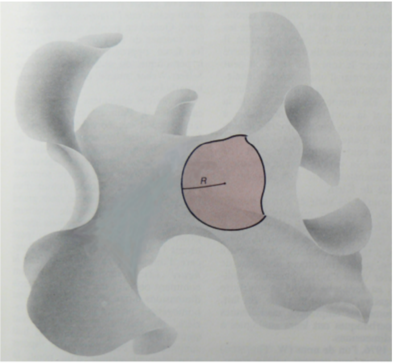
CM-R2 : Courbures

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Une surface hyperbolique

Applications différentiables

Définition.– Soient $p \in S$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant p et $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme qui linéarise S :

$$\phi(U \cap S) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}.$$

On note $\mathcal{U} := \phi(U \cap S)$ puis $f = \phi^{-1}_{|\mathcal{U}}$ et u tel que $f(u) = p$. Une application $h : S \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est dite DE CLASSE C^k en p ($k \geq 1$) si $h \circ f$ est de classe C^k en u.

• Cette définition ne dépend pas du choix du difféomorphisme qui linéarise S. En effet, soient ϕ_1 et ϕ_2 deux tels difféomorphismes et

$$f_1 = (\phi_1^{-1})_{|\mathcal{U}_1} \quad \text{et} \quad f_2 = (\phi_2^{-1})_{|\mathcal{U}_2},$$

alors

$$f_2^{-1} \circ f_1 = (\phi_2^{-1} \circ \phi_1)_{|\mathcal{U}_1}$$

est un C^k-difféomorphisme.

Applications différentiables

• Puisque

$$\begin{aligned} h\circ f_1 &= h\circ(f_2\circ f_2^{-1})\circ f_1 \\ &= (h\circ f_2)\circ(f_2^{-1}\circ f_1) \end{aligned}$$

on déduit que $h\circ f_1$ est différentiable en u ssi $h\circ f_2$ est différentiable en $(f_1^{-1}\circ f_2)(u)$.

• Ceci montre également que $h : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^k en p si $h\circ f$ est de classe C^k en u où $f : \mathcal{U} \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ une immersion injective telle que $f(u) = p$

Exemple.– Soit S une C^2-sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Si elle existe, l'application normale $n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est de classe C^1.

• En effet, soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ est une immersion injective de classe C^2 alors $n\circ f = N$ et

$$N(u,v) = \pm\frac{f_u\wedge f_v}{\|f_u\wedge f_v\|}(u,v).$$

Applications différentiables

Définition.– Soit $h : S \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^1. On définit la DIFFÉRENTIELLE en $p \in S$ de h par

$$\forall X \in \overrightarrow{T_pS}, \quad dh_p(X) := (h \circ \gamma)'(0)$$

où $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow S$ est telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$.

• Cette définition ne dépend pas de l'application γ que l'on a choisie.

• En effet, soit $\widetilde{\gamma} :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow S$ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = p$ et $\widetilde{\gamma}'(0) = X$.

• On considère un difféomorphisme ϕ linéarisant S et on note $\delta = \phi \circ \gamma$ et $\widetilde{\delta} = \phi \circ \widetilde{\gamma}$. On a bien sûr

$$\widetilde{\delta}(0) = \delta(0) \quad \text{et} \quad \widetilde{\delta}'(0) = \delta'(0).$$

Applications différentiables

- L'application $h \circ \phi^{-1}$ est de classe C^1 (au sens d'une application entre ouverts d'espace de Banach) par définition du caractère C^1 de h.

- On a donc

$$d(h \circ \widetilde{\gamma}) = d(h \circ \phi^{-1}) \circ d(\phi \circ \widetilde{\gamma}) = d(h \circ \phi^{-1}) \circ d\widetilde{\delta}$$

d'où

$$(h \circ \widetilde{\gamma})'(0) = d(h \circ \phi^{-1})_{\widetilde{\delta}(0)}(\widetilde{\delta}'(0)).$$

- Similairement

$$(h \circ \gamma)'(0) = d(h \circ \phi^{-1})_{\delta(0)}(\delta'(0)).$$

- Puisque $\widetilde{\delta}(0) = \delta(0)$ et $\widetilde{\delta}'(0) = \delta'(0)$ on a nécessairement

$$(h \circ \widetilde{\gamma})'(0) = (h \circ \gamma)'(0).$$

Applications différentiables

Proposition.– *L'application*

$$dh_p : \overrightarrow{T_pS} \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

est linéaire.

• La démonstration est laissée en exercice. L'argument est proche de celui utilisé pour montrer que $\overrightarrow{T_pS}$ est un sous-espace vectoriel.

Courbures

Definition.– Soient $S \subset \mathbb{R}^3$ une sous-variété de dimension 2 et $n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une normale unitaire. Pour tout $p \in S$, l'opposé de la différentielle de n est appelé l' OPÉRATEUR DE WEINGARTEN de S.

$$W_p = -dn_p : \overrightarrow{T_pS} \longrightarrow \overrightarrow{T_pS}.$$

Cet opérateur change de signe selon le choix de la normale unitaire.

Courbures

Définition.– On appelle COURBURE DE GAUSS en p et on note $K(p)$, le déterminant $det(W_p)$ de l'endomorphisme de Weingarten. On appelle COURBURE MOYENNE et on note $H(p)$ sa demi-trace $\frac{1}{2}tr(W_p)$.

Courbures

Proposition.– *L'endomorphisme de Weingarten est auto-adjoint. En particulier, il est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Démonstration.– Il faut montrer que

$$\forall\, p \in S, \ \ \forall\, X, Y \in Vect(n(p))^{\perp}, \quad \langle dn_p(X), Y\rangle = \langle X, dn_p(Y)\rangle.$$

• Soit (e_1, e_2) une base de $Vect(n(p))^{\perp}$. Par (bi)linéarité, il suffit de montrer la relation pour les couples (e_1, e_1), (e_2, e_2) et (e_1, e_2). Seul le dernier cas est non trivial.

• Soit $f : \mathcal{U} \to S$ une paramétrisation et (e_u, e_v) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On choisit

$$e_1(p) = df_{(u,v)}(e_u) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$$

$$e_2(p) = df_{(u,v)}(e_v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v).$$

Courbures

- On a

$$\begin{aligned} dn_p(e_1) &= d(n \circ f)_{(u,v)}(e_u) \\ &= dN_{(u,v)}(e_u) \\ &= \frac{\partial N}{\partial u}(u,v) \end{aligned}$$

- De même

$$dn_p(e_2) = \frac{\partial N}{\partial v}(u,v).$$

- Ainsi

$$\langle dn_p(e_1), e_2\rangle = \langle \frac{\partial N}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle$$

Courbures

- De $\langle N, \dfrac{\partial f}{\partial v}\rangle = 0$, on déduit

$$\langle \frac{\partial N}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle = -\langle N(u,v), \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v)\rangle$$

- Finalement

$$\langle dn_p(e_1), e_2\rangle = -\langle N(u,v), \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v)\rangle.$$

- De même

$$\langle e_1, dn_p(e_2)\rangle = -\langle N(u,v), \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u,v)\rangle.$$

- L'égalité recherchée se déduit du caractère C^2 de f. $\square$

Courbures

Définition.– Les valeurs propres de W_p sont appelées les COURBURES PRINCIPALES et notées $\lambda_1(p)$ et $\lambda_2(p)$ (éventuellement $\lambda_1(p) = \lambda_2(p)$). Les vecteurs propres sont appelés les DIRECTIONS PRINCIPALES.

• En particulier $K = \lambda_1\lambda_2$ et $H = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

Définition.– La forme bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{T_pS} \times \overrightarrow{T_pS} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & \langle W_p(X), Y\rangle \end{array}$$

est appelée la SECONDE FORME FONDAMENTALE, elle se note II_p.

Propriété.– *Puisque W_p est auto-adjoint, II_p est symétrique.*

Courbures

- Soit $f : \mathcal{U} \to S$ une paramétrisation. On pose

$$\mathcal{L} = -\langle N_u, f_u \rangle = \langle N, f_{uu} \rangle \quad \mathcal{N} = -\langle N_v, f_v \rangle = \langle N, f_{vv} \rangle$$

$$\mathcal{M} = -\langle N_u, f_v \rangle = -\langle N_v, f_u \rangle = \langle N, f_{uv} \rangle$$

- La matrice de II dans la base $\mathcal{B}(f) = (f_u, f_v)$ est donc

$$Mat_{\mathcal{B}(f)}(II) = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}.$$

- En particulier

$$II(X, Y) = (X_u, X_v) \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_u \\ Y_v \end{pmatrix}$$

Courbures

• La relation

$$\forall X, Y \in T_pS, \quad II_p(Y, X) = \langle Y, W_p(X) \rangle$$

s'écrit sous forme matricielle dans la base (f_u, f_v)

$$(Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$(Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

est la matrice de W_p dans la base (f_u, f_v).

Courbures

• Ainsi

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

• La paramétrisation f étant régulière on a $EG - F^2 > 0$. La matrice de la première forme fondamentale dans la base (f_u, f_v) est donc inversible et

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\mathcal{L} - F\mathcal{M} & G\mathcal{M} - F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M} - F\mathcal{L} & E\mathcal{N} - F\mathcal{M} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Courbures

Proposition.– *La matrice de l'opérateur de Weingarten W dans la base $\mathcal{B}(f) = (f_u, f_v)$ est*

$$Mat_{\mathcal{B}(f)}(W) = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\mathcal{L} - F\mathcal{M} & G\mathcal{M} - F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M} - F\mathcal{L} & E\mathcal{N} - F\mathcal{M} \end{pmatrix}.$$

En particulier

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{2}\frac{E\mathcal{N} + G\mathcal{L} - 2F\mathcal{M}}{EG - F^2}$$

et les courbures principales λ_1, λ_2 sont les solutions de

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$$

(éventuellement $\lambda_1 = \lambda_2$ en cas de racine double).

Courbures

Démonstration.– Il suffit de calculer la trace de

$$\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G\mathcal{L}-F\mathcal{M} & G\mathcal{M}-F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M}-F\mathcal{L} & E\mathcal{N}-F\mathcal{M} \end{pmatrix}$$

pour obtenir H. Pour le calcul du déterminant, il est plus malin de partir de l'expression

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

pour obtenir directement celle de K. Enfin, W_p étant auto-adjoint pour I_p, il est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On est donc assuré que le polynôme caractéristique

$$\lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0$$

possède deux racines réelles ou une double. $\square$

Courbures

Proposition.– *En tout point $p \in S$, on a :*

$$H^2(p) \geq K(p).$$

Démonstration.– Le polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0$$

possède deux racines réelles ou une double, par conséquent son discriminant $\Delta(P)$ est positif ou nul, or

$$\Delta(P) = 4(H^2(p) - K(p)).$$

$\square$

Courbures

Exemple 1 : le plan.– Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,0). \end{array}$$

une paramétrisation du plan horizontal. Un calcul direct montre que $E = G = 1$, $F = 0$, puis $\mathcal{L} = \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0$. Donc $W_p = 0$ pour tout $p \in P := f(\mathbb{R}^2)$. Par conséquent $K(p) = H(p) = 0$ et $\lambda_1(p) = \lambda_2(p) = 0$. Enfin, toute direction de P est direction principale.

Courbures

Exemple 2 : le cylindre.– Soit

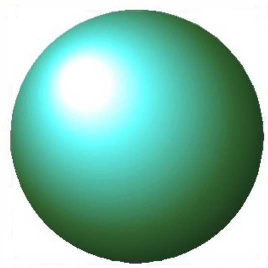
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\cos(u), \sin(u), v). \end{array}$$

une paramétrisation de $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Courbures

- On a déjà vu que $E = G = 1$ et $F = 0$.
- On a
$$N(u, v) = (\cos(u), \sin(u), 0)$$
d'où
$$\mathcal{L} = 1, \quad \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0.$$
- Dans la base $\mathcal{B}(f) = (f_u, f_v)$ la matrice de W_p est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
d'où $K(p) = 0$, $H(p) = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_1(p) = 1$ et $\lambda_2(p) = 0$.
- Les directions principales sont données par f_u et f_v.

Courbures



Exemple 3 : la sphère.– Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\times]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\cos(u)\sin(v),\sin(u)\sin(v),\cos(v)). \end{array}$$

une paramétrisation de la sphère privée des pôles Nord et Sud.

Courbures

- On a déjà vu que $E = \sin^2(v)$, $F = 0$ et $G = 1$.
- On a

$$N(u,v) = -f(u,v)$$

d'où

$$\mathcal{L} = \sin^2(v), \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{N} = 1.$$

- Dans la base $\mathcal{B}(f) = (f_u, f_v)$ la matrice de W_p est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Par conséquent $W_p = Id$ d'où $K(p) = 1$, $H(p) = 1$ et $\lambda_1(p) = \lambda_2(p) = 1$.
- Toute direction est direction principale.

Courbures

Exercice 1.– Refaire ces calculs pour une sphère de rayon R et constater que

$$W_p = \frac{1}{R} Id, \quad K(p) = \frac{1}{R^2} \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{1}{R}.$$

Exercice 2.– Refaire également ces calculs pour un cylindre dont la base un cercle de rayon R.

Julius Weingarten (1836-1910)

Julius Weingarten (1836-1910)

• D'origine très modeste, il n'obtient pas de poste universitaire à la hauteur de son talent.

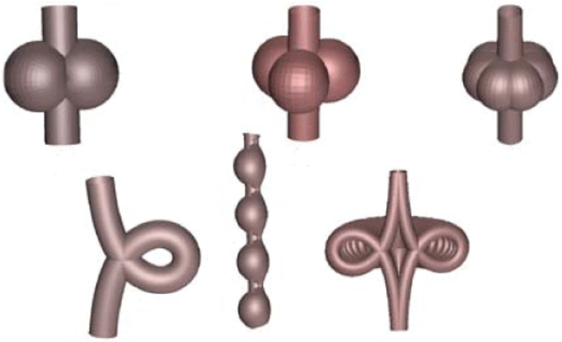
• Il est connu pour ses recherches sur les familles de surfaces isométriques entre elles.

• Une surface S pour laquelle il existe une fonction $F(.,.)$ telle que

$$\forall p \in S, \quad F(\lambda_1(p), \lambda_2(p)) = 0$$

est appelée *surface de Weingarten*.

Julius Weingarten (1836-1910)



Quelques surfaces de Weingarten

Julius Weingarten (1836-1910)

Jean Darboux

et

Luigi Bianchi

Ses potes !

Le *Theorema egregium*

Theorema egregium (Gauss 1827).– *Soient S_1 et S_2 deux sous-variétés de dimension 2 de courbure de Gauss K_1 et K_2. Si $\Phi : S_1 \to S_2$ est une application isométrique alors*

$$\forall p \in S_1, \quad K_1(p) = K_2(\Phi(p)).$$

• On l'a constaté pour le cas du plan et du cylindre. Ces deux surfaces sont isométriques (même première forme fondamentale) et leur courbure de Gauss est effectivement la même (=0). En revanche, les courbures moyennes sont différentes.

• Le plan et la sphère n'ont pas la même courbure de Gauss (l'une est nulle, l'autre non), donc ils ne sont pas isométriques.

Le *Theorema egregium*

• Il n'existe pas de carte plane C^3 non menteuse de la Terre !

• La réciproque du *Theorema egregium* est fausse. Deux sous-variétés de dimension 2 peuvent avoir la même courbure sans être isométriques.

Exercice.– Soient

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u\sin(v), u\cos(v), \ln(u)). \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u\cos(v), u\sin(v), v). \end{array}$$

Montrer que les surfaces $f(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ et $g(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ ont même courbure de Gauss mais qu'elles ne sont pas isométriques.

Le *Theorema egregium*

Démonstration.– C'est un long calcul qui exprime K en termes de E, F et G et de leurs dérivées. Il existe une démonstration plus conceptuelle mais elle n'est pas accessible à ce niveau du cours.

• Puisque

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

la formule

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2}$$

s'écrit

$$\begin{aligned} K(EG - F^2)^2 &= \langle f_{uu}, f_u \wedge f_v\rangle\langle f_{vv}, f_u \wedge f_v\rangle - \langle f_{uv}, f_u \wedge f_v\rangle^2 \\ &= det(f_{uu}, f_u, f_v)det(f_{vv}, f_u, f_v) - det^2(f_{uv}, f_u, f_v). \end{aligned}$$

Le *Theorema egregium*

- D'autre part, on a

$$\begin{aligned} det(X,Y,Z).det(X',Y,Z) &= det(X,Y,Z).det^t(X',Y,Z) \\ &= det((X,Y,Z)^t(X',Y,Z)) \\ &= det\begin{pmatrix} X.X' & X.Y & X.Z \\ Y.X' & Y.Y & Y.Z \\ Z.X' & Z.Y & Z.Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$det^2(X,Y,Z) = det\begin{pmatrix} X.X & X.Y & X.Z \\ Y.X & Y.Y & Y.Z \\ Z.X & Z.Y & Z.Z \end{pmatrix}$$

Le *Theorema egregium*

- En remplaçant, on trouve

$$K(EG - F^2)^2 =$$

$$\begin{vmatrix} \langle f_{uu}, f_{vv}\rangle & \langle f_{uu}, f_u\rangle & \langle f_{uu}, f_v\rangle \\ \langle f_u, f_{vv}\rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{vv}\rangle & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle & \langle f_{uv}, f_u\rangle & \langle f_{uv}, f_v\rangle \\ \langle f_u, f_{uv}\rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{uv}\rangle & F & G \end{vmatrix}$$

Le *Theorema egregium*

- D'autre part

$$\begin{vmatrix} a & \blacklozenge \\ \bigstar & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a' & \spadesuit \\ \clubsuit & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - a' + a' & \blacklozenge \\ \bigstar & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a' & \spadesuit \\ \clubsuit & A \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a - a' & \blacklozenge \\ \bigstar & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & \blacklozenge \\ 0 & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a' & \spadesuit \\ \clubsuit & A \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a - a' & \blacklozenge \\ \bigstar & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \spadesuit \\ \clubsuit & A \end{vmatrix}$$

Le *Theorema egregium*

- Au bilan

$$K(EG-F^2)^2=$$

$$\begin{vmatrix} \langle f_{uu},f_{vv}\rangle-\langle f_{uv},f_{uv}\rangle & \langle f_{uu},f_u\rangle & \langle f_{uu},f_v\rangle \\ \langle f_u,f_{vv}\rangle & E & F \\ \langle f_v,f_{vv}\rangle & F & G \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & \langle f_{uv},f_u\rangle & \langle f_{uv},f_v\rangle \\ \langle f_u,f_{uv}\rangle & E & F \\ \langle f_v,f_{uv}\rangle & F & G \end{vmatrix}$$

Le *Theorema egregium*

- En dérivant $E = \langle f_u, f_u \rangle$ on obtient $\langle f_{uu}, f_u \rangle = \dfrac{1}{2} E_u$.
- De même

$$\langle f_{vv}, f_v \rangle = \frac{1}{2} G_v, \quad \langle f_{uv}, f_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \ \text{ et } \ \langle f_{vu}, f_v \rangle = \frac{1}{2} G_u.$$

- Dérivons maintenant $F = \langle f_u, f_v \rangle$, on obtient

$$F_u = \langle f_{uu}, f_v \rangle + \langle f_u, f_{uv} \rangle$$

d'où

$$\langle f_{uu}, f_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v.$$

- De même

$$\langle f_{vv}, f_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u.$$

Le *Theorema egregium*

- Reste le terme le plus délicat :

$$\langle f_{uu}, f_{vv}\rangle - \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle.$$

Pour le traiter on va dériver les relations précédentes.

- On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}\langle f_{uu}, f_v\rangle &= \langle f_{uuv}, f_v\rangle + \langle f_{uu}, f_{vv}\rangle \\
\frac{\partial}{\partial u}\langle f_{vv}, f_u\rangle &= \langle f_{vvu}, f_u\rangle + \langle f_{uu}, f_{vv}\rangle \\
\frac{\partial}{\partial v}\langle f_{uv}, f_u\rangle &= \langle f_{vvu}, f_u\rangle + \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle \\
\frac{\partial}{\partial u}\langle f_{uv}, f_v\rangle &= \langle f_{uuv}, f_v\rangle + \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle
\end{aligned}$$

Le *Theorema egregium*

- Par conséquent

$$\langle f_{uu}, f_{vv}\rangle - \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v}\langle f_{uu}, f_v\rangle + \frac{\partial}{\partial u}\langle f_{vv}, f_u\rangle - \frac{\partial}{\partial v}\langle f_{uv}, f_u\rangle - \frac{\partial}{\partial u}\langle f_{uv}, f_v\rangle\right).$$

- En remplaçant, il vient

$$\langle f_{uu}, f_{vv}\rangle - \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle = -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv}.$$

- Ainsi K ne s'exprime qu'en fonction de E, F, G et de leurs dérivées premières et secondes. □

Le *Theorema egregium*

• Au passage nous venons d'établir la **formule de Brioschi** :

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}$$

... qui n'est pas à apprendre par cœur, on s'en doute !

Le *Theorema egregium* dans le texte !

DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. VIII. OCTOBR. MDCCCXXVII.

Le *Theorema egregium* dans le texte !

Supponamus, superficiem nostram curvam explicari posse in aliam superficiem, curvam seu planam, ita ut cuivis puncto prioris superficiei per coordinatas x, y, z determinato respondeat punctum determinatum superficiei posterioris, cuius coordinatae sint x', y', z'. Manifesto itaque x', y', z' quoque considerari possunt tamquam functiones indeterminatarum p, q, unde pro elemento $\sqrt{(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)}$ prodibit expressio talis

$$\sqrt{(E' dp^2 + 2F' dp . dq + G' dq^2)}$$

denotantibus etiam E', F', G' functiones ipsarum p, q. At per ipsam notionem *explicationis* superficiei in superficiem patet, elementa in utraque superficie correspondentia necessario aequalia esse, adeoque identice fieri

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'$$

Le *Theorema egregium* dans le texte !

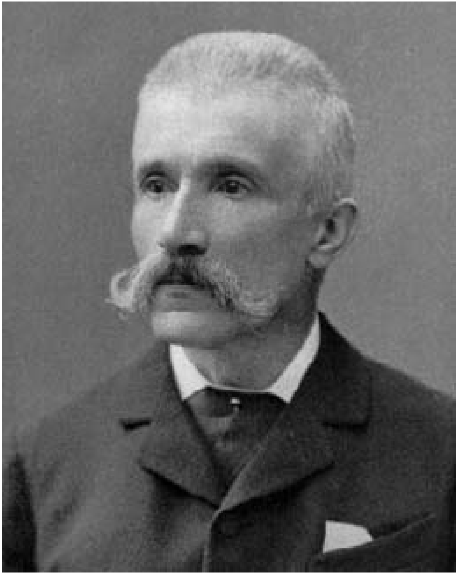
Quodsi iam has expressiones diversas in formula pro mensura curvaturae in fine art. praec. eruta substituimus, pervenimus ad formulam sequentem, e solis quantitatibus E, F, G atque earum quotientibus differentialibus primi et secundi ordinis concinnatam:

$$
\begin{aligned}
4(EG-FF)^2 k = \; & E\left(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right) \\
& + F\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dp}\right) \\
& + G\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\cdot\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right) \\
& - 2(EG-FF)\left(\frac{ddE}{dq^2} - 2\frac{ddF}{dp.dq} + \frac{ddG}{dp^2}\right)
\end{aligned}
$$

Le *Theorema egregium* chez Dr. Nozman !

La courbure de Gauss par Dr. Nozman

Francesco Brioschi (1824-1897)



Francesco Brioschi (1824-1897)

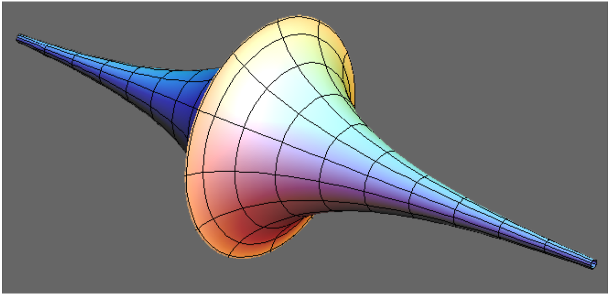
• Homme politique et mathématicien : il joua un rôle de premier plan dans la formation de l'État italien.

• Convaincu de la nécessité de régénérer l'université et en particulier l'enseignement scientifique et technique sur le modèle de la Révolution française, Brioschi fut impliqué dans des émeutes et fut brièvement incarcéré.

• Au cours de la période d'unification de l'Italie, il devient ministre de l'instruction publique.

• Il s'impliqua largement dans le fonctionnement des institutions scientifiques, s'assura la la collaboration d'**Enrico Betti** et de **Luigi Cremona**. Il encouragea la carrière de jeunes scientifiques dont **Eugenio Beltrami**.

Francesco Brioschi (1824-1897)



Surface de Beltrami ou pseudo-sphère.