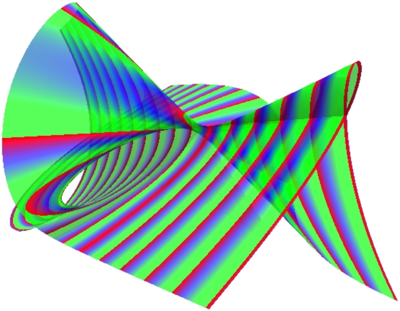
CM-S2 : Surfaces paramétrées

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Une surface réglée : la surface de Cayley

Régularité

Définition.– Une SURFACE PARAMÉTRÉE DE $\mathbb{R}^3$ de classe C^k, $k \geq 1$, est une application $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \stackrel{C^k}{\to} \mathbb{R}^3$. L'image $S = f(\mathcal{U})$ est appelé LE SUPPORT de f.

• Toute application $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \stackrel{C^k}{\to} \mathbb{R}^3$ telle que $g(\mathcal{V}) = S$ est appelée une C^k-PARAMÉTRISATION de S.

Définition.– Une surface paramétrée f est dite RÉGULIÈRE en $(u, v) \in \mathcal{U}$ si $f_u(u, v)$ et $f_v(u, v)$ sont linéairement indépendants, ou de façon équivalente, si la différentielle $df_{(u,v)}$ est de rang deux.

Régularité

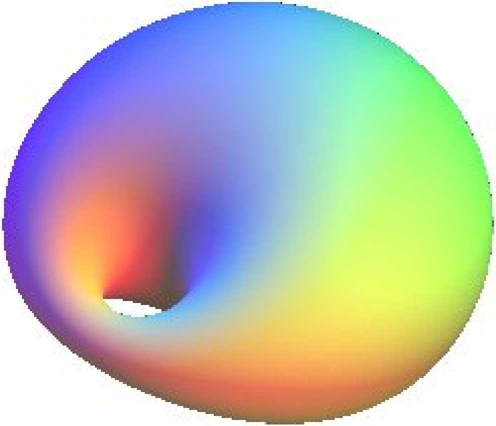
Définition.– Une SURFACE PARAMÉTRÉE DE $\mathbb{R}^3$ de classe C^k, $k \geq 1$, est une application $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \stackrel{C^k}{\to} \mathbb{R}^3$. L'image $S = f(\mathcal{U})$ est appelé LE SUPPORT de f.

• Toute application $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \stackrel{C^k}{\to} \mathbb{R}^3$ telle que $g(\mathcal{V}) = S$ est appelée une C^k-PARAMÉTRISATION de S.

Définition.– Une surface paramétrée f est dite RÉGULIÈRE en $(u, v) \in \mathcal{U}$ si $f_u(u, v)$ et $f_v(u, v)$ sont linéairement indépendants, ou de façon équivalente, si la différentielle $df_{(u,v)}$ est de rang deux.

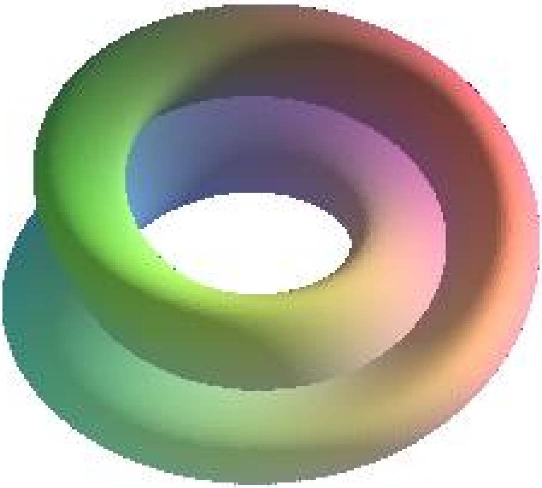
Lemme (évident).– *Le point* $(u, v) \in \mathcal{U}$ *est régulier ssi* $f_u(u, v) \wedge f_v(u, v) \neq 0$.

Régularité



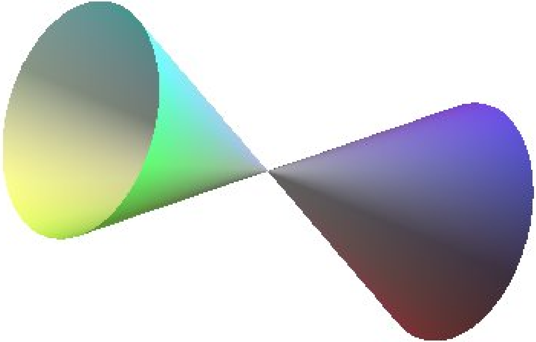
Une cyclide de Dupin : régulier

Régularité



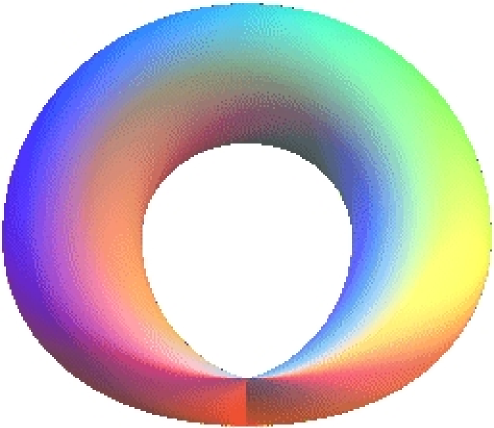
Une bouteille de Klein : régulier

Régularité



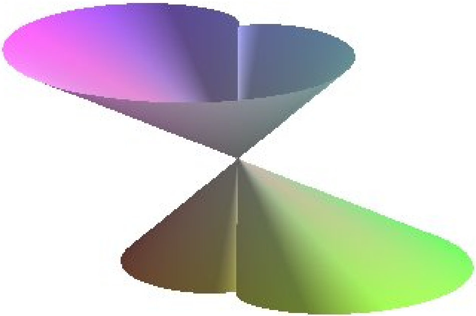
Un cône : un point singulier

Régularité



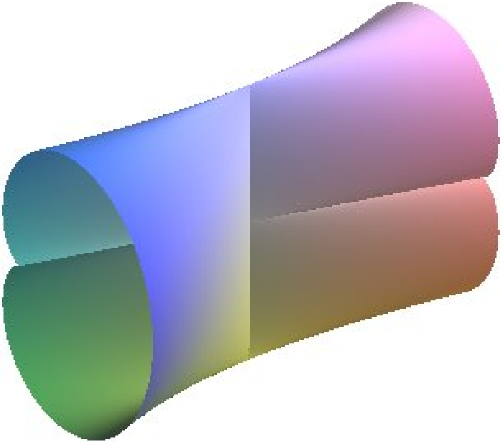
Une bouteille de Klein pincée : deux points singuliers

Régularité



Un cône de base une cardioïde : une arête de points singuliers

Régularité



Une situation plus complexe

Régularité

Définition.– Deux surfaces paramétrées

$$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \overset{C^k}{\to} \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \overset{C^k}{\to} \mathbb{R}^3$$

sont ÉQUIVALENTES s'il existe un C^k-difféomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ tel que $g = f \circ \varphi$. Une classe d'équivalence est appelée une SURFACE GÉOMÉTRIQUE.

• On dit que g est un REPARAMÉTRAGE de f.

Lemme.– *Si f est régulière en (u, v) alors $g = f \circ \varphi$ est régulière en $(u', v') = \varphi^{-1}(u, v)$.*

Démonstration.– Immédiate puisque $d\varphi_{(u',v')}$ est un isomorphisme vectoriel et que

$$dg_{(u',v')} = df_{(u,v)} \circ d\varphi_{(u',v')}.$$

Régularité

Définition.– Soit (u, v) un point régulier. Le plan affine passant par $p = f(u, v)$ et dont le plan vectoriel associé est $Vect(f_u(u, v), f_v(u, v))$ est appelé PLAN TANGENT de f en (u, v). Si p n'a qu'un antécédant par f, on note

$$T_pS := p + Vect(f_u(u, v), f_v(u, v)).$$

• En un point régulier, on note

$$N(u, v) := \frac{f_u(u, v) \wedge f_v(u, v)}{|f_u(u, v) \wedge f_v(u, v)|}.$$

La droite affine $p + Vect\ N(u, v)$ est l'ESPACE NORMAL à S en (u, v). Si p n'a qu'un antécédant, on note N_pS l'espace normal.

• Les sous-espaces affines T_pS et N_pS sont invariants par reparamétrages.

Surfaces réglées

Définition.– On appelle C^k-SURFACE RÉGLÉE un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^3$ pour lequel il existe une paramétrisation de la forme

$$f: \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & \alpha(u) + v\beta(u) \end{array}$$

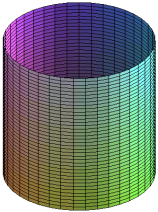
où I est un intervalle et $\alpha, \beta : I \stackrel{C^k}{\to} \mathbb{R}^3$.

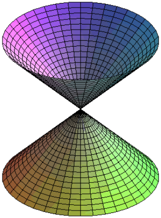
- La famille des droites

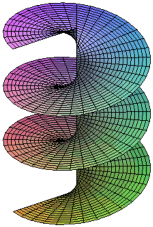
$$v \longmapsto \alpha(u) + v\beta(u)$$

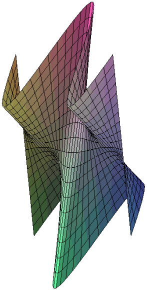
constitue un recouvrement de $S = f(I \times \mathbb{R})$.

Surfaces réglées

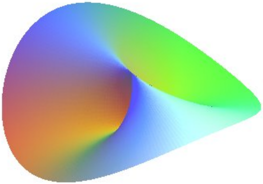


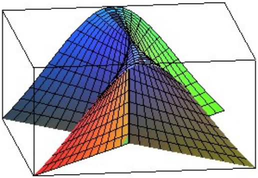


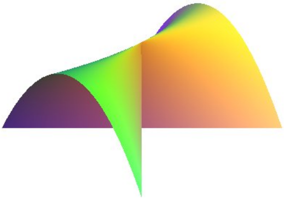


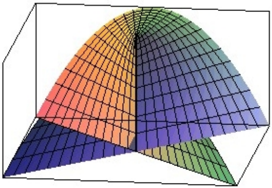


Surfaces réglées



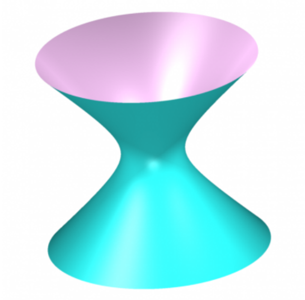


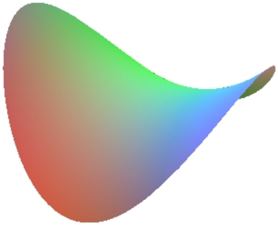




Surfaces réglées

Proposition.– *L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique sont des surfaces réglées*.





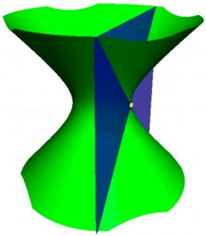
Surfaces réglées

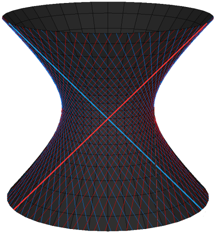
Démonstration.– On commence par l'hyperboloïde à une nappe. Quitte à composer par une application affine on peut supposer que l'hyperboloïde H à pour équation implicite

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

En effet, une application affine envoie droites sur droites.

• L'intersection de H avec le plan $x = 1$ est la réunion de deux droites $D = \{x = 1, y = z\}$ et $D' = \{x = 1, y = -z\}$.





Surfaces réglées

- Puisque H est une surface de révolution, les familles

$$\mathcal{F} = \{R_{e_3,\theta}(D) \mid \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

et

$$\mathcal{F}' = \{R_{e_3,\theta}(D') \mid \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

forment respectivement une partition de H.

Surfaces réglées

• Pour le PH, quitte à composer par une application affine on peut toujours supposer qu'il admet pour équation implicite

$$x^2 - y^2 - z = 0.$$

• Soient $(P_a)_{a\in\mathbb{R}}$ et $(P'_a)_{a\in\mathbb{R}}$ les familles de plans définies respectivement par les équations

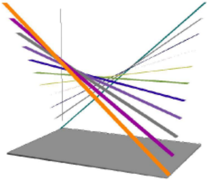
$$x - y = a \quad \text{et} \quad x + y = a.$$

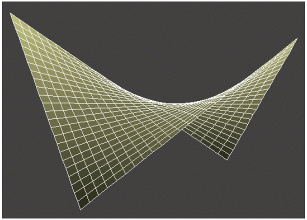
Les intersections de P_a et de P'_a avec le PH sont les droites

$$D_a : \quad x - y = a \quad \text{et} \quad z = 2ay + a^2$$

$$D'_a : \quad x + y = a \quad \text{et} \quad z = -2ay + a^2$$

Surfaces réglées





• Il est alors facile de vérifier que les familles

$$\mathcal{F} = \{D_a \mid a \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}' = \{D'_a \mid a \in \mathbb{R}\}$$

forment chacune une partition du PH. $\square$

Surfaces réglées

Un château d'eau

Surfaces réglées

Un quartier de Kobe (Japon)

Surfaces réglées

Un passage protégé entre deux immeubles à Manchester

Surfaces réglées

Où mène l'étude des courbes et surfaces...

Surfaces réglées

Une petite faim ?

Graphes

Définition.– On appelle PARAMÉTRAGE CARTÉSIEN un paramétrage de la forme

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y, h(x, y)) \end{array}$$

où $h : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple.– L'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y, x^2 - y^2) \end{array}$$

est un paramétrage cartésien de

$$PH = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 - z = 0\}.$$

Graphes

Théorème.– *Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée et $m_0 = (u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ un point régulier. Alors il existe un voisinage $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ de m_0 et une (éventuelle) permutation des coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ telle que $S_0 := f(\mathcal{U}_0)$ admette un paramétrage cartésien dans ces coordonnées.*

Observation.– Ce théorème affirme que tout support de surface paramétrée S peut être vu *localement* comme le graphe d'une fonction.

• L'exemple de la sphère montre que l'on ne peut pas espérer un tel résultat *globalement.*

Graphes

Démonstration.– On écrit le paramétrage f sous la forme

$$(u, v) \longmapsto (\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)).$$

Puisque m_0 est un point régulier, la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \alpha}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial \alpha}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial \beta}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

est de rang deux.

Graphes

• Quitte à permuter les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$, on peut supposer que le mineur

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \beta}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \beta}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

Observation.– Cette condition signifie que le sous-espace vectoriel $df_{m_0}(\mathbb{R}^2)$ ne contient pas l'axe (Oz).

Graphes

- Le théorème d'inversion locale affirme alors que

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\alpha(u,v),\beta(u,v)) \end{array}$$

est un difféomorphisme local, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}_0$ de m_0 tel que $\widetilde{g} = g_{|\mathcal{U}_0}$ soit un difféomorphisme sur son image $\mathcal{V} = g(\mathcal{U}_0)$.

- La composition

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{U}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \overset{\widetilde{g}^{-1}}{\longmapsto} & (u,v) & \overset{f}{\longmapsto} & (x,y,\gamma\circ\widetilde{g}^{-1}(x,y)) \end{array}$$

donne un paramétrage cartésien. $\square$

Position par rapport au plan tangent

• Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathbb{R}^3$, on note

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & ax+by+cz+d \end{array}$$

une application affine définissant $\mathcal{P}$ i. e.

$$p \in \mathcal{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(p) = 0.$$

• On note également

$$\begin{array}{rccc} L(\varphi) : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & ax+by+cz \end{array}$$

sa partie linéaire, i. e. pour tout $v \in \mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \quad \Longleftrightarrow \quad L(\varphi)(\overrightarrow{v}) = 0.$$

Position par rapport au plan tangent

Lemme.– *Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée et soit $m_0 \in \mathcal{U}$ un point régulier. Le plan $\mathcal{P}$ est tangent en m_0 si et seulement si au voisinage de m_0 on a*

$$\varphi(f(m)) = o(\|\overrightarrow{m_0 m}\|).$$

Observation.– Ainsi le plan tangent réalise une approximation de la surface paramétrée à l'ordre 1.

Démonstration.– Le développement de Taylor à l'ordre 1 de $\varphi \circ f$ s'écrit

$$\varphi \circ f(m) = \varphi \circ f(m_0) + d(\varphi \circ f)_{m_0}(\overrightarrow{m_0 m}) + o(\|\overrightarrow{m_0 m}\|).$$

Or

$$\varphi \circ f(m_0) = 0 \iff f(m_0) \in \mathcal{P}$$

Position par rapport au plan tangent

- D'autre part

$$d(\varphi\circ f)_{m_0}(\overrightarrow{m_0m}) = 0 \iff L(\varphi)(df_{m_0}(\overrightarrow{m_0m})) = 0.$$

Ces égalités sont satisfaites pour tout m dans un voisinage de m_0 ssi

$$Im\ df_{m_0} \subset \ ker\ L(\varphi).$$

Puisque m_0 est régulier $dim\ Im\ df_{m_0} = 2$ et la condition précédente s'écrit

$$Im\ df_{m_0} = \ ker\ L(\varphi) = \overrightarrow{\mathcal{P}}.$$

- Au bilan

$$\varphi(f(m)) = o(\|\overrightarrow{m_0m}\|) \iff \mathcal{P} \text{ est tangent à } f \text{ en } m_0.$$

Position par rapport au plan tangent

• Soit $\mathcal{U}_0$ un voisinage de m_0 tel que $f(\mathcal{U}_0)$ admette un paramétrage cartésien :

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,y,h(x,y)). \end{array}$$

• On suppose en outre que l'origine de $\mathbb{R}^3$ a été choisie telle que $f(m_0) = O$.

• Quitte à effectuer une translation, on peut également supposer que $\mathcal{V}$ contient l'origine de $\mathbb{R}^2$ et que $g(0,0) = f(m_0) = O$.

Position par rapport au plan tangent

- Le développement de Taylor à l'ordre deux de h s'écrit

$$h(x,y) = px + qy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + o(x^2+y^2)$$

où, avec les notations de Monge,

$$p = \frac{\partial h}{\partial x}(0,0), \qquad q = \frac{\partial h}{\partial y}(0,0),$$

$$r = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0), \qquad s = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0), \qquad t = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0).$$

- D'après ce que l'on vient de voir, la forme quadratique

$$Q(x,y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$$

décrit la position de la surface par rapport à son plan tangent.

Position par rapport au plan tangent

Définition.–

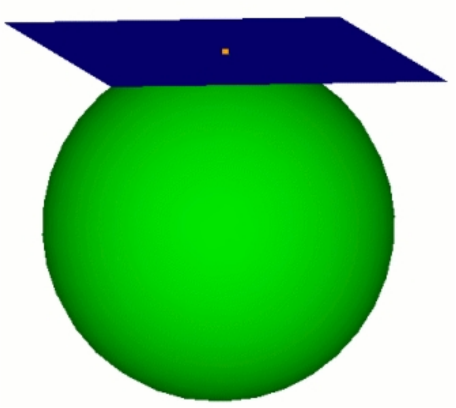
• Si Q est définie (positive ou négative), i. e. si $rt - s^2 > 0$, alors le point $f(m_0)$ est dit ELLIPTIQUE.

• Si Q est non dégénérée mais change de signe, i. e. si $rt - s^2 < 0$, alors le point $f(m_0)$ est dit HYPERBOLIQUE.

• Si Q est dégénérée mais non nulle, alors le point $f(m_0)$ est dit PARABOLIQUE.

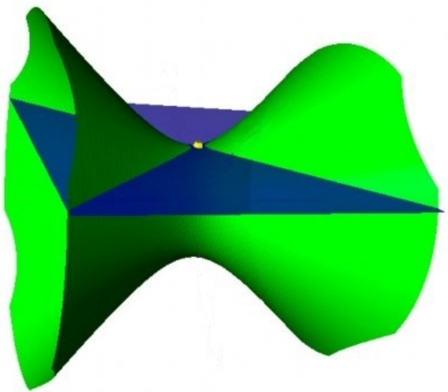
• Si Q est nulle alors le point $f(m_0)$ est dit PLANAIRE.

Position par rapport au plan tangent



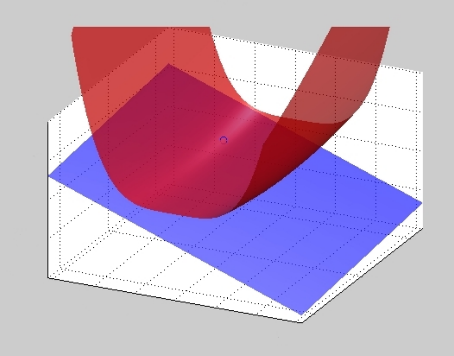
Point elliptique

Position par rapport au plan tangent



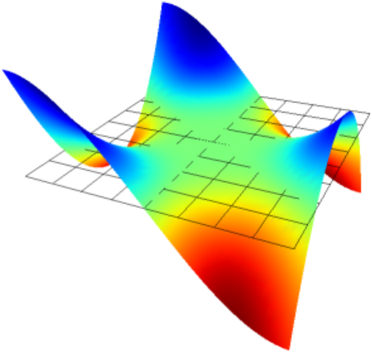
Point hyperbolique

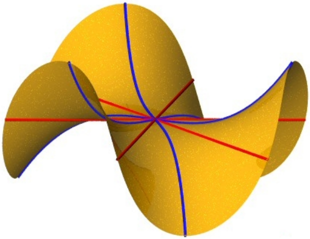
Position par rapport au plan tangent



Point parabolique

Position par rapport au plan tangent

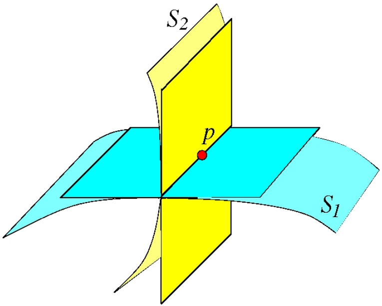




Point planaire (la selle de singe)

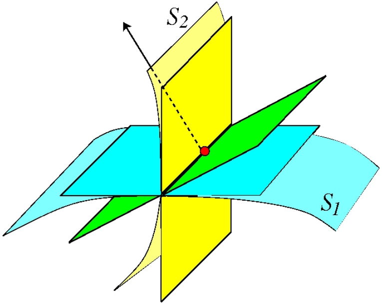
Intersections

Proposition.– *Soient S_1 et S_2 deux supports de surfaces paramétrées provenant de C^1-paramétrages injectifs et réguliers. Soit $p \in S_1 \cap S_2$. On suppose que T_pS_1 et T_pS_2 sont distincts (i. e. $\dim T_pS_1 \cap T_pS_2 = 1$) alors, au voisinage de p, l'intersection $S_1 \cap S_2$ est le support d'une courbe paramétrée dont la tangente en p est l'intersection $T_pS_1 \cap T_pS_2$.*



Intersections

Démonstration.– On choisit un repère d'origine p et dont le troisième vecteur n'est ni dans $\overrightarrow{T_pS_1}$ ni dans $\overrightarrow{T_pS_2}$.



Localement S_1 et S_2 apparaissent comme des graphes au dessus du plan vert.

Intersections

- D'après un théorème précédent, il existe deux C^1-paramétrages cartésiens

$$\begin{array}{rccc} f_i : & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x, y, h_i(x, y)) \end{array}$$

$i = 1$ ou 2, de S_1 et de S_2 respectivement et tels que $h_i(0, 0) = 0$.

- L'intersection est donc l'image par f_1 ou f_2 de

$$C := \{(x, y) \in \mathcal{V} \mid h_1(x, y) = h_2(x, y)\}.$$

- On pose $h := h_1 - h_2$. On a donc

$$C := \{(x, y) \in \mathcal{V} \mid h(x, y) = 0\}.$$

Intersections

• Une des deux dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)$ est non nulle car sinon on aurait $T_pS_1 = T_pS_2$. Supposons que

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) \neq 0.$$

• Puisque $h(0,0) = 0$, on peut appliquer le TFI et trouver I et J contenant 0 et $\varphi : I \xrightarrow{C^1} J$ tels que

$$C \cap (I \times J) = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in I\}.$$

• La courbe $\gamma : I \ni x \longmapsto (x, \varphi(x)) \in I \times J$ est régulière puisque

$$\gamma'(x) = (1, \varphi'(x)) \neq (0,0).$$

Intersections

• La courbe $f_1 \circ \gamma$ est également régulière car f_1 étant un paramétrage cartésien, il est nécessairement régulier.

• Par construction, le support de $f_1 \circ \gamma$ est l'intersection de $S_1 \cap S_2$ avec un voisinage de p dans $\mathbb{R}^3$. De plus

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_1 \circ \gamma)(0) \in T_pS_1.$$

• Bien sûr $f_2 \circ \gamma = f_1 \circ \gamma$ et donc

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_1 \circ \gamma)(0) = \frac{\partial}{\partial x}(f_2 \circ \gamma)(0) \in T_pS_2.$$

• Au bilan

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_1 \circ \gamma)(0) = \frac{\partial}{\partial x}(f_2 \circ \gamma)(0) \in T_pS_1 \cap T_pS_2.$$

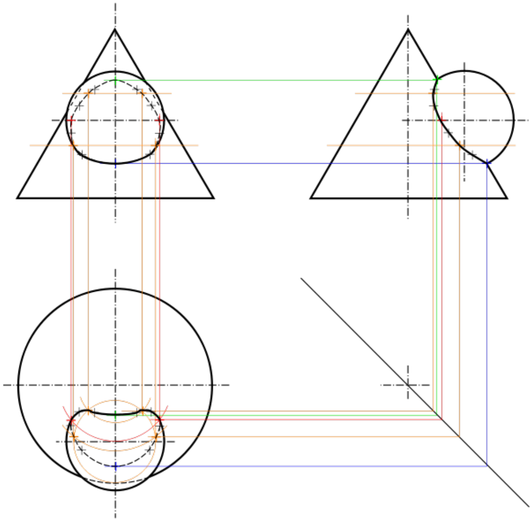
Gaspard Monge (1746-1818)

Gaspard Monge (1746-1818)

• Savant illustre, fondateur de la *géométrie descriptive* et homme politique ordinaire, né à Beaune et mort à Paris. Il fut l'un des fondateurs de l'Ecole polytechnique où il devint aussi professeur.

• La géométrie descriptive est une méthode pour résoudre de façon graphique sur le papier des problèmes d'intersections et d'ombres entre volumes et surfaces définis de façon géométrique dans l'espace à trois dimensions.

Gaspard Monge (1746-1818)



Un exemple : l'intersection d'un cône et d'une sphère.

Gaspard Monge (1746-1818)

• La Révolution française, qu'il soutient dès 1789, change complètement le cours de sa vie, il quitte l'Académie des sciences pour devenir ministre de la marine.

• Il pousse à l'instauration d'un système de poids et mesures fondé sur le système décimal.Il propose d'instaurer un calendrier avec des semaines de dix jours : le calendrier républicain qui ne durera pas au-delà de 1806.

• Sous Napoléon, Monge est nommé membre du Sénat à sa création. Il en devient président ensuite.

Gaspard Monge (1746-1818)

≪ Monge était le plus doux, le plus faible des hommes, et n'aurait pas laissé tuer un poulet s'il eut fallu en faire l'exécution lui-même, ou seulement devant lui. Ce forcené républicain, à ce qu'il croyait, avait pourtant un espèce de culte pour moi, c'était de l'adoration : il m'aimait comme on aime sa maîtresse≫

Napoléon Bonaparte