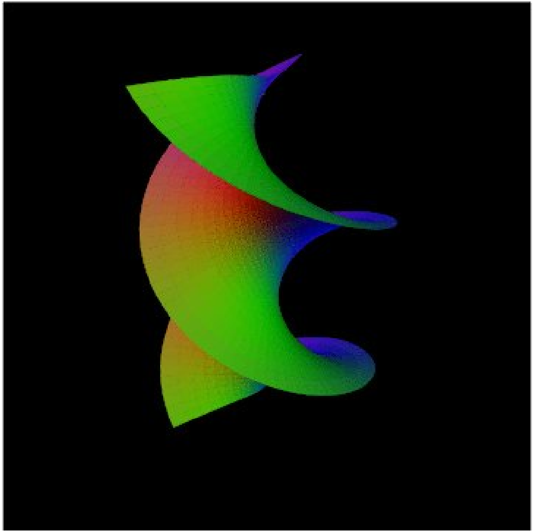
$$\langle\frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v)\rangle = \langle\frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v)\rangle = 0$$

ainsi

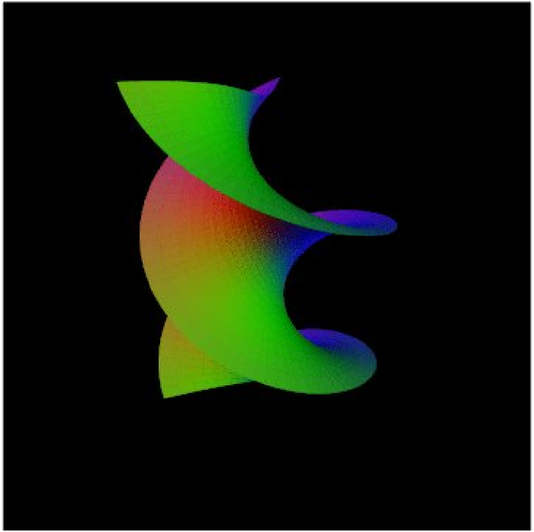
$$Mat_{\mathcal{B}(f_1)}(I_{\mathcal{H}}) = Mat_{\mathcal{B}(f_2)}(I_{\mathcal{C}})$$



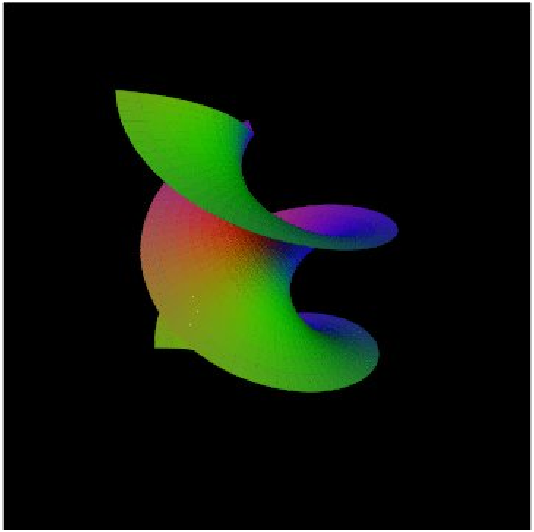
Première forme fondamentale



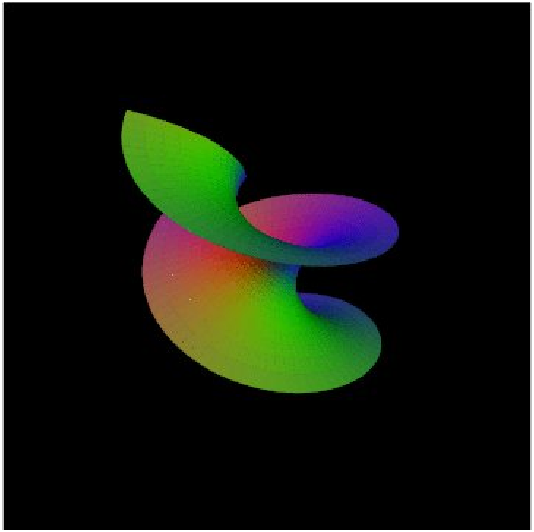
Première forme fondamentale



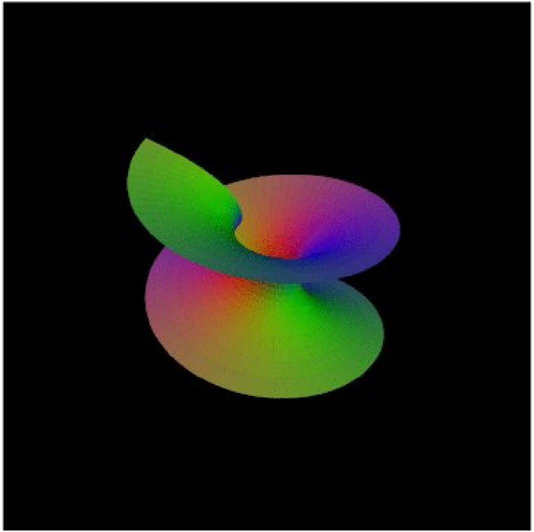
Première forme fondamentale



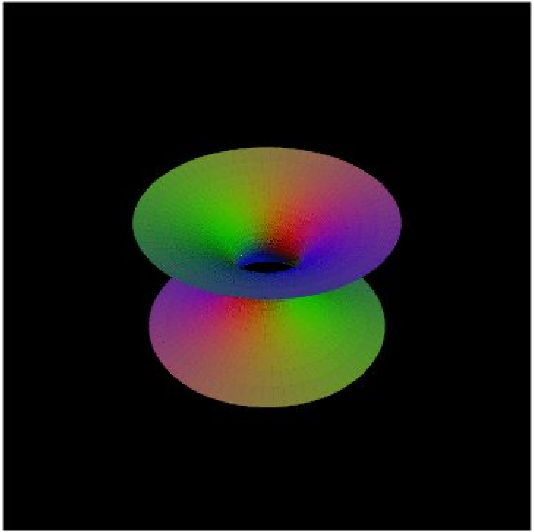
Première forme fondamentale



Première forme fondamentale



Première forme fondamentale



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

• L'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, un véritable génie.

• Gauss n'ayant publié qu'une partie infime de ses découvertes, la postérité découvre la profondeur et l'étendue de son œuvre uniquement lorsque son journal intime, publié en 1898, est découvert et exploité.

• Distant et austère, il détestait enseigner et ne travailla jamais comme professeur de mathématiques.

• Gauss était profondément pieux et conservateur. Il soutint la monarchie et s'opposa à Napoléon qu'il vit comme un semeur de révolution.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

• Il apporta des contributions majeures en théorie des nombres, en statistiques, en analyse, en géométrie differentielle, en geophysique, en electrostatique, en astronomie et en optique.

• Concernant cette séance, c'est lui le premier qui a compris l'importance de la première forme fondamentale : elle détermine complètement la géométrie intrinsèque de la surface.

• A ce sujet il découvre un théorème merveilleux, le célébrissime *Theorema egregium* que nous verrons dans la leçon intitulée *Courbure*.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

• Une histoire apocryphe : prévenu au milieu d'un problème que sa femme était en train de mourir Gauss aurait répondu : « Dites lui d'attendre un moment que j'aie fini. »

Aire d'une (portion de) surface

Définition.– Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ une paramétrisation régulière (locale ou globale) d'une sous-variété $S \subset \mathbb{E}^3$ de dimension 2. On appelle AIRE DE f le nombre

$$Aire(f) := \int_{\mathcal{U}} \|f_u \wedge f_v\| dudv.$$

• Rappelons que $\|X \wedge Y\|$ est l'aire du parallélogramme formé par X et Y.

• L'identité de Lagrange

$$\|X\|^2\|Y\|^2 = \|X \wedge Y\|^2 + \langle X, Y\rangle^2$$

donne ici

$$\begin{aligned} \|X \wedge Y\|^2 &= \|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2 \\ &= EG - F^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Aire d'une (portion de) surface

- Ainsi

$$Aire(f) := \int_{\mathcal{U}} \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

- Notons que

$$EG - F^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|f_u \wedge f_v\| = 0.$$

Par conséquent :

Lemme.– *Une application $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion en $p \in \mathcal{U}$ ssi*

$$(EG - F^2)(p) \neq 0.$$

Aire d'une (portion de) surface

Proposition.– *Soit $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ un C^1-difféomorphisme et $g = f \circ \varphi$ une reparamétrisation alors*

$$Aire(g) = Aire(f).$$

Démonstration.– On écrit

$$dg_{(u',v')} = df_{\varphi(u',v')} \circ d\varphi_{(u',v')}$$

sous forme matricielle :

$$(g_u, g_v)(u', v') = (f_u, f_v)_{\varphi(u',v')} \begin{pmatrix} (\varphi_1)_{u'} & (\varphi_1)_{v'} \\ (\varphi_2)_{u'} & (\varphi_2)_{v'} \end{pmatrix}_{(u',v')}$$

où bien sûr $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

Aire d'une (portion de) surface

- Ainsi

$$g_{u'}(u',v') = (\varphi_1)_{u'}(u',v').f_u\circ\varphi(u',v') + (\varphi_2)_{u'}(u',v').f_v\circ\varphi(u',v')$$

$$g_{v'}(u',v') = (\varphi_1)_{v'}(u',v').f_u\circ\varphi(u',v') + (\varphi_2)_{v'}(u',v').f_v\circ\varphi(u',v')$$

- Puis

$$\begin{aligned} g_{u'} \wedge g_{v'} &= \big((\varphi_1)_{u'}(\varphi_2)_{v'} - (\varphi_1)_{v'}(\varphi_2)_{u'}\big)\,(f_u \wedge f_v)\circ\varphi \\ &= (det\ d\varphi_{(u',v')}).(f_u \wedge f_v)\circ\varphi \end{aligned}$$

- Par conséquent

$$\begin{aligned} Aire(g) &= \int_{\mathcal{V}} \|g_{u'} \wedge g_{v'}\| du' dv' \\ &= \int_{\mathcal{V}} |det\ d\varphi_{(u',v')})|.\|(f_u \wedge f_v)\circ\varphi\| du' dv' \end{aligned}$$

Aire d'une (portion de) surface

• La formule du changement de variables dans les intégrales permet de conclure

$$\begin{aligned} Aire(g) &= \int_{\mathcal{U}} \|f_u \wedge f_v\| du dv \\ &= Aire(f) \qquad \square \end{aligned}$$

Exemple.– Aire d'un cylindre. Soit

$$\begin{array}{rccc} f : &]0, 2\pi[\times]0, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (\cos(u), \sin(u), v) \end{array}$$

On a $E = G = 1$ et $F = 0$, donc

$$Aire(f) = \int_{]0,2\pi[\times]0,1[} \sqrt{EG - F^2} du dv = 2\pi.$$

Mais $f(]0, 2\pi[\times]0, 1[)$ n'est pas tout à fait un cylindre...

Aire d'une (portion de) surface

• Bien sûr, on peut étendre la définition de l'aire au cas où $f:\overline{\mathcal{U}}\longrightarrow S$.

Lemme évident.– *Si $\overline{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}$ est de mesure nulle alors*

$$Aire(f)=Aire(f_{|\mathcal{U}})$$

que f soit régulière ou non sur $\overline{\mathcal{U}}\setminus\mathcal{U}$.

• Dans l'exemple précédent, il est donc indifférent de travailler avec $\mathcal{U}=]0,2\pi[\times]0,1[$ ou $\overline{\mathcal{U}}=[0,2\pi]\times[0,1]$.

Aire d'une (portion de) surface

• Attention, contrairement à ce que l'intuition pourrait laisser penser il existe des ouverts $\mathcal{U}$ avec $\overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$ de mesure non nulle.

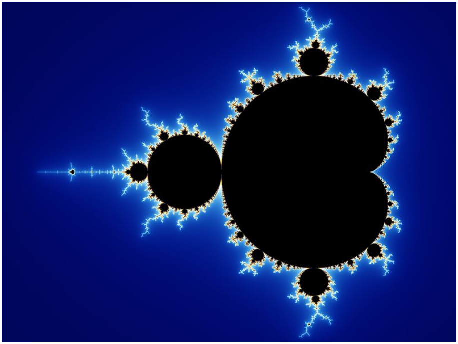
• Un exemple en dimension un : prendre $\mathcal{U} =$ le complémentaire dans $[0, 1]$ de l'ensemble *SVC* de Smith–Volterra–Cantor.

Ce complémentaire est ouvert car réunion de tous les ouverts que l'on a ôtés lors de la construction du *SVC*. On montre que $\overline{\mathcal{U}} = [0, 1]$ et que la mesure de Lebesgue de $SVC = \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$ vaut $\dfrac{1}{2}$.

Aire d'une (portion de) surface

• En général, déterminer la mesure de $\overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$ est un problème difficile.

• Voici une question ouverte : *le bord de l'ensemble de Mandelbrot est-il de mesure nulle ?*



On sait depuis 1998 que la dimension de Hausdorff du bord vaut 2

Aire d'une (portion de) surface

Application : l'aire de la sphère.– On considère

$$\begin{array}{rcl} f : [0,2\pi]\times[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u)\sin(v),\sin(u)\sin(v),\cos(v)). \end{array}$$

Restreinte à $\mathcal{U} =]0,2\pi[\times]0,\pi[$, cette paramétrisation est une immersion injective et on a déjà calculé :

$$E=\sin^2(v),\quad F=0,\quad G=1.$$

• On a donc

$$\begin{array}{rcl} Aire(f) & = & \displaystyle\int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \sqrt{EG-F^2}dudv \\ & = & 2\pi\displaystyle\int_0^\pi \sin(v)dv \\ & = & 4\pi. \end{array}$$

Aire d'une (portion de) surface

• En se permettant un léger abus de notation consistant à confondre f et son support, on écrit

$$Aire(\mathbb{S}^2) = 4\pi.$$

• Attention toutefois, en général $Aire(f)$ n'est pas l'aire du support au sens intuitif. Par exemple

$$\begin{array}{rcl} g : [0,4\pi]\times[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u)\sin(v),\sin(u)\sin(v),\cos(v)). \end{array}$$

a pour support $\mathbb{S}^2$ mais

$$Aire(g) = 8\pi.$$

Aire d'une (portion de) surface

Définition.– Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{E}^3$ une immersion. La fonction $\sqrt{EG - F^2}$ est appelée l'ÉLÉMENT D'AIRE de f.

• On note également d^2S pour $\sqrt{EG - F^2}dudv$. Ainsi

$$Aire(f) := \int_{\mathcal{U}} d^2S$$

• Supposons f injective et soit $\overline{h} : S \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Définition.– On appelle INTÉGRALE DE $\overline{h}$ SUR $S = f(\mathcal{U})$ le nombre

$$\int_S \overline{h}\, d^2S := \int_{\mathcal{U}} h(u,v)\sqrt{EG - F^2}dudv$$

où $h := \overline{h} \circ f$.

Aire d'une (portion de) surface

• On vérifie comme pour l'aire que ce nombre est invariant par reparamétrage.

Définition.– Une application $\Phi : S_1 \to S_2$ entre deux sous-variétés de dimensions 2 est un C^k-SYMPLECTOMORPHISME, $k \geq 1$, si pour toute C^k paramétrisation

$$f_1 : \mathcal{U} \longrightarrow S_1$$

l'application $f_2 = \Phi \circ f_1$ est une C^k paramétrisation de S_2 et si les éléments d'aire de f_1 et f_2 sont égaux i. e. :

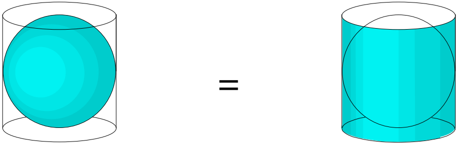
$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2.$$

• Dans ce cas, pour tout borélien $A \subset \mathcal{U}$, on a :

$$Aire(f_{1|A}) = Aire(f_{2|A}).$$

Aire d'une (portion de) surface

Un exemple : Le théorème d'Archimède.– *La projection radiale de la sphère sur son cylindre circonscrit est un symplectomorphisme. En particulier l'aire de la sphère est égale à celle du cylindre circonscrit.*



La projection radiale est l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times]-1, 1[\\ & (x, y, z) & \longmapsto & \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right). \end{array}$$

Aire d'une (portion de) surface

Démonstration.– Soit

$$\begin{array}{rcl} f_1 : [0,2\pi]\times]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\} \\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)). \end{array}$$

la paramétrisation usuelle de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\}$. Cette paramétrisation est surjective.

- Soit $f_2 = \Phi \circ f_1$:

$$\begin{array}{rcl} f_2 : [0,2\pi]\times]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times]-1,1[\\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u), \sin(u), \cos(v)). \end{array}$$

Aire d'une (portion de) surface

• La matrice de la première forme fondamentale de f dans la base $\mathcal{B}(f_1)$ est

$$Mat_{\mathcal{B}(f_1)}(I) = \begin{pmatrix} \sin^2(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent $\sqrt{E_1G_1 - F_1^2} = sin(v)$.

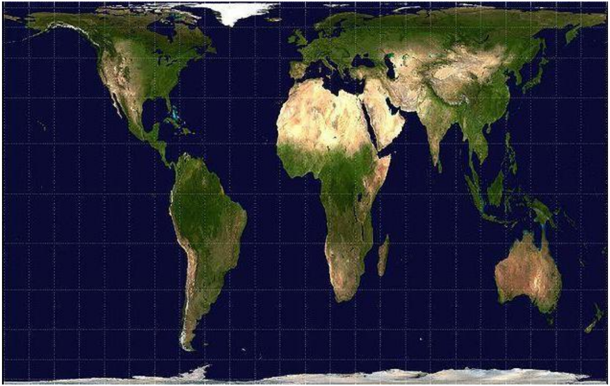
• La matrice de la première forme fondamentale de f_2 dans la base $\mathcal{B}(f_2)$ est

$$Mat_{\mathcal{B}(f_2)}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(v) \end{pmatrix}$$

et par conséquent $\sqrt{E_2G_2 - F_2^2} = sin(v)$. $\square$

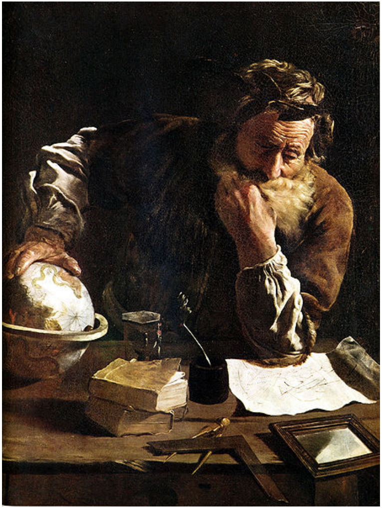
• Notons que Φ n'est pas une application isométrique.

Aire d’une (portion de) surface



La projection radiale : une carte qui ne ment pas sur les aires

Archimède (-287/-212)



Archimède par Domenico Fetti (1620)

Archimède (-287/-212)

• Considéré comme le plus grand mathématicien de l'Antiquité et l'un des plus grands de tous les temps.

• Calcule l'aire sous un arc de parabole, donne un encadrement de π d'une remarquable précision, établit des formules pour les volumes des surfaces de révolution.

• Egalement physicien (poussée d'Archimède) et ingénieur (vis d'Archimède).

• Il vivait à Syracuse, en Sicile, alors dans la Grande Grèce.

Archimède (-287/-212)

La mort d'Archimède par Thomas Degeorge

Archimède (-287/-212)

Jean-Etienne Montucla,
né à Lyon en 1725.

≪ Archimède avait désiré que l'on gravât [sur son tombeau] une sphère inscrite dans un cylindre en mémoire de sa découverte sur le rapport de ces corps.
Cela fut exécuté, et c'est à ce signe que Ciceron, étant questeur en Sicile, retrouva ce monument au milieu des ronces et des épines qui le dérobaient à la vue ≫