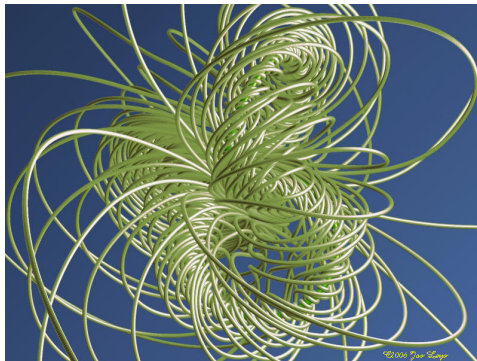


CM-R4 : La formule de Stokes

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Une trajectoire du flot horocyclique

Champs de vecteurs

Définition.— On appelle CHAMP DE VECTEURS toute application $X : U \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$.

- Soit $X = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3$. On pose

$$\begin{array}{ccc} L_X : C^\infty(U) & \longrightarrow & C^\infty(U) \\ f & \longmapsto & X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{array}$$

Définition.— L'application L_X est appelée la DÉRIVATION ASSOCIÉE À X . Elle est aussi notée $X(f)$.

- La base canonique (e_1, e_2, e_3) est parfois notée $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ rendant ainsi plus visible l'action par dérivation de

$$X = X_1 \partial_1 + X_2 \partial_2 + X_3 \partial_3$$

sur $C^\infty(U)$.

Champs de vecteurs

- Soient $f \in C^\infty(U)$ et

$$X = X_1 \partial_1 + X_2 \partial_2 + X_3 \partial_3 \quad \text{et} \quad Y = Y_1 \partial_1 + Y_2 \partial_2 + Y_3 \partial_3$$

alors

$$\begin{aligned} L_X(L_Y f) &= L_X \left(\sum_{i=1}^3 Y_i \partial_i f \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 X_j \partial_j Y_i \cdot \partial_i f + X_j Y_i \partial_{ij}^2 f \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_Y(L_X f) &= L_Y \left(\sum_{i=1}^3 X_i \partial_i f \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 Y_j \partial_j X_i \cdot \partial_i f + Y_j X_i \partial_{ij}^2 f \end{aligned}$$

Champs de vecteurs

Champs de vecteurs

Jacobi

Formes différentielles d'un ouvert de \mathbb{R}^3

Intégration des formes différentielles

Intégration des formes différentielles

La formule de Stokes

George Stokes

La formule d'Ostrogradski

Mikhail Ostrogradski

- Par conséquent

$$L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f) = \sum_{i,j=1}^3 (X_j \partial_j Y_i - Y_j \partial_j X_i) \partial_i f$$

- Posons

$$[X, Y] := \sum_{i=1}^3 Z_i \partial_i \quad \text{où} \quad Z_i = \sum_{j=1}^3 (X_j \partial_j Y_i - Y_j \partial_j X_i).$$

On vient de montrer que

$$L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X, Y]}.$$

Champs de vecteurs

Définition.— Le champ de vecteurs $[X, Y]$ est appelé le CROCHET de X et de Y .

Exemple 1.— Soient A et B deux matrices 3×3 . On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad X_A(x) = A(x) \quad \text{et} \quad X_B(x) = B(x).$$

Un calcul immédiat montre alors

$$[X_A, X_B] := (BA - AB)(x)$$

Champs de vecteurs

Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

Exemple 2.– Soient

$$E_1 = x_3 \partial_2 - x_2 \partial_3, \quad E_2 = x_1 \partial_3 - x_3 \partial_1, \quad E_3 = x_2 \partial_1 - x_1 \partial_2.$$

et soient

$$V = v_1 E_1 + v_2 E_2 + v_3 E_3, \quad W = w_1 E_1 + w_2 E_2 + w_3 E_3$$

avec $v_1, \dots, w_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

• Dans la base (E_1, E_2, E_3) on a

$$[V, W] = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Champs de vecteurs

Identité de Jacobi.— Soient X, Y, Z trois champs de vecteurs sur U alors

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Démonstration.— Il suffit d'écrire les expressions algébriques. □

• Si $\varphi : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme et X un champ de vecteurs, on note φ_*X le champ de vecteur défini par

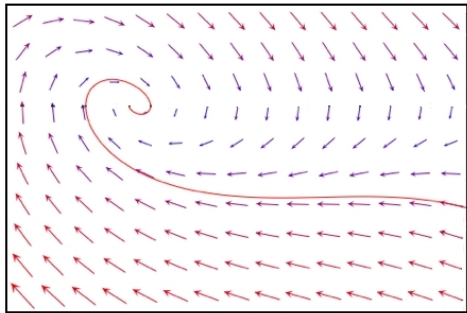
$$(\varphi_*X)(y) := d\varphi_x(X_x) \quad \text{où } x = \varphi^{-1}(y).$$

Lemme.— Soit $\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme alors

$$\varphi_*[X, Y] = [\varphi_*X, \varphi_*Y].$$

Démonstration.— Un stupide calcul. □

Champs de vecteurs



Définition.— On appelle TRAJECTOIRE ou COURBE INTÉGRALE d'un champ de vecteurs X sur $U \subset \mathbb{R}^3$ toute courbe $\gamma : I \longrightarrow U$ telle que

$$\forall t \in I, \quad \gamma'(t) = X_{\gamma(t)}.$$

Champs de vecteurs

Théorème.— Soit X un champ de vecteurs sur $U \subset \mathbb{R}^3$ et $x \in U$. Alors il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une trajectoire $\gamma_x : I \longrightarrow U$ de X telle que $\gamma_x(0) = x$. De plus, si $\delta_x : J \longrightarrow U$ est une autre trajectoire telle que $\delta_x(0) = x$ alors γ_x et δ_x coïncident sur $I \cap J$.

Démonstration.— L'équation définissant les courbes intégrales est une EDO. Les résultats classiques d'existence et d'unicité s'appliquent (rappelons que X est supposé C^1). □

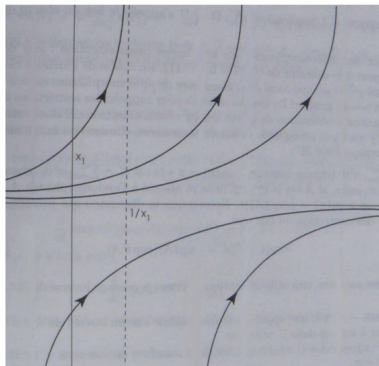
Remarque.— Même si X est défini sur \mathbb{R}^3 , les trajectoires ne sont pas forcément définies sur tout \mathbb{R} .

Champs de vecteurs

Exemple.— Soit X défini sur \mathbb{R}^3 par $X_{(x_1, x_2, x_3)} := (x_1^2, 1, 0)$ alors la trajectoire passant par (x_1, x_2, x_3) en $t = 0$ ($x_1 > 0$) est

$$\gamma_X(t) = \left(\frac{x_1}{1 - tx_1}, t + x_2, x_3 \right).$$

Elle est définie sur $] -\infty, \frac{1}{x_1}[$.



Champs de vecteurs

- Soit I_x l'intervalle de définition maximal de γ_x , on pose

$$\Omega = \bigcup_{x \in U} I_x \times \{x\}.$$

Proposition (admise).– *L'ensemble Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times U$ qui contient $\{0\} \times U$.*

Pour une démonstration, consulter le chapitre 2, théorème 8 du cours *Équations Différentielles L3* de Julien Vovelle. Il est disponible sur sa page web.

Champs de vecteurs

- Une application du théorème d'inversion locale en dimension infinie montre que

$$(t, x) \longmapsto \gamma_x(t)$$

est de la même classe que X mais c'est non trivial.

Définition.— L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \Omega &\longrightarrow U \\ (t, x) &\longmapsto \gamma_x(t) \end{aligned}$$

s'appelle le FLOT de X .

Champs de vecteurs

- Il est traditionnel d'écrire $\varphi_t(x)$ plutôt que $\varphi(t, x)$.

- L'unicité des solutions d'une EDO implique que $\varphi_t : U \longrightarrow \varphi_t(U)$ est un difféomorphisme.

- Mieux, l'EDO étant autonome, si $\gamma_x(t)$ est une trajectoire, il en est de même de $\gamma_x(t + a)$ quand cela a un sens. Par unicité

$$\gamma_x(t + a) = \gamma_{\gamma_x(a)}(t).$$

- Ceci s'écrit aussi

$$\varphi_{t+a}(x) = \varphi_t(\varphi_a(x)).$$

Propriété.— *Chaque fois que cela a un sens, on a*

$$\varphi_{t_1+t_2} = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2}.$$

Champs de vecteurs

Exemple.— Soit $X_A(x) = A(x)$ où A est une matrice 3×3 .
Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_t(x) = \exp(tA).x.$$

La propriété précédente énonce

$$\exp(t_1 + t_2)A = \exp(t_1A)\exp(t_2A).$$

Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

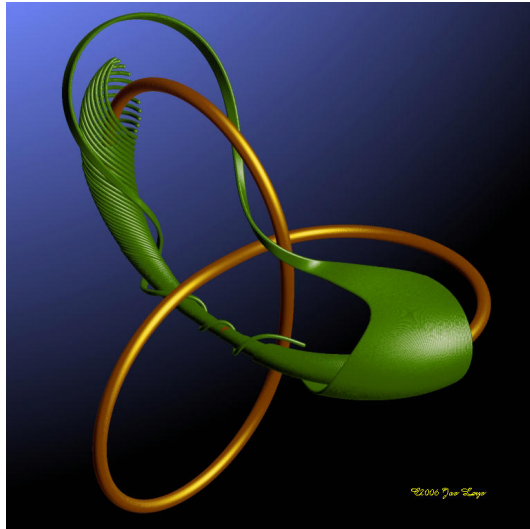
La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

Champs de vecteurs



Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

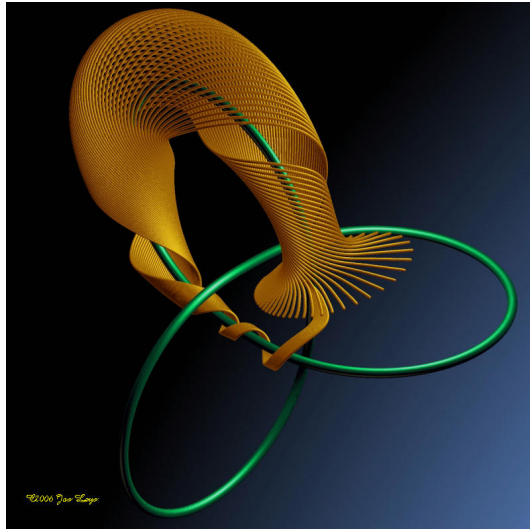
La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

Champs de vecteurs



Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

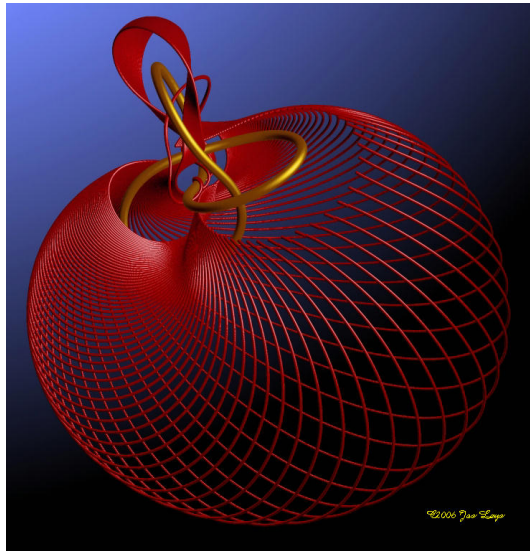
La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

Champs de vecteurs



Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

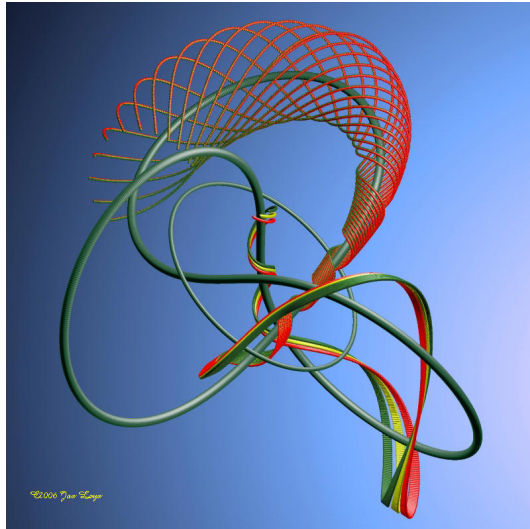
La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

Champs de vecteurs



Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

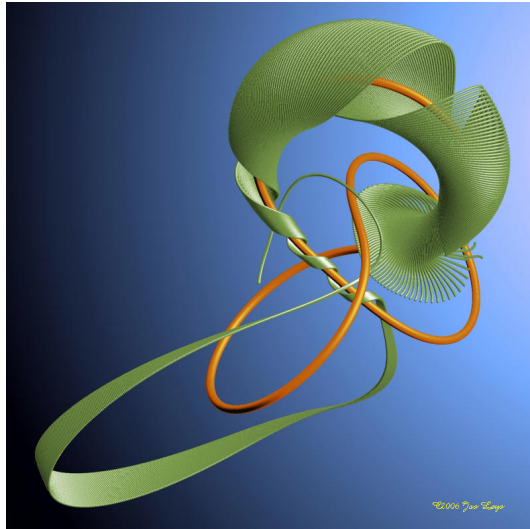
La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

Champs de vecteurs



Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

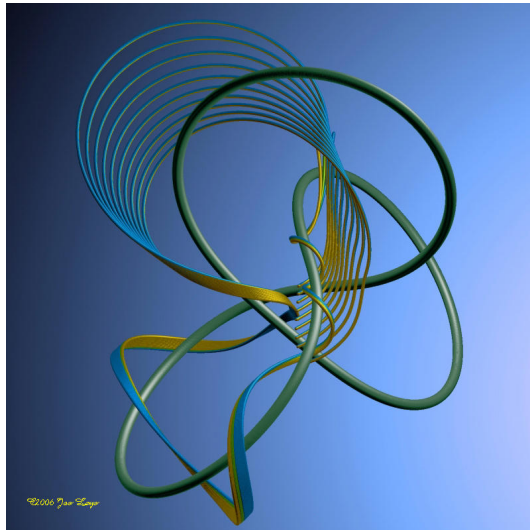
La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

Champs de vecteurs



Champs de vecteurs

Champs de vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

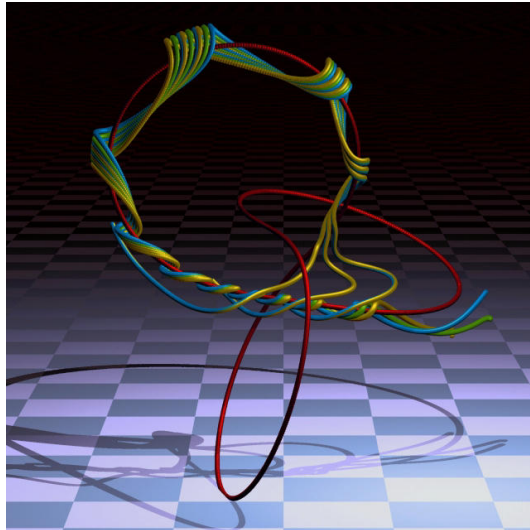
Intégration
des formes
différentielles

La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski



Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

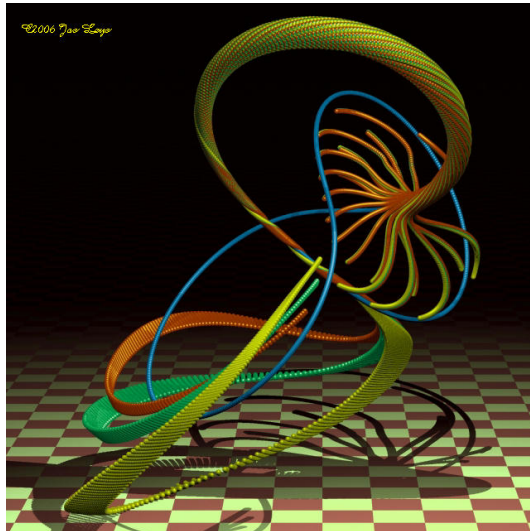
La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

Champs de vecteurs



Carl Jacobi (1804-1851)



Carl Jacobi (1804-1851)

- Mathématicien allemand, très connu pour ses travaux sur les intégrales elliptiques.
- Il est l'un des fondateurs de la théorie des déterminants. En particulier, il invente le déterminant de la matrice formée par les dérivées partielles : le *jacobien* d'une application.
- L'identité de Jacobi apparaît dans l'étude des algèbres de Lie (un espace vectoriel muni d'un crochet bilinéaire, antisymétrique et qui justement vérifie l'identité de Jacobi).
- Il contribue à la mécanique céleste, notamment sur le problème des trois corps. Un cratère sur la Lune porte son nom.

Carl Jacobi (1804-1851)

- Une citation : « La véritable finalité de la science est l'honneur de l'esprit humain »
- Une autre citation. Face à ses étudiants qui préconisaient d'apprendre tout ce qui avait déjà été élaboré avant de se lancer dans la recherche, Jacobi répondait : « Si votre père avait pensé qu'il devait connaître toutes les filles avant d'en épouser une, il ne se serait jamais marié et vous ne seriez jamais nés »

Formes différentielles d'un ouvert de \mathbb{R}^3

Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

- Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert de \mathbb{R}^3 . On note

$$\Omega^0(U) = C^\infty(U)$$

$$\Omega^1(U) = \{ \alpha_1(x)dx_1 + \alpha_2(x)dx_2 + \alpha_3(x)dx_3, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in C^\infty(U) \times C^\infty(U) \times C^\infty(U) \}$$

$$\Omega^2(U) = \{ \beta_1(x)dx_2 \wedge dx_3 + \beta_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + \beta_3(x)dx_1 \wedge dx_2, \\ (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in C^\infty(U) \times C^\infty(U) \times C^\infty(U) \}$$

$$\Omega^3(U) = \{ h(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, h \in C^\infty(U) \}$$

$$\Omega^k(U) = \{0\} \quad \text{si} \quad k > 3.$$

les espaces vectoriels des k -formes de U ($k \in \mathbb{N}$).

Champs de vecteurs d'un ouvert de \mathbb{R}^3

- On note aussi

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(U) &= \{X_1\partial_1 + X_2\partial_2 + X_3\partial_3, \\ &\quad (X_1, X_2, X_3) \in C^\infty(U) \times C^\infty(U) \times C^\infty(U)\}\end{aligned}$$

l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur U .

- Les espaces vectoriels $\mathfrak{X}(U)$, $\Omega_1(U)$ et $\Omega_2(U)$ sont tous les trois isomorphes à

$$C^\infty(U) \times C^\infty(U) \times C^\infty(U).$$

et donc isomorphes entre eux.

- Si \mathbb{R}^3 est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et orienté alors on peut construire des isomorphismes canoniques (canoniques=qui ne dépendent pas du choix de la base) entre $\Omega_1(U)$, $\Omega_2(U)$ et $\mathfrak{X}(U)$.

Les isomorphismes musicaux

- On note $\flat : \mathfrak{X}(U) \rightarrow \Omega^1(U)$ l'application qui a tout champ de vecteurs X associe la 1-forme différentielle $\alpha = \langle X, . \rangle$.
- Similairement, on note $\sharp : \Omega^1(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$ l'application qui a toute 1-forme différentielle α associe l'unique champ de vecteur X tel que

$$\begin{cases} X_x = 0 & \text{si } \alpha_x = 0 \\ X_x \in (\ker \alpha_x)^\perp \text{ et } \alpha_x(X_x) = \|X_x\|^2 & \text{si } \alpha_x \neq 0 \end{cases}$$

en tout point $x \in U$.

Les isomorphismes musicaux

Exercice.— On suppose $\alpha_x \neq 0$. Soit W_x un vecteur non nul perpendiculaire à $\ker \alpha_x$. Montrer que $X_x = (\alpha_x)^\sharp$ a pour expression

$$X_x = \alpha_x \left(\frac{W_x}{\|W_x\|^2} \right) W_x.$$

- On a : $(\partial_i)^\flat = dx_i$ et $(dx_i)^\sharp = \partial_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.
- On a : $\flat \circ \sharp = id_{\Omega^1(U)}$ et $\sharp \circ \flat = id_{\mathfrak{X}(U)}$.

Définition.— Les deux isomorphismes \flat et \sharp sont appelés ISOMORPHISMES MUSICAUX.

L'étoile de Hodge

- On définit une application $\star : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U)$ en posant

$$\star dx_1 = dx_2 \wedge dx_3, \quad \star dx_2 = dx_3 \wedge dx_1 \quad \text{et} \quad \star dx_3 = dx_1 \wedge dx_2$$

et en la prolongeant de façon linéaire.

- Sa réciproque est encore notée $\star : \Omega^2(U) \rightarrow \Omega^1(U)$ et elle vérifie

$$\star(dx_1 \wedge dx_2) = dx_3, \quad \star(dx_2 \wedge dx_3) = dx_1 \quad \text{et} \quad \star(dx_3 \wedge dx_1) = dx_2$$

- On définit de même $\star : \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^3(U)$ et $\star : \Omega^3(U) \rightarrow \Omega^0(U)$ en posant

$$\star 1 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad \text{et} \quad \star(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = 1.$$

Définition.— L'opérateur \star est appelé l'ÉTOILE DE HODGE.

L'étoile de Hodge

Exemple/exercice.— Soit

$$\beta_x = \beta_1(x)dx_2 \wedge dx_3 + \beta_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + \beta_3(x)dx_1 \wedge dx_2.$$

Alors

$$\star\beta_x = \beta_1(x)dx_1 + \beta_2(x)dx_2 + \beta_3(x)dx_3$$

et

$$(\star\beta_x)^\sharp = \beta_1(x)\partial_1 + \beta_2(x)\partial_2 + \beta_3(x)\partial_3.$$

Ainsi

$$(\star\beta)^\sharp : \Omega^2(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$$

est un isomorphisme. On montre (exercice) que

$$\star(X^\flat) : \mathfrak{X}(U) \rightarrow \Omega^2(U)$$

est sa réciproque.

L'étoile de Hodge

Remarque.— Notre façon de définir l'étoile de Hodge fait intervenir des bases, par exemple (dx_1, dx_2, dx_3) pour $\star : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U)$. Il existe une façon plus intrinsèque de définir \star en s'appuyant sur le produit scalaire et l'orientation de \mathbb{R}^3 . Pour des questions de temps, nous ne l'aborderons pas ici.

Intégration des formes différentielles

Définition.— Soient

$$\alpha_x = \alpha_1(x)dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3(x)dx_1 \wedge dx_2$$

une 2-forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^3$ et

$$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^3$$

une application de classe C^1 . Le TIRÉ EN ARRIÈRE $f^*\alpha$ de α est la 2-forme différentielle de \mathcal{U} définie par

$$(f^*\alpha)_{(u,v)}(.,.) = \alpha_{f(u,v)}(df_{(u,v)}(.), df_{(u,v)}(.)).$$

- Remarquons que toute 2-forme d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\alpha_x(.,.) = \det(X_x, ., .)$$

où $X_x = \alpha_1(x)\partial_1 + \alpha_2(x)\partial_2 + \alpha_3(x)\partial_3 = (\star\alpha)_x^\sharp$.

Intégration des formes différentielles

- Par conséquent, si $x = f(u, v)$, on a

$$\begin{aligned}(f^*\alpha)_{(u,v)}(\partial_u, \partial_v) &= \det(X_x, f_u, f_v) \\ &= \langle X_x, f_u \wedge f_v \rangle \\ &= \sqrt{EG - F^2} \langle X_x, N(u, v) \rangle.\end{aligned}$$

- Donc

$$(f^*\alpha)_{(u,v)} = \langle X_{f(u,v)}, N(u, v) \rangle \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$$

- Si on note $(\star\alpha)^\sharp$ plutôt que X on obtient

$$(f^*\alpha)_{(u,v)} = \langle (\star\alpha)^\sharp_{f(u,v)}, N(u, v) \rangle \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv.$$

Intégration des formes différentielles

Définition.— Soit S orientée et $f : \mathcal{U} \longrightarrow S = f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ une immersion injective respectant l'orientation. On appelle INTÉGRALE DE α sur S le nombre

$$\int_S \alpha := \int_{\mathcal{U}} f^* \alpha$$

où

$$\int_{\mathcal{U}} f^* \alpha := \int_{\mathcal{U}} \langle (\star \alpha)_{f(u,v)}^\sharp, N(u,v) \rangle \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Lemme.— Soit $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ un difféomorphisme préservant l'orientation (i. e. $\det \text{Jac}(\varphi) > 0$) et $g = f \circ \varphi$. Alors

$$\int_{\mathcal{V}} g^* \alpha = \int_{\mathcal{U}} f^* \alpha.$$

Intégration des formes différentielles

- Bien sûr, si φ renverse l'orientation, on a

$$\int_{\mathcal{V}} g^* \alpha = - \int_{\mathcal{U}} f^* \alpha.$$

- C'est une différence notable entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégration des 2-formes : l'orientation rentre en compte.
- Pour l'intégrale de Lebesgue, la formule de changement de variables fait apparaître la valeur absolue du déterminant de la jacobienne.
- Notre définition de l'intégrale d'une 1-forme n'est pas complètement satisfaisante. Nous avons discrètement supposé que $S = f(\mathcal{U})$ ce qui est restrictif...

Intégration des formes différentielles

- On pourrait corriger ce défaut avec un peu plus de technologie (=une partition de l'unité).

Exemple.— Soit $\alpha = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$ et S la sphère unité. Alors

$$\begin{aligned}\int_S \alpha &= \int_{\mathcal{U}} \langle (\star \alpha)^\sharp_{f(u,v)}, N(u,v) \rangle \sqrt{EG - F^2} du dv. \\ &= \int_{\mathcal{U}} \langle f(u,v), N(u,v) \rangle \sqrt{EG - F^2} du dv.\end{aligned}$$

car $(\star \alpha)^\sharp_{f(u,v)} = f(u,v)$. Finalement

$$\int_S \alpha = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{EG - F^2} du dv = 4\pi.$$

Intégration des formes différentielles

Définition.— Soit S une sous-variété orientée par $n : S \rightarrow \mathbb{E}^3$ et X un champ de vecteurs. On appelle FLUX DE X à travers S le nombre

$$\Phi_S(X) := \int_S \langle X, n \rangle d^2 S.$$

• Le champ de vecteurs $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ définit une 2-forme $\star(X^\flat) \in \Omega^2(U)$:

$$\star(X^\flat) = X_1 dx_2 \wedge dx_3 + X_2 dx_3 \wedge dx_1 + X_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Lemme (évident).— On a

$$\Phi_S(X) = \int_S \star(X^\flat).$$

Intégration des formes différentielles

Définition.— Soit $\bar{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière injective et $\Gamma = \bar{\gamma}([a, b])$. On appelle INTÉGRALE DE la 1-forme

$$\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3$$

le long de γ le nombre

$$\int_{\gamma} \alpha := \int_a^b \bar{\gamma}^* \alpha$$

où

$$\int_a^b \bar{\gamma}^* \alpha = \int_a^b \langle \alpha^{\sharp}, \bar{\gamma}'(t) \rangle dt$$

avec

$$\alpha^{\sharp} = \alpha_1 \partial_1 + \alpha_2 \partial_2 + \alpha_3 \partial_3.$$

Intégration des formes différentielles

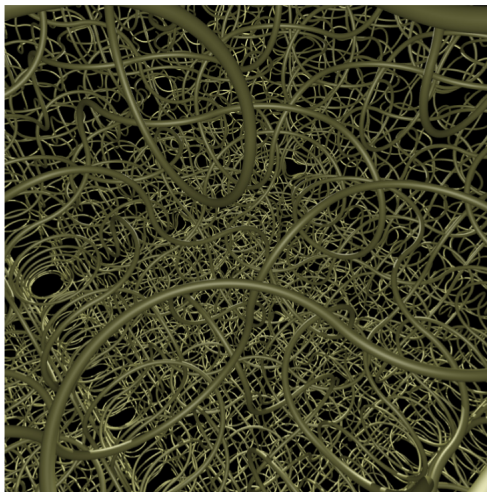
Lemme.— Soit $\varphi : [a', b'] \longrightarrow [a, b]$ un difféomorphisme préservant l'orientation (i. e. $\varphi'(t) > 0$) et $\bar{\delta} = \bar{\gamma} \circ \varphi$ alors

$$\int_{a'}^{b'} \bar{\delta}^* \alpha = \int_a^b \bar{\gamma}^* \alpha.$$

Démonstration.— Ici, la préservation de l'orientation permet de ne pas renverser \int_a^b en \int_b^a . □

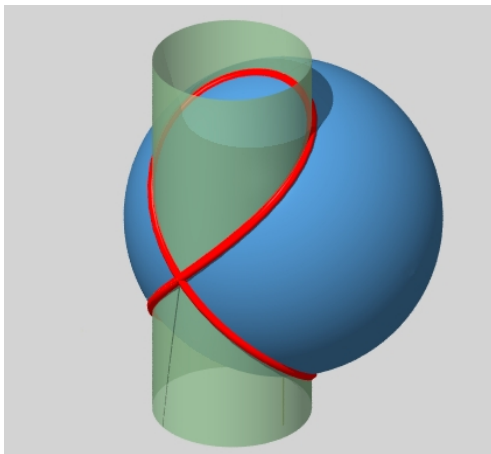
- Notons que la tentation est grande de voir $\Gamma = \bar{\gamma}([a, b])$ comme une sous-variété de dimension un. C'est bien le cas... aux extrémités près. On dit que Γ est une sous-variété à bord.

Intégration des formes différentielles



Une sous-variété de \mathbb{R}^3 de dimension de 1

Intégration des formes différentielles



*La fenêtre de Viviani : ce n'est pas une sous-variété de
dimension de 1*

Intégration des formes différentielles

- Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une variété de dimension 1 (éventuellement à bord). Le choix d'un champ de vecteurs unitaires tangents $T : \Gamma \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^3$ est appelé une ORIENTATION DE Γ .
- On dira que $\bar{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \Gamma$ préserve l'orientation si $\bar{\gamma}'$ et T ont un coefficient de proportionnalité positif.
- On peut alors définir l'intégrale des 1-formes α sur les sous-variétés orientées Γ de dimension 1 au moyen des applications $\bar{\gamma}$ qui préservent l'orientation.

Intégration des formes différentielles

Définition.— Soit Γ une sous-variété orientée par $T : \Gamma \longrightarrow \mathbb{E}^3$ et X un champ de vecteurs. On appelle CIRCULATION DE X le long de Γ le nombre

$$C_{\Gamma}(X) := \int_{\Gamma} \langle X, T \rangle ds.$$

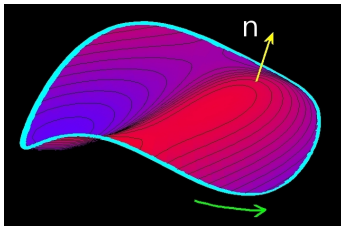
Lemme (évident).— On a

$$C_{\Gamma}(X) = \int_{\Gamma} X^{\flat}$$

où $X^{\flat} = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$.

La formule de Stokes

Définition.— Soit $S \subset \mathbb{E}^3$ une sous-variété de dimension deux. On dit que $D \subset S$ est un DOMAINE RÉGULIER de dimension 2 s'il est compact et si sa frontière $D \setminus \mathring{D}$ est une sous-variété de dimension 1. Cette sous-variété est notée ∂D et appelé le BORD de D .



- Si S est orientée par n , alors on oriente ∂D en demandant que (T, W, n) soit directe dans \mathbb{E}^3 , W étant un champ de vecteurs le long de ∂D , tangent à S et tel que W pointe à l'intérieur de D (cf. CM-S5).

La formule de Stokes

Théorème : la formule de Stokes.— Soit D un domaine régulier d'une sous-variété de dimension deux orientée S et soit ∂D son bord orienté. Soit α une 1-forme définie sur un ouvert contenant S , alors

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha.$$

- Rappelons que si $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3$ alors

$$\begin{aligned} d\alpha = & \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\ & + \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 \\ & + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1. \end{aligned}$$

La formule de Stokes

Démonstration.— On ne la présente que dans le cas où D est dans l'image d'une immersion injective $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$.

- Puisque S est une sous-variété f est un difféomorphisme sur son image, par conséquent $\mathcal{D} = f^{-1}(D)$ est un domaine régulier de \mathcal{U} dont le bord $\partial\mathcal{D}$ est $f^{-1}(\partial D)$.

- On suppose en outre qu'il existe

$$\gamma : I_1 \amalg I_2 \amalg \dots \amalg I_n \longrightarrow \partial\mathcal{D}$$

une courbe régulière injective de support $\partial\mathcal{D}$.

- On suppose enfin que les orientations induites par f et $f \circ \gamma$ sont cohérentes avec celles de D et ∂D (sinon, on met des signes moins partout dans la démonstration).

La formule de Stokes

Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

- Par définition

$$\int_D d\alpha := \int_{\mathcal{D}} f^* d\alpha = \int_{\mathcal{D}} d(f^* \alpha).$$

- On applique la formule de Green-Riemann pour obtenir

$$\int_D d\alpha := \int_{\partial \mathcal{D}} f^* \alpha.$$

- D'autre part

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_J (f \circ \gamma)^* \alpha = \int_J \gamma^* (f^* \alpha)$$

où $J = I_1 \amalg I_2 \amalg \dots \amalg I_n$.

La formule de Stokes

- Par définition

$$\int_{\partial \mathcal{D}} f^* \alpha = \int_J \gamma^* (f^* \alpha).$$

- En égalant, on trouve

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha.$$



Application 1.— Si $\partial S = \emptyset$ alors pour tout 1-forme α on a

$$\int_S d\alpha = 0.$$

La formule de Stokes

Application 2.— La circulation d'un champ de vecteur X s'écrit

$$\mathcal{C}_{\partial D}(X) = \int_{\partial D} X^\flat = \int_D d(X^\flat).$$

• Or

$$\begin{aligned} d(X^\flat) = & \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\ & + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 \\ & + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1. \end{aligned}$$

Définition.— Le champ de vecteurs $(\star d(X^\flat))^\sharp$ est appelé le ROTATIONNEL de X , il est noté $\text{rot } X$.

La formule de Stokes

- On a donc

$$\operatorname{rot} X =$$

$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) \partial_1 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right) \partial_2 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right) \partial_3.$$

- Au bilan

$$\mathcal{C}_{\partial D}(X) = \int_{\partial D} \langle X, T \rangle ds = \int_D \langle \operatorname{rot} X, n \rangle d^2 S = \Phi_D(\operatorname{rot} X).$$

Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

La formule de
Stokes

**George
Stokes**

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

George Stokes (1819-1903)



George Stokes (1819-1903)

- Mathématicien et physicien britannique de tout premier ordre. Il a occupé la chaire de mathématique *Isaac Newton* à Cambridge.
- Ses recherches ont concerné essentiellement la mécanique des fluides, l'optique et la géodésie.
- La formule qui porte son nom est due en réalité William Thomson avec qui George Stokes a entretenu une correspondance active.
- En reconnaissance de la valeur de ses travaux, il est fait baronnet en 1889.

George Stokes (1819-1903)

- Croyant fervent, il a été président du Victoria Institute, une société savante dont le but était de défendre la « grande vérité des Saintes Ecritures » face à la « fausse science » de l'*Origine des espèces* de Charles Darwin.
- Sur *Wikipédia*, on peut lire la perfidie suivante : « Son mariage en 1857 avec Mary Robinson coïncide avec un ralentissement certain de sa productivité scientifique »
- Deux cratères portent son nom, un sur la Lune l'autre sur Mars.
- Pour finir sur une note joyeuse : quelques portraits de Stokes...

George Stokes (1819-1903)



Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

La formule de
Stokes

**George
Stokes**

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

La formule de
Stokes

**George
Stokes**

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

George Stokes (1819-1903)



Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

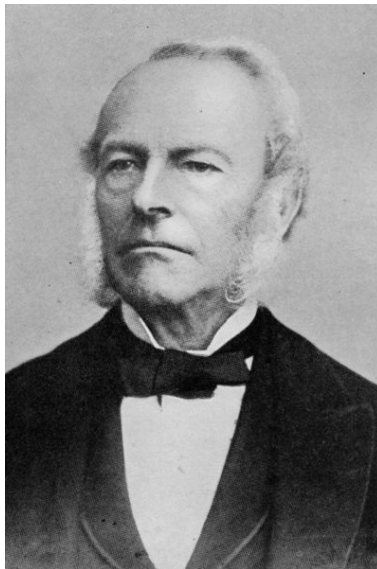
La formule de
Stokes

**George
Stokes**

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

George Stokes (1819-1903)



Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

La formule de
Stokes

**George
Stokes**

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

George Stokes (1819-1903)



Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

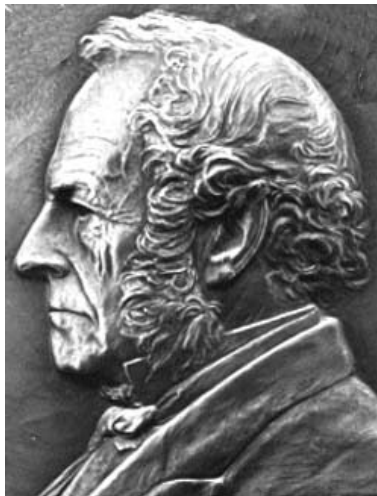
La formule de
Stokes

**George
Stokes**

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

George Stokes (1819-1903)



La formule d'Ostrogradski

Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

Définition.— On dit que $D \subset \mathbb{E}^3$ est un DOMAINE RÉGULIER de dimension 3 s'il est égal à l'adhérence de son intérieur et si sa frontière $\overline{D} \setminus \overset{\circ}{D}$ est une sous-variété de dimension 2. Cette sous-variété est notée $S = \partial D$ et appelé le BORD de D .

- On oriente alors $S = \partial D$ en choisissant la normale sortante.

La formule d'Ostrogradski

Théorème : la formule d'Ostrogradski (admise).— Soit $D \subset \mathbb{E}^3$ un domaine régulier de dimension trois et soit $S = \partial D$ son bord orienté. Soit α une 2-forme définie sur un ouvert contenant D , alors

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha.$$

- Rappelons que si

$$\alpha = \alpha_1 dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2 dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3 dx_1 \wedge dx_2$$

alors

$$d\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

La formule d'Ostrogradski

- Bien sûr, on définit l'intégrale d'une 3-forme

$$\beta = h \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

sur un domaine régulier de dimension trois D par

$$\int_D \beta := \int_D h \, dx_1 dx_2 dx_3.$$

- On note $\omega := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Autrement dit

$$\omega(X, Y, Z) = \det(X, Y, Z).$$

- Si X est un champ de vecteurs, on définit une 2-forme $i_X \omega$ par

$$(i_X \omega)(., .) := \omega(X, ., .)$$

La formule d'Ostrogradski

Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

- Un calcul immédiat montre que

$$i_X \omega := X_1 dx_2 \wedge dx_3 + X_2 dx_3 \wedge dx_1 + X_3 dx_1 \wedge dx_2$$

- Ainsi

$$d(i_X \omega) = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right) \omega.$$

Définition.— On appelle DIVERGENCE DE X l'application

$$\operatorname{div} X := \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right).$$

La formule d'Ostrogradski

Champs de
vecteurs

Jacobi

Formes
différentielles
d'un ouvert de
 \mathbb{R}^3

Intégration
des formes
différentielles

Intégration
des formes
différentielles

La formule de
Stokes

George
Stokes

La formule
d'Ostrogradski

Mikhail
Ostrogradski

Application.— Le flux de X s'écrit maintenant

$$\Phi_S(X) = \int_S \langle X, n \rangle d^2 S = \int_S \det(X, \cdot, \cdot) = \int_S i_X \omega.$$

- La formule d'Ostrogradski permet d'écrire

$$\Phi_S(X) = \int_D d(i_X \omega) = \int_D \text{dix}(X) \omega.$$

Mikhail Ostrogradski (1801-1862)



Mikhail Ostrogradski (1801-1862)

- Considéré comme l'un des physiciens/mathématiciens les plus importants de la Russie impériale.
- Commence ses études à Kharkiv (Ukraine) mais ne peut obtenir son diplôme de thèse après la suspension de son directeur de thèse (et recteur de l'Université) Timofei Osipovsky.
- Le Prince Aleksander Golitsyn, ministre de l'enseignement, avait en effet ordonné que la science soit présentée selon « des principes chrétiens » et Osipovsky aurait manqué de ferveur en déclamant « Dieu est vivant » lors de l'examen oral d'un étudiant.
- Poursuit ses études à Paris où il se lie d'amitié et d'estime avec Cauchy, Binet, Fourier et Poisson.

Mikhail Ostrogradski (1801-1862)

- Revient au pays pour enseigner à l'école des cadets de la Marine, puis à l'Institut des Ingénieurs et enfin à l'école d'Artillerie de Saint-Pétersbourg.
- Rejette le travail de Lobachevsky sur les géométries non-euclidiennes (article soumis à l'Académie des Sciences de Saint Pétersbourg).
- La formule qui porte son nom fut découverte par Lagrange en 1762, puis redécouverte par Gauss en 1813 et par Green en 1825. Elle fut *démontrée* par Ostrogradski en 1831.