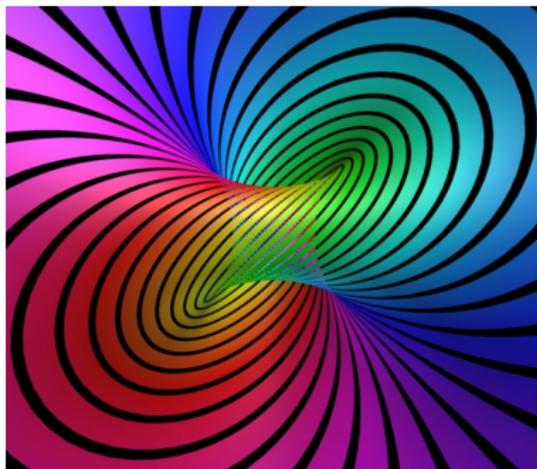


# CM-R3 : Courbes remarquables sur les surfaces

Vincent Borrelli

Université de Lyon



*Une cyclide de Dupin*

## Courbure normale

- On utilise désormais le mot *surface* pour signifier *sous-variété de dimension 2*. Lorsque cela n'est pas précisé, la lettre  $S$  signifie que l'on considère une surface de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose aussi implicitement qu'une normale  $n$  est choisie au moins localement.

**Définition.**— Soit  $X \in T_p S$  unitaire. Le nombre  $II_p(X, X)$  est appelée COURBURE NORMALE en  $p$  dans la direction  $X$ . Il est noté  $k_X(p)$ .

**Théorème de Meusnier.**— Soit  $p \in S$  et soit  $\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S$  une courbe régulière telle que  $\gamma(0) = p$ . On note  $k(p)$  sa courbure principale,  $n_{\text{princ}}(p)$  sa normale principale et  $X$  un vecteur tangent unitaire à  $\gamma$  en 0, alors

$$k_X(p) = \langle n_{\text{princ}}(p), n(p) \rangle k(p).$$

## Courbure normale

**Démonstration.**— On peut toujours supposer que  $\gamma$  est paramétrée par la longueur d'arc et que  $\gamma'(0) = X$ .

- On a

$$\begin{aligned}k_X &= II_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) \\ &= \langle -dn_p(\gamma'(0)), \gamma'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \gamma'(0) \rangle\end{aligned}$$

où on a noté  $N = n \circ \gamma$ .

- Puisque, pour tout  $s$ ,  $\langle N(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ , on en déduit

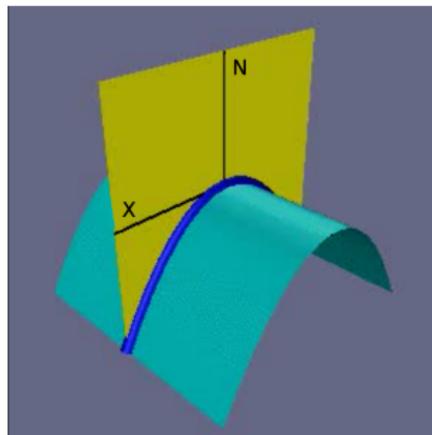
$$\langle N'(s), \gamma'(s) \rangle = -\langle N(s), \gamma''(s) \rangle.$$

- Donc

$$k_X = \langle N(0), \gamma''(0) \rangle = \langle n, kn_{princ} \rangle.$$



# Courbure normale



- A tout  $X \in T_p S$  unitaire on associe le plan affine

$$P_X = p + \text{Vect}(X, n(p)).$$

## Courbure normale

- D'après un résultat du CM-S1, au voisinage de  $p$ , l'intersection de  $P_X \cap S$  est le support d'une courbe paramétrée

$$\gamma : ] - \epsilon, \epsilon[ \longrightarrow P_X.$$

On peut toujours supposer qu'elle est paramétrée par la longueur d'arc et que de plus

$$\gamma(0) = p \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = X.$$

- On oriente le plan  $P_X$  par  $(X, n(p))$  et on note  $k_{alg}$  la courbure algébrique de  $\gamma$  en 0. Alors

$$k_X = \langle n, kn_{princ} \rangle = \langle n, k_{alg} n_{alg} \rangle = \pm k_{alg}.$$

## Courbure normale

**Théorème (formule d'Euler pour les courbures).**– *La fonction*

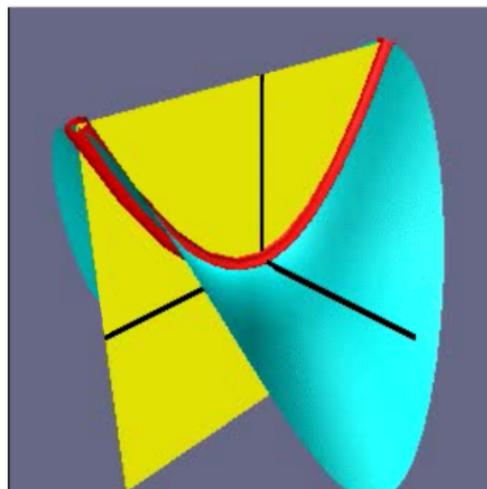
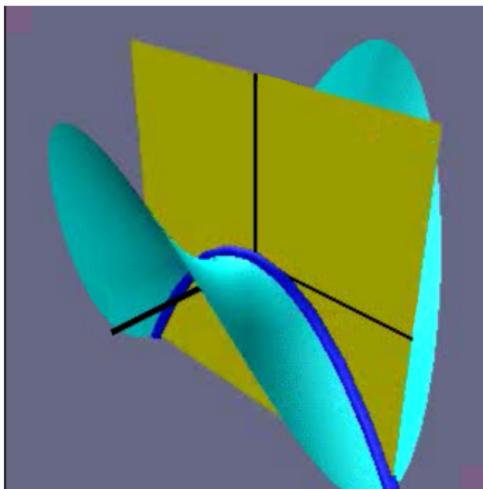
$$\begin{aligned} T_p^1 S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto k_X \end{aligned}$$

*atteint ses extrema en les vecteurs propres (unitaires) de l'opérateur de Weingarten  $W_p$ . Si  $X_1$  est un tel vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_1$  et si  $X$  fait un angle  $\theta$  avec  $X_1$  alors on a*

$$k_X = k_{X_1} \cos^2 \theta + k_{X_2} \sin^2 \theta$$

*où  $X_2$  est un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre  $\lambda_2$ . De plus  $\lambda_1 = k_{X_1}$  et  $\lambda_2 = k_{X_2}$ .*

# Courbure normale



**Remarque.**— Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  alors  $X_1$  et  $X_2$  sont orthogonaux.

# Courbure normale

**Démonstration.**— Par définition

$$k_X = II_p(X, X) = \langle -dn_p(X), X \rangle.$$

- Le vecteur  $X$  étant unitaire, on écrit

$$X = \cos \theta X_1 + \sin \theta X_2.$$

- On a

$$-dn_p(X) = \cos \theta . \lambda_1 X_1 + \sin \theta . \lambda_2 X_2$$

d'où

$$k_X = \cos^2 \theta . \lambda_1 + \sin^2 \theta . \lambda_2.$$



## Courbure normale

**Corollaire.**— Soit  $X_\theta = \cos \theta.X_1 + \sin \theta.X_2$ . La moyenne de la fonction  $\theta \mapsto k_{X_\theta}$  est la courbure moyenne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_{X_\theta} d\theta = H(p).$$

**Démonstration.**— C'est un calcul immédiat qui utilise la formule d'Euler pour les courbures :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_{X_\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta.\lambda_1 + \sin^2 \theta.\lambda_2 d\theta \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

# Jean-Baptiste Marie Meusnier de La Place (1754-1793)

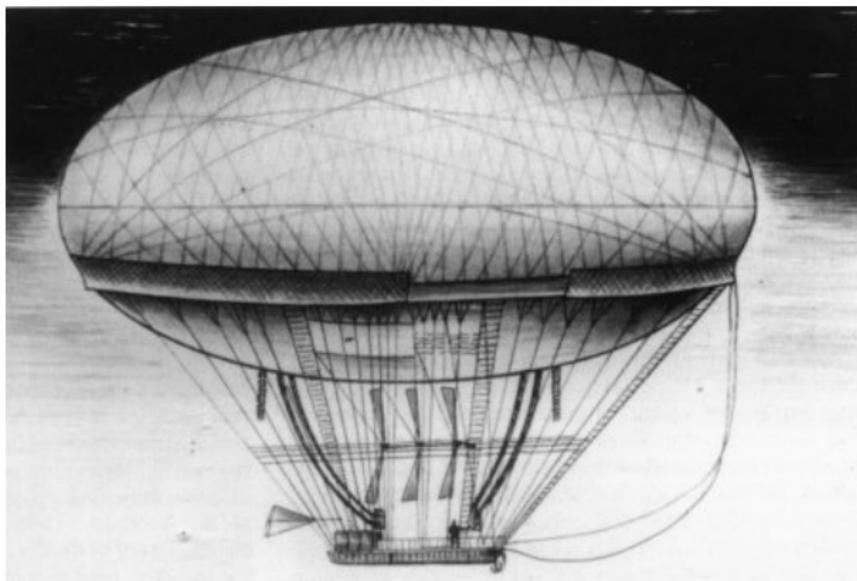


*Deux scènes avec des aérostats : “Souvenir du général Meusnier La Place” (1794).*

## Jean-Baptiste Marie Meusnier de La Place (1754-1793)

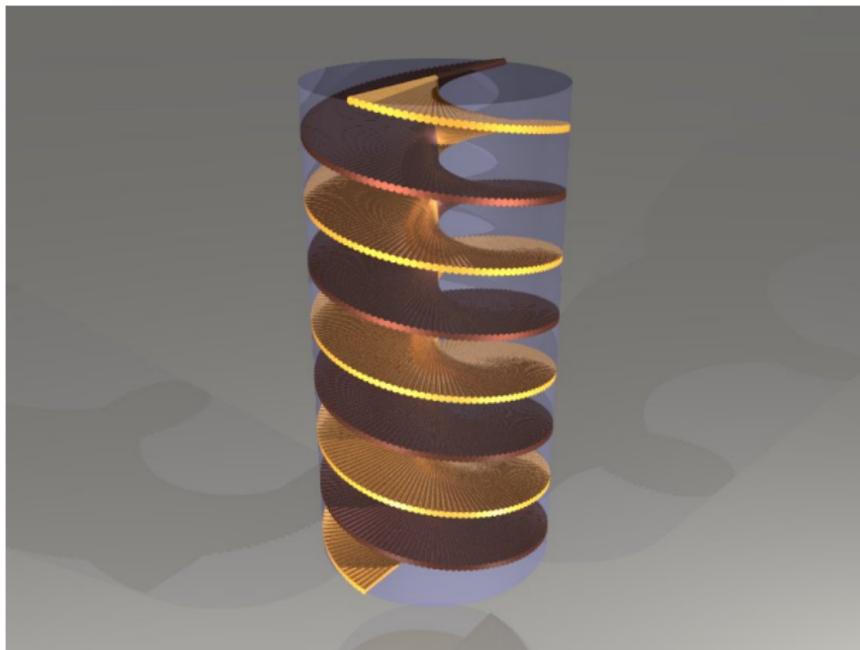
- Général de la Révolution, géomètre et ingénieur.
- Il découvre son théorème lors de son passage à l'école royale du génie. Il invente également à la même époque l'hélicoïde.
- Il collabore avec Antoine Lavoisier à des études sur la décomposition de l'eau et sur la fabrication de l'hydrogène.
- Il est présenté parfois comme l'inventeur du dirigeable du fait d'un projet, avorté par manque de moyens, qu'il proposa à l'Académie des sciences.
- Général de division dans l'armée du Rhin, il meurt de ses blessures au cours du siège de Mayence.

# Jean-Baptiste Marie Meusnier de La Place (1754-1793)



*Le projet d'aérostat de Meusnier La Place.*

# Jean-Baptiste Marie Meusnier de La Place (1754-1793)



*L'inventeur de l'hélicoïde, une surface de courbure moyenne nulle.*

CM-R3 :  
Courbes  
remarquables  
sur les  
surfaces

V. Borrelli

Courbure  
normale

Jean-Baptiste  
Meusnier

Courbes  
asymptotiques

Charles Dupin

Lignes de  
courbures

Géodésiques

# Courbes asymptotiques

**Définition.**— Soit  $p \in S$ . On appelle DIRECTION ASYMPTOTIQUE de  $S$  au point  $p$  une direction de  $T_p S$  pour laquelle la courbure normale est nulle. On appelle COURBE ASYMPTOTIQUE une courbe  $\bar{\gamma} : I \rightarrow S$  régulière telle que, pour tout  $t \in I$ , on a  $k_{\bar{\gamma}'(t)} = 0$ , autrement dit, pour tout  $t \in I$ , l'espace affine  $\bar{\gamma}(t) + \text{Vect}(\bar{\gamma}'(t))$  est une direction asymptotique

- Puisque

$$k_X = \cos^2 \theta \cdot \lambda_1 + \sin^2 \theta \cdot \lambda_2$$

il n'y a pas de direction asymptotique en un point où  $K(p) > 0$  et si  $K(p) < 0$  il y a deux directions asymptotiques sur  $T_p S$ .

## Courbes asymptotiques

**Lemme.**— Soit  $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$  une paramétrisation (locale ou globale) de  $S$  et soit

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathcal{U} \\ t &\longmapsto (u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Alors  $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$  est une courbe asymptotique si et seulement si

$$\mathcal{L} \cdot (u')^2 + 2\mathcal{M} \cdot u'v' + \mathcal{N} \cdot (v')^2 = 0.$$

• **Démonstration.**— Puisque  $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$  on a

$$\bar{\gamma}'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

donc

$$\bar{\gamma}'(t) = u'(t)f_u(\gamma(t)) + v'(t)f_v(\gamma(t)).$$

## Courbes asymptotiques

- D'autre part, si  $X = X_u f_u + X_v f_v$  alors

$$k_X = II_p(X, X) = \mathcal{L}.X_u^2 + 2\mathcal{M}.X_u X_v + \mathcal{N}.X_v^2.$$

car la matrice de la seconde forme fondamentale dans la base  $\mathcal{B}(f) = (f_u, f_v)$  est précisément

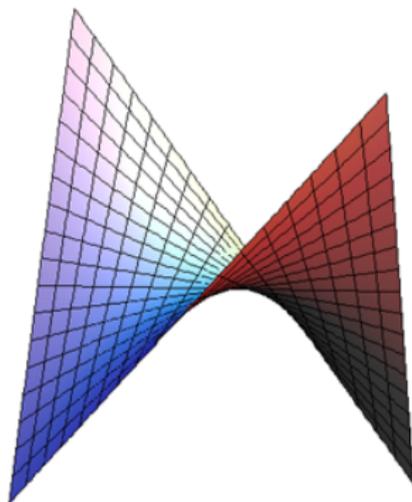
$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}.$$

- Par conséquent

$$k_{\bar{\gamma}} = \mathcal{L}.(u')^2 + 2\mathcal{M}.u'v' + \mathcal{N}.(v')^2.$$

- Enfin,  $\bar{\gamma}$  est une courbe asymptotique ssi pour tout  $t \in I$ , on a  $k_{\bar{\gamma}'}(t) = 0$ . □

# Courbes asymptotiques



**Exemple : le paraboloid hyperbolique.**— Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \left(x, y, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right) \end{aligned}$$

# Courbes asymptotiques

- Un calcul montre que

$$N(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Puis que

$$\mathcal{L} = 1, \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{N} = -1.$$

- L'équation

$$\mathcal{L} \cdot (x')^2 + 2\mathcal{M} \cdot x'y' + \mathcal{N} \cdot (y')^2 = 0$$

s'écrit donc

$$x'^2 - y'^2 = 0.$$

## Courbes asymptotiques

- Ainsi  $y' = x'$  ou  $y' = -x'$ . Les solutions sont donc les droites de  $\mathbb{R}^2$

$$y = x + y_0 \quad \text{et} \quad y = -x + y_0$$

où  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

- Les courbes asymptotes s'obtiennent en composant par  $f$  :

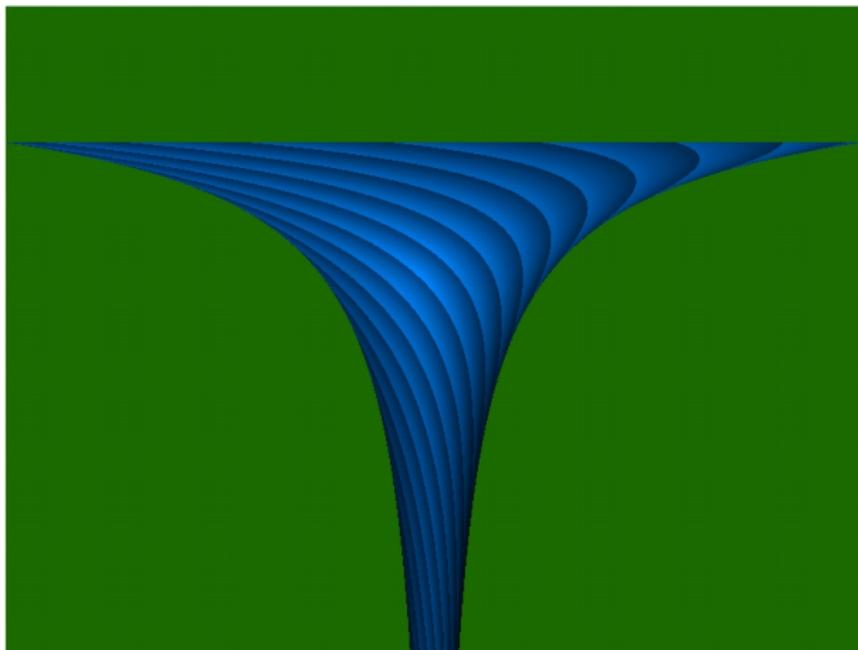
$$x \mapsto f(x, x + y_0) = (x, x + y_0, -\frac{y_0}{2}(2x + y_0))$$

et

$$x \mapsto f(x, -x + y_0) = (x, -x + y_0, \frac{y_0}{2}(2x - y_0)).$$

- Les lignes asymptotiques de  $f$  forment donc un réseau de droites dans  $PH = f(\mathbb{R}^2)$  : une autre façon de constater que  $PH$  est biréglé !

# Courbes asymptotiques



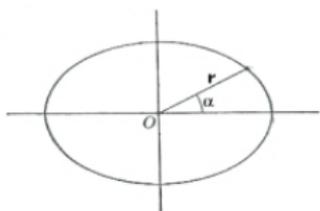
*Courbes asymptotiques sur une surface de révolution : en général les courbes asymptotiques ne sont pas des droites*

## Courbes asymptotiques

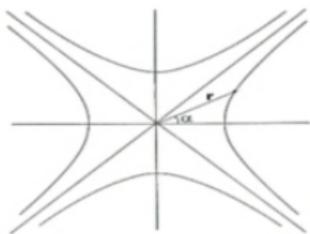
**Définition.**— Soit  $p \in S$ . On appelle INDICATRICE DE DUPIN de  $S$  en  $p$  l'ensemble

$$ID(p) = \{X \in T_p S \mid II_p(X, X) = \pm 1\}$$

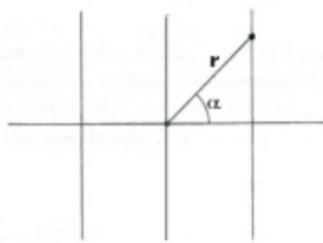
- D'après la formule d'Euler pour les courbures, cet ensemble est une conique.



$$K(p) > 0$$



$$K(p) < 0$$

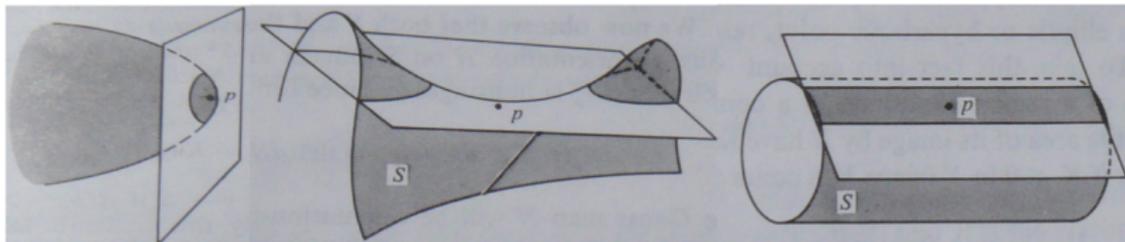


$$K(p) = 0 \\ \text{et } H(p) \neq 0.$$

## Courbes asymptotiques

- Pour tout  $r \in \mathbb{R}^*$ , on note  $P_r$  le plan parallèle à  $T_p S$  à distance signée  $r$  (grâce au choix d'une normale) de  $T_p S$ .
- Soit  $ID_{\times}(p) := ID_+(p)$  si  $ID_+(p) \neq \emptyset$ ,  $ID_{\times}(p) := ID_-(p)$  sinon.

**Théorème.**— Soit  $p \in S$  un point tel que  $II_p \neq 0$ . Alors, il existe un voisinage  $V$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$  et un nombre  $\epsilon > 0$  tels que, pour tout  $0 < |r| < \epsilon$ , si  $P_r \cap S \cap V$  est non vide, alors il est difféomorphe à  $ID_{\times}(p)$ .



$$K(p) > 0$$

$$K(p) < 0$$

$$K(p) = 0$$

et  $H(p) \neq 0$ .

## Courbes asymptotiques

**Idée de la démonstration.**– On choisit un paramétrage cartésien de  $S$  :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S = f(\mathcal{U}) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, h(x, y)) \end{aligned}$$

et on suppose que  $(0, 0) \in \mathcal{U}$  et  $f(0, 0) = p$ .

- On suppose en outre que :

$$h_x(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad h_y(0, 0) = 0.$$

Ainsi le plan  $(Oxy)$  est tangent à  $S$  en  $p$ .

- On suppose enfin que  $(Ox)$  et  $(Oy)$  sont les directions principales. Un calcul montre alors que  $h_{xy}(0, 0) = 0$  et que

$$\lambda_1(p) = h_{xx}(0, 0) \quad \text{et} \quad \lambda_2(p) = h_{yy}(0, 0).$$

## Courbes asymptotiques

- Un développement de Taylor en  $(0, 0)$  et à l'ordre 2 de  $h$  s'écrit

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2) + o(x^2 + y^2).$$

- Soit  $X = xf_x + yf_y \in T_p S$ . Un calcul montre que :

$$\begin{aligned} II_p(X, X) &= h_{xx}(0, 0)x^2 + 2h_{xy}(0, 0)xy + h_{yy}(0, 0)y^2 \\ &= \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2. \end{aligned}$$

- Déterminer  $P_r \cap S \cap V$  revient à résoudre

$$h(x, y) = r$$

une équation qui, après renormalisation, ressemble beaucoup à

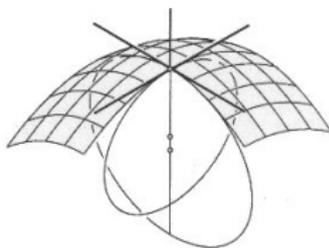
$$II_p(X, X) = \pm 1$$

le signe dépendant de celui de  $r$ .

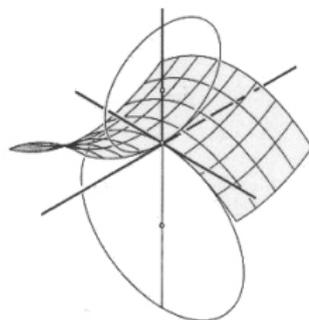
# Courbes asymptotiques

- On déduit immédiatement de la démonstration du théorème précédent le :

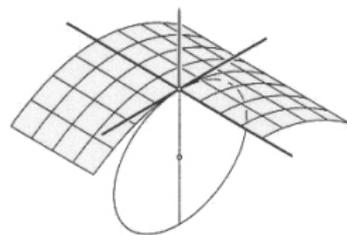
**Corollaire.**— *Si  $K(p) > 0$  alors  $p$  est un point elliptique, si  $K(p) < 0$  alors  $p$  est un point hyperbolique, si  $K(p) = 0$  et  $H(p) \neq 0$  alors  $p$  est parabolique.*



*Point elliptique*



*Point hyperbolique*



*Point parabolique*

# Charles Dupin (1784-1873)

CM-R3 :  
Courbes  
remarquables  
sur les  
surfaces

V. Borrelli

Courbure  
normale

Jean-Baptiste  
Meusnier

Courbes  
asymptotiques

**Charles Dupin**

Lignes de  
courbures

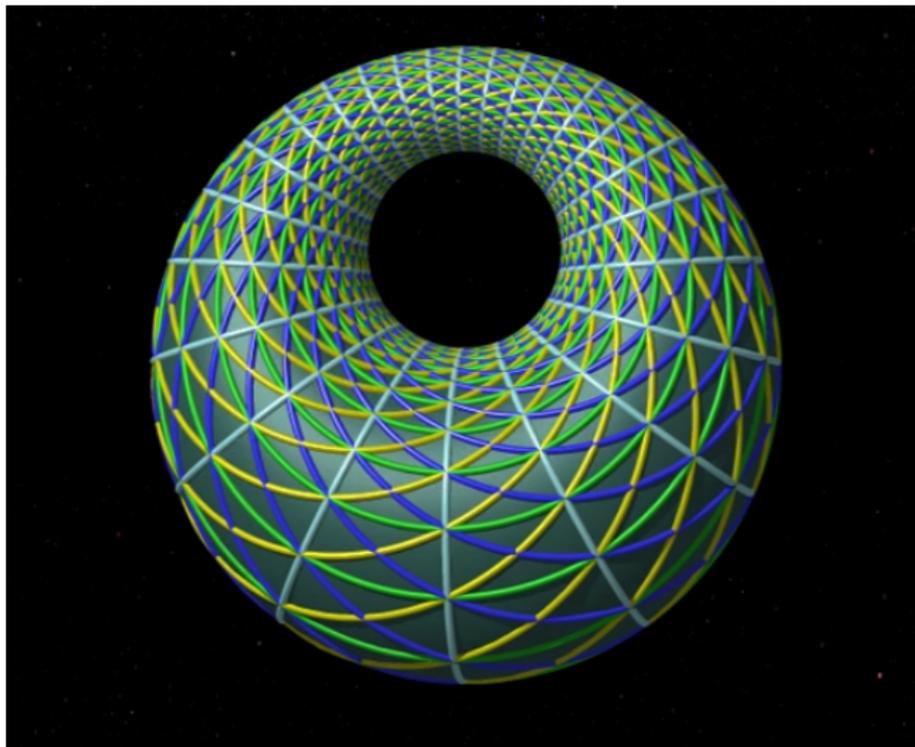
Géodésiques



# Charles Dupin (1784-1873)

- Mathématicien, ingénieur et homme politique.
- S'intéresse à la courbure des surfaces... et applique ses découvertes à la construction de vaisseaux de guerre et à la conception de fortifications !
- A servi tous les régimes : le Premier Empire, la Première Restauration, la monarchie de Juillet, la Deuxième République, le Second Empire.
- Il a été député (un des plus ardents membres de la majorité de droite) et ministre de la marine et des colonies. Louis XVIII le fit baron.
- Une famille de surfaces porte son nom : les *cyclides de Dupin*.

# Charles Dupin (1784-1873)



*Une cyclide de Dupin*

CM-R3 :  
Courbes  
remarquables  
sur les  
surfaces

V. Borrelli

Courbure  
normale

Jean-Baptiste  
Meusnier

Courbes  
asymptotiques

Charles Dupin

Lignes de  
courbures

Géodésiques

CM-R3 :  
Courbes  
remarquables  
sur les  
surfaces

V. Borrelli

Courbure  
normale

Jean-Baptiste  
Meusnier

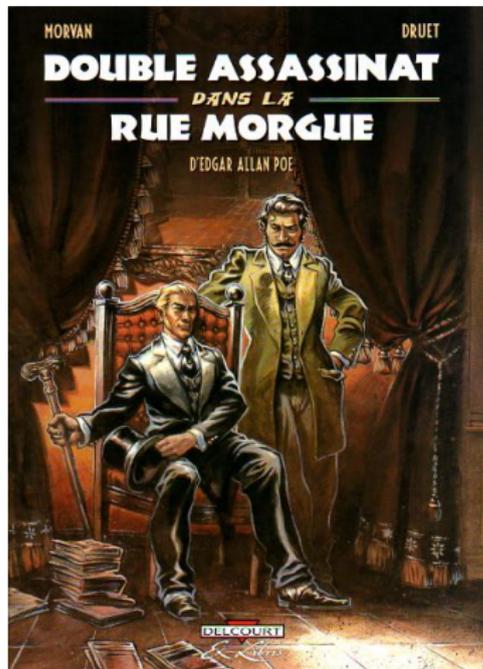
Courbes  
asymptotiques

Charles Dupin

Lignes de  
courbures

Géodésiques

## Charles Dupin (1784-1873)



*Le baron Charles Dupin serait le modèle du chevalier  
Auguste Dupin, le détective créé par Edgar Poe.*

# Lignes de courbures

**Définition.**— On appelle LIGNE DE COURBURE une courbe paramétrée régulière  $\bar{\gamma} : I \rightarrow S$  telles que, pour tout  $t \in I$ , la tangente  $\bar{\gamma}(t) + \text{Vect}(\bar{\gamma}'(t))$  soit une direction principale de  $S$  en  $\gamma(t)$ .

- Toute courbe paramétrée régulière dont le support est contenu dans un plan ou une sphère est une ligne de courbure.

## Lignes de courbures

**Définition.**— On appelle POINT OMBILICAL un point  $p \in S$  pour lequel  $\lambda_1(p) = \lambda_2(p)$ .

- Tous les points d'une sphère ou d'un plan sont ombilicaux.
- Sur une surface sans point ombilical on peut définir sans ambiguïté deux fonctions courbures principales  $\lambda_1, \lambda_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Lemme.**— Soient  $S$  une surface sans point ombilical,  $f : \mathcal{U} \rightarrow S$  une paramétrisation (locale ou globale) et

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathcal{U} \\ t &\longmapsto (u(t), v(t)). \end{aligned}$$

une courbe régulière. Alors  $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$  est une ligne de courbure si et seulement si il existe  $i \in \{1, 2\}$  tel que

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\mathcal{L} - F\mathcal{M} & G\mathcal{M} - F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M} - F\mathcal{L} & E\mathcal{N} - F\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

## Lignes de courbures

**Démonstration.**— La courbe paramétrée  $\bar{\gamma}$  est une ligne de courbure ssi il existe  $i = 1$  ou  $2$  tel que

$$\forall t \in I, \quad -dn(\bar{\gamma}'(t)) = \lambda_i \bar{\gamma}'(t).$$

• Dans la base  $\mathcal{B}(f) = (f_u, f_v)$  l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\mathcal{L} - F\mathcal{M} & G\mathcal{M} - F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M} - F\mathcal{L} & E\mathcal{N} - F\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

□

**Corollaire.**— Si  $F \equiv 0$  et  $\mathcal{M} \equiv 0$  alors  $u \mapsto f(u, v_0)$  et  $v \mapsto f(u_0, v)$  sont des lignes de courbure.

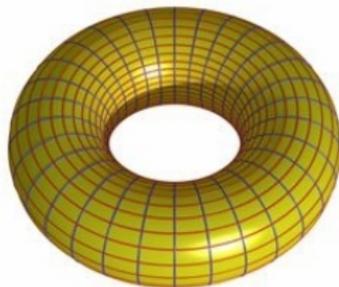
**Démonstration.**— Immédiate.

□

## Lignes de courbures

- **Exemple : le tore.** – Soit  $S = f(\mathbb{R}^2)$  où  $f$  est donnée ci-dessous ( $0 < b < a$ ) :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} (a + b \sin(v)) \cos(u) \\ (a + b \sin(v)) \sin(u) \\ b \cos(v) \end{pmatrix}$$



- Un calcul direct montre que  $F = 0$  et  $\mathcal{M} = 0$ , les lignes de courbures sont donc les cercles

$$u \longmapsto f(u, v_0) \quad \text{et} \quad v \longmapsto f(u_0, v)$$

# Lignes de courbures

- Plus généralement, les méridiens et les latitudes sont les supports de lignes de courbures des surfaces de rotation.

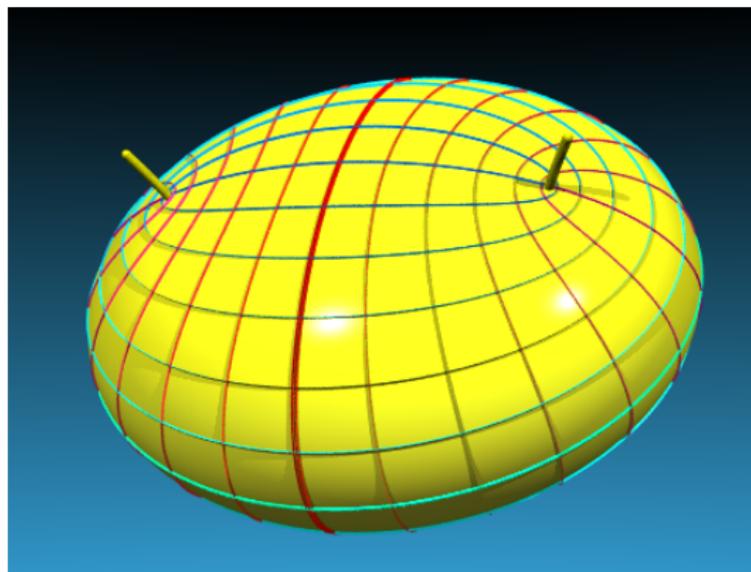
**Définition.**— On appelle **SYSTÈME TRIPLE ORTHOGONAL** sur  $V$  ouvert de  $\mathbb{R}^3$  la donnée de trois familles de surfaces  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  telles que pour tout  $p \in V$ , il existe une unique surface de chaque famille contenant  $p$  et que, de plus, ces surfaces s'intersectent deux à deux orthogonalement.

**Théorème de Dupin.**— *Les surfaces d'un système triple orthogonal s'intersectent deux à deux le long de leurs lignes de courbure.*

**Démonstration.**— En td !

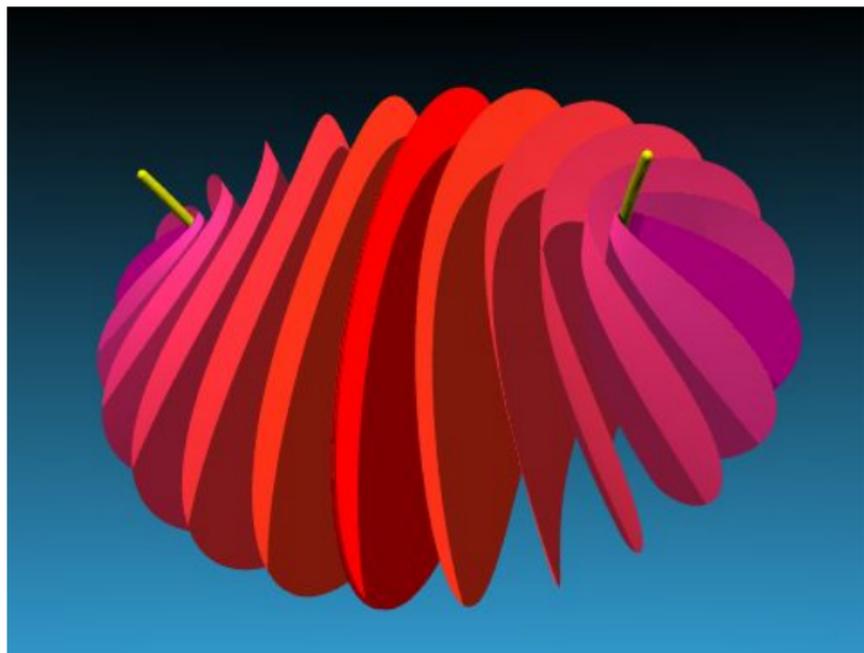
## Lignes de courbures

- Une application : les lignes de courbure de l'ellipsoïde :



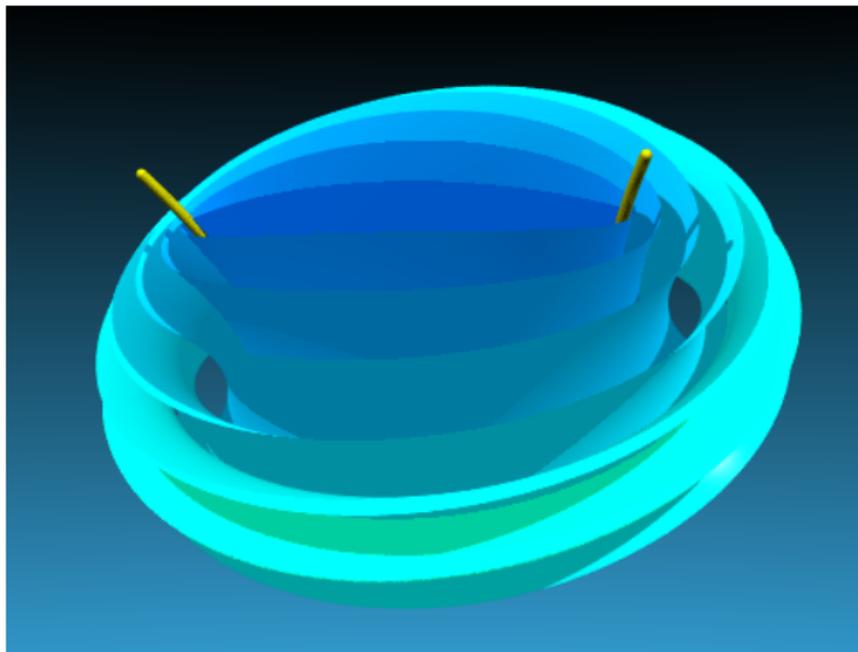
*Les lignes de courbures de l'ellipsoïde.*

# Lignes de courbures



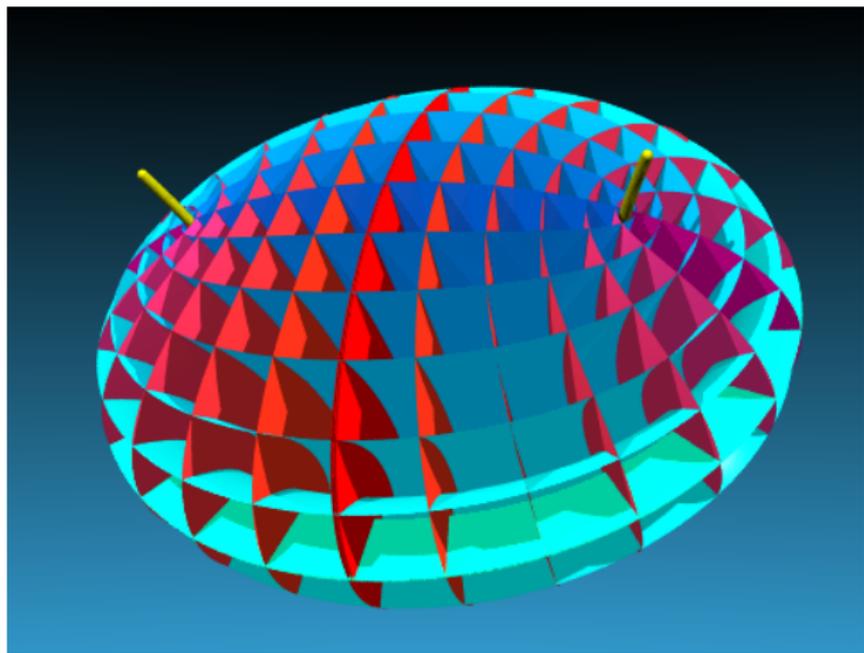
*Hyperboloïdes confocales à deux nappes*

# Lignes de courbures



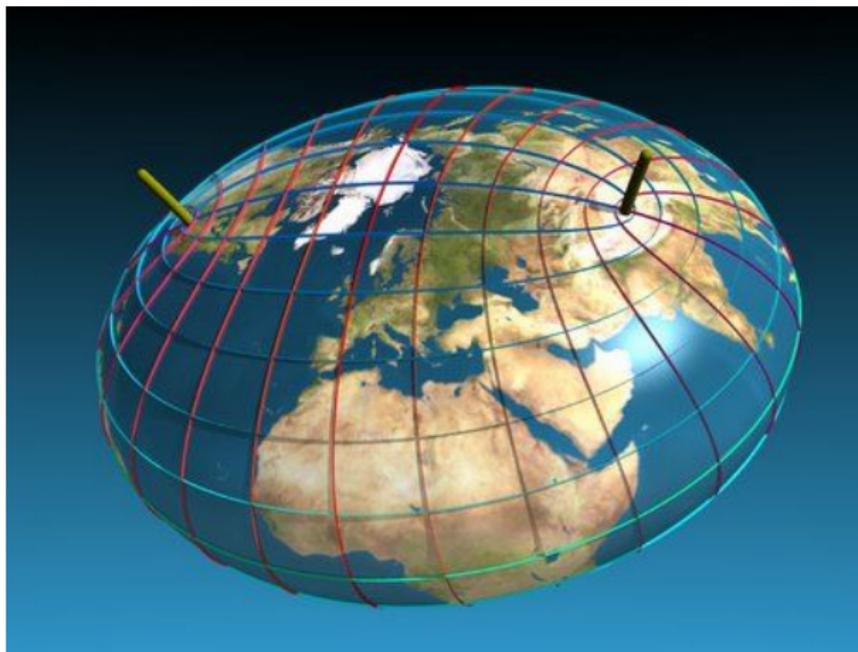
*Hyperboloïdes confocales à une nappe*

# Lignes de courbures



*Le système triple orthogonal dessine les lignes de courbure*

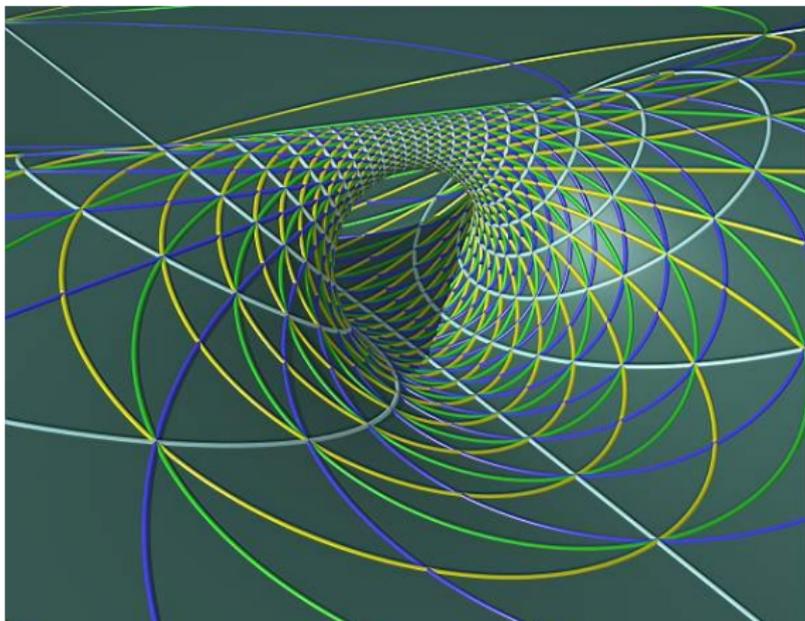
# Lignes de courbures



*Les quatre points où l'hyperbole intersecte la surface sont les points ombilicaux de l'ellipsoïde*

## Lignes de courbures

- Une autre application : les lignes de courbure des cyclides de Dupin.



*Les lignes de courbures sont les courbes vertes et blanches : ce sont des cercles ou des droites.*

# Géodésiques

**Définition.**— Une courbe paramétrée  $\bar{\gamma} : I \longrightarrow S$  à vitesse constante est dite GÉODÉSIQUE si

$$\forall t \in I, \quad (\bar{\gamma}''(t))^T = 0$$

où  $(.)^T$  désigne la composante tangentielle de  $\bar{\gamma}''(t)$  sur  $T_{\bar{\gamma}(t)}S$ .

- Dans le plan les géodésiques sont les courbes paramétrées à vitesse constante dont le support est une portion de droite.
- Dans la sphère les géodésiques sont les courbes paramétrées à vitesse constante dont le support est un arc de grand cercle.

# Géodésiques



*Elwin Bruno Christoffel (1829-1900)*

**Définition.**— Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  une paramétrisation régulière. On appelle SYMBOLE DE CHRISTOFFEL les composantes tangentielles des dérivées secondes de  $f$  dans la base  $(f_u, f_v)$ , ils sont notés  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(f)$ . Précisément :

$$f_{uu} = \Gamma_{11}^1 f_u + \Gamma_{11}^2 f_v + \mathcal{L}N$$

$$f_{uv} = \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v + \mathcal{M}N$$

$$f_{vv} = \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v + \mathcal{N}N$$

## Géodésiques

**Théorème.**— *Les symboles de Christoffel ne dépendent que des coefficients  $E, F, G$  et de leurs dérivées premières. En particulier si  $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$  est une application isométrique  $C^2$  et  $f_1 : \mathcal{U} \rightarrow S_1 \subset \mathbb{R}^3$ , est une paramétrisation de  $S_1$  alors*

$$\Gamma_{ij}^k(f_1) = \Gamma_{ij}^k(\Phi \circ f_1).$$

**Démonstration.**— Traitons d'abord le cas des symboles  $\Gamma_{11}^1$  et  $\Gamma_{11}^2$ . On a

$$\begin{aligned} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 &= \langle f_{uu}, f_u \rangle = \frac{1}{2}E_u \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 &= \langle f_{uu}, f_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v \end{aligned}$$

• Le déterminant de ce système est  $EG - F^2 > 0$ , il est donc inversible. On agit similairement pour les autres symboles.

# Géodésiques

**Proposition.**— Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow S$  une paramétrisation (locale ou globale) de  $S \subset \mathbb{R}^3$  et soit

$$\begin{aligned}\gamma : I &\longrightarrow \mathcal{U} \\ t &\longmapsto (u(t), v(t)).\end{aligned}$$

une courbe régulière. Alors  $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$  est géodésique de  $S$  si et seulement si

$$\begin{aligned}u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 &= 0.\end{aligned}$$

# Géodésiques

**Démonstration.**— On a

$$\bar{\gamma}'(t) = u'(t)f_u(u(t), v(t)) + v'(t)f_v(u(t), v(t)).$$

d'où

$$\bar{\gamma}'' = u''f_u + u'(u'f_{uu} + v'f_{uv}) + v''f_v + v'(u'f_{uv} + v'f_{vv}).$$

- En exprimant  $f_{uu}$ ,  $f_{uv}$  et  $f_{vv}$  dans la base  $(f_u, f_v)$  il vient

$$\begin{aligned}(\bar{\gamma}'')^T &= \left( u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 \right) f_u \\ &+ \left( v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 \right) f_v.\end{aligned}$$



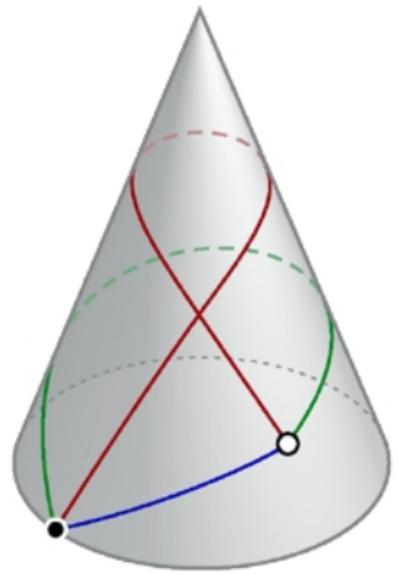
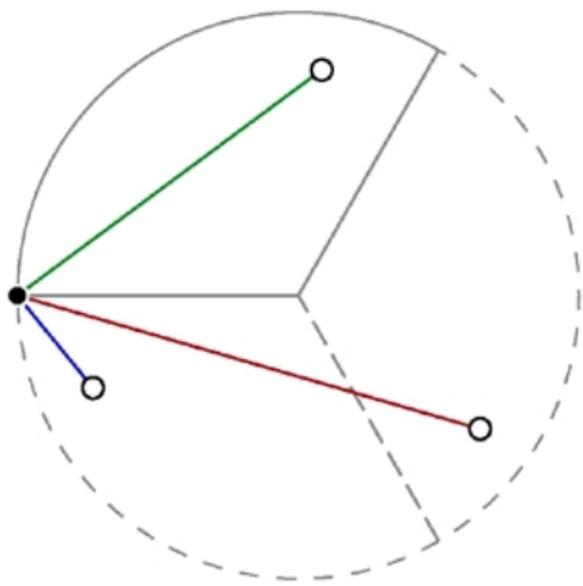
# Géodésiques

**Corollaire.**— Soit  $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$  une application isométrique  $C^2$ ,  $f_1 : \mathcal{U} \rightarrow S_1 \subset \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de  $S_1$  et  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$ . Si  $\overline{\gamma}_1 = f_1 \circ \gamma$  est une géodésique de  $S_1$  alors  $\overline{\gamma}_2 = \Phi \circ f_1 \circ \gamma$  est une géodésique de  $S_2$ .

**Démonstration.**— L'EDO des géodésiques ne fait intervenir que les symboles de Christoffel qui sont invariants par isométrie. □

- Une application à la construction de géodésiques sur le cône.

# Géodésiques



*Comment construire des géodésiques sur le cône*

## Géodésiques

**Corollaire.**— Soit  $p \in S$  et  $v \in T_p S$ ,  $v \neq 0$ . Il existe  $\epsilon > 0$  et une unique courbe géodésique  $\bar{\gamma} : ] - \epsilon, \epsilon[ \rightarrow S$  telle que  $\bar{\gamma}(0) = p$  et  $\bar{\gamma}'(0) = v$ .

**Démonstration.**— Il s'agit d'une application directe du théorème de Cauchy-Lipschitz.

- En effet le système

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u' v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u' v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 &= 0. \end{aligned}$$

s'écrit sous la forme

$$y'' = \phi(y, y')$$

avec  $y = (u, v)$  (le système dépend effectivement de  $y$  via les symboles de Christoffel).

# Géodésiques

- On pose  $Y = (y, y')$  (truc classique), on a alors

$$Y' = \Phi(Y)$$

avec  $\Phi(y_1, y_2) = (y_2, \phi(y_1, y_2))$ .

- Il reste à vérifier que  $\Phi$  est localement lipschitzienne ce qui est immédiat ici car  $f$  est aussi régulière qu'on le souhaite (la classe  $C^3$  suffit). □

**Remarque.**– Dans le corollaire, on ne peut pas en général remplacer  $] - \epsilon, \epsilon[$  par  $\mathbb{R}$ . En revanche,  $p$  étant fixé, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de choisir  $\epsilon$  uniformément sur tout disque  $D$  centré en 0 de  $T_p S$ .

# Géodésiques

**L'application exponentielle.**— Si la solution  $\bar{\gamma}$  existe jusqu'au temps  $t = 1$ , on note

$$\exp_p(v) := \bar{\gamma}(1).$$

- D'après le théorème précédent et sa remarque, il existe  $\epsilon > 0$  tel que l'application

$$\begin{array}{ccc} \exp_p : & D(0, \epsilon) & \longrightarrow S \\ & v & \longmapsto \exp_p(v) \end{array}$$

soit bien définie sur le disque  $D(0, \epsilon)$  centré en 0 et de rayon  $\epsilon$  de  $T_p.S$

On appelle cette application l'APPLICATION EXPONENTIELLE en  $p$  de  $S$ .

# Géodésiques

**La différentielle de l'exponentielle.**— Soient  $p \in S$  et  $v \in \overrightarrow{T_p S}$ . La courbe paramétrée

$$t \longmapsto \bar{\gamma}(t) := \exp_p(tv)$$

est la géodésique passant par  $p = \bar{\gamma}(0)$  et telle que

$$\bar{\gamma}'(0) = v.$$

Soit

$$\begin{array}{ccc} \gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ & \longrightarrow & D(0, \epsilon) \subset \overrightarrow{T_p S} \\ t & \longmapsto & tv \end{array}$$

Evidemment  $\gamma(0) = 0$  et  $\gamma'(0) = v$ .

# Géodésiques

- On a  $\bar{\gamma} = \exp_p \circ \gamma$ , d'où

$$\bar{\gamma}'(0) = d(\exp_p)_0(\gamma'(0))$$

par conséquent

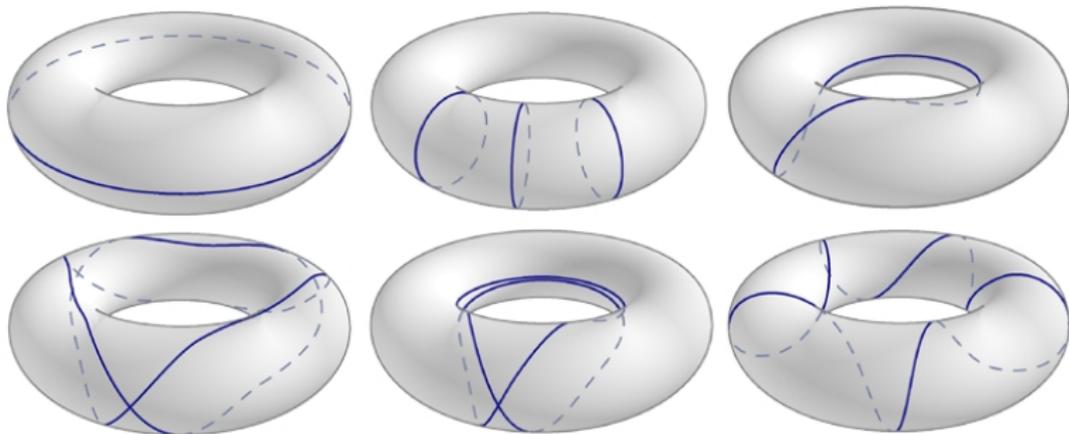
$$d(\exp_p)_0(v) = v.$$

**Proposition (en exo).**— Soient  $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$  une paramétrisation locale et  $p = f(u) \in S$ . Si  $df_u : \mathbb{R}^m \longrightarrow \overrightarrow{T_p S}$  est un isomorphisme alors  $f$  est un difféomorphisme local en  $p$ .

- L'application  $\exp_p$  est un difféomorphisme local en l'origine.

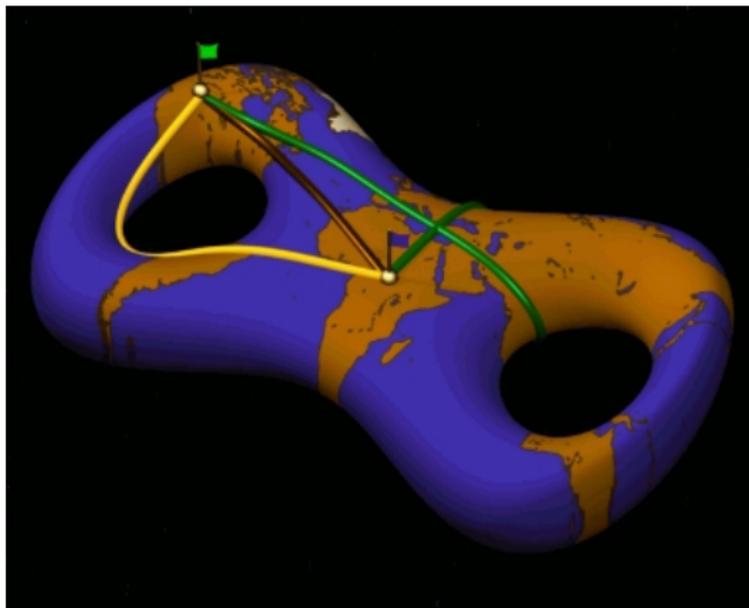
**Définition.**— Un voisinage  $\mathcal{V} \subset S$  de  $p \in S$  est dit NORMAL s'il est l'image  $\mathcal{V} = \exp_p(\mathcal{U})$  d'un voisinage  $\mathcal{U} \subset \overrightarrow{T_p S}$  de  $O$  sur lequel  $\exp_p$  est un difféomorphisme.

# Géodésiques



*Les géodésiques peuvent s'auto-intersecter*

# Géodésiques



*Plusieurs géodésiques pour aller d'un point à un autre*

CM-R3 :  
Courbes  
remarquables  
sur les  
surfaces

V. Borrelli

Courbure  
normale

Jean-Baptiste  
Meusnier

Courbes  
asymptotiques

Charles Dupin

Lignes de  
courbures

Géodésiques

# Géodésiques



*Le pavillon du Japon à l'exposition universelle d'Hanovre en  
2000*

CM-R3 :  
Courbes  
remarquables  
sur les  
surfaces

V. Borrelli

Courbure  
normale

Jean-Baptiste  
Meusnier

Courbes  
asymptotiques

Charles Dupin

Lignes de  
courbures

Géodésiques

# Géodésiques



*La tour korkeasaari (Finlande)*