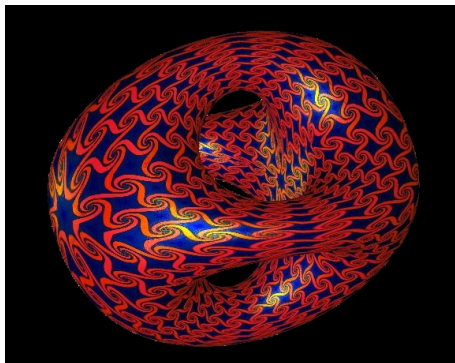


# CM-S3 : Sous-variétés

Vincent Borrelli

Université de Lyon



*Une sous-variété de genre trois*

# Sous-variétés

**Définition.**— Une partie  $S \subset \mathbb{R}^n$  est une  $C^k$ -SOUS-VARIÉTÉ DE DIMENSION  $m$  DE  $\mathbb{R}^n$ ,  $k \geq 1$  si pour tout  $p \in S$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^n$ , un voisinage ouvert  $V$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  et un  $C^k$ -difféomorphisme  $\phi : U \rightarrow V$  tel que

$$\phi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

**Définition.**— Un difféomorphisme  $\phi$  qui réalise la condition de la définition est appelé DIFFÉOMORPHISME LINÉARISANT.

**Exemple : la sphère.**— Montrons que

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

une sous-variété de dimension 2.

## Sous-variétés

• Soit  $p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ , on note  $\pi_p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \text{Vect}(p)^\perp$  la projection orthogonale et  $U$  la boule ouverte de centre  $p$  et de rayon 1. On note encore  $L$  n'importe quel isomorphisme vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $L(\text{Vect}(p)^\perp) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ .

• On pose

$$\begin{aligned} \phi : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (L \circ \pi_p(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 - 1) \end{aligned}$$

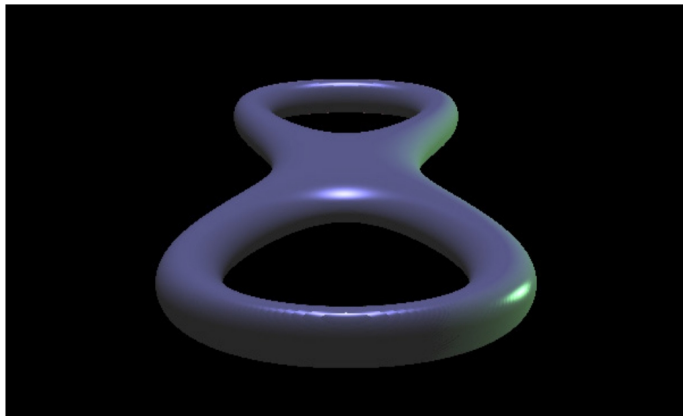
• Il est facile (mais fastidieux !) de vérifier que  $\phi$  est un difféomorphisme de  $U$  sur son image  $V = \phi(U)$ .

• En revanche, la propriété

$$\phi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$$

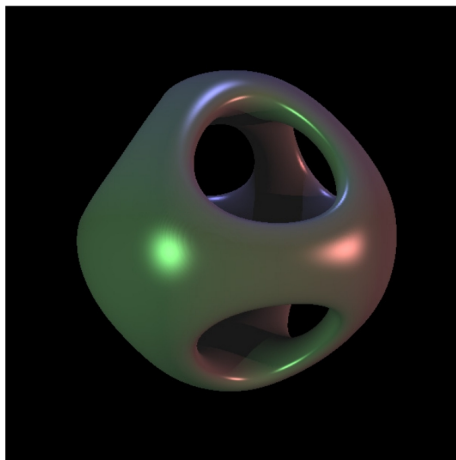
est immédiate.

# Sous-variétés



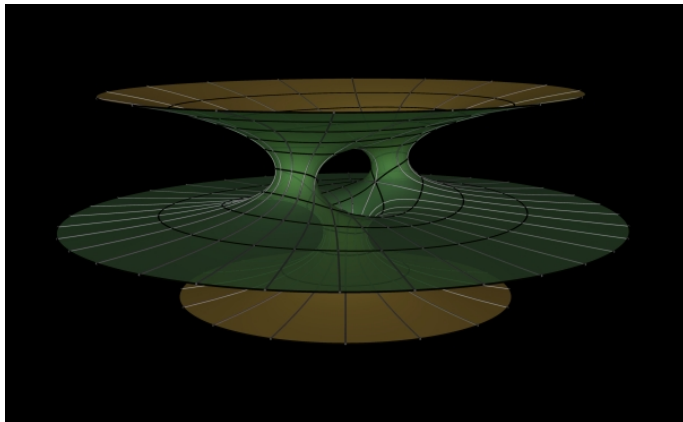
*Un exemple de sous-variété : le tore à deux trous ou  
« bretzel »*

# Sous-variétés



*Un autre exemple de sous-variété : la surface  
« orthocercles »*

# Sous-variétés



*Encore un exemple de sous-variété : la surface de Costa*

# Sous-variétés

## Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

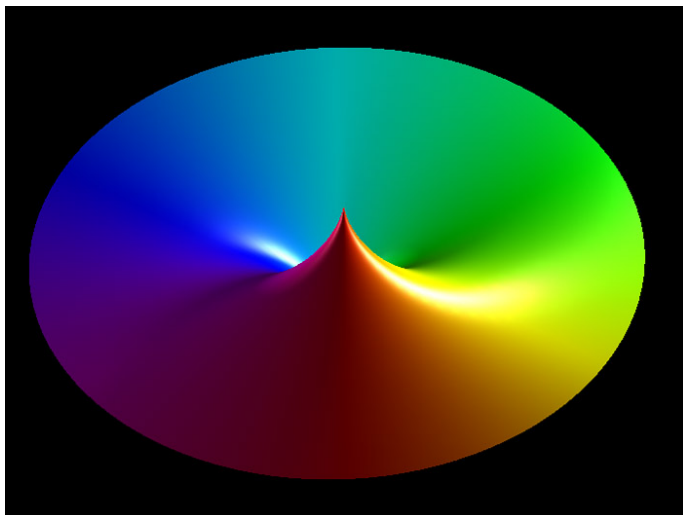
Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

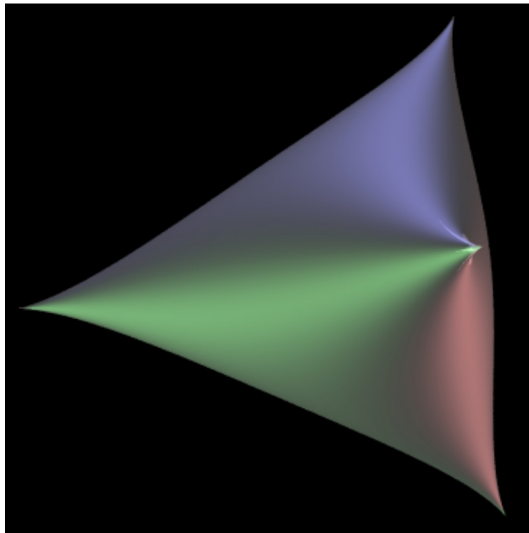
Orientation

Joyeux Noël ?



*Un contre-exemple : ceci n'est pas une sous-variété*

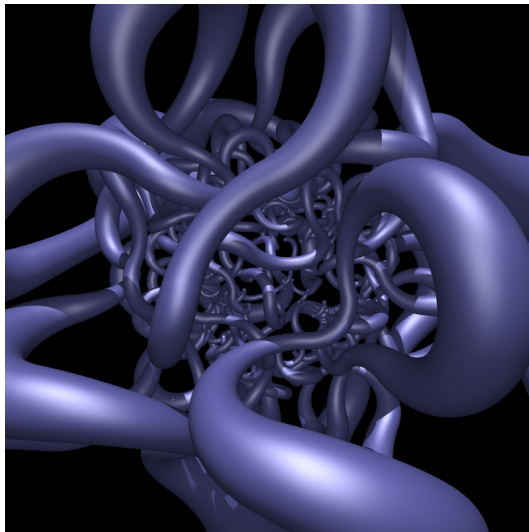
# Sous-variétés



*Ni ceci !*



# Sous-variétés



*Une sous-variété ?*

## Sous-variétés

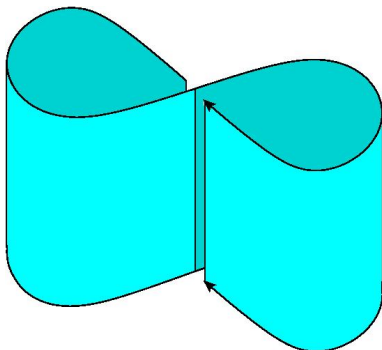
**Mise en garde.**— Soit  $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière et injective, en général  $f(\mathcal{U})$  n'est pas une sous-variété.

• **Exemple.**— Soit

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \left( \frac{u + u^3}{1 + u^4}, \frac{u - u^3}{1 + u^4}, v \right) \end{aligned}$$

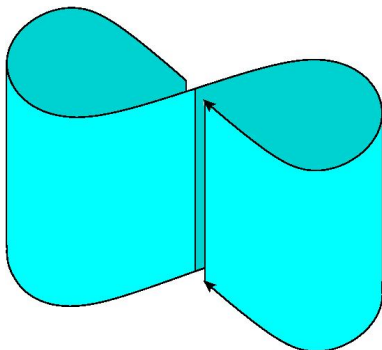
• On vérifie aisément que  $f$  est injective et régulière et que, de plus, l'image  $S = f(\mathbb{R}^2)$  est un cylindre de base une lemniscate de Bernoulli.

# Sous-variétés



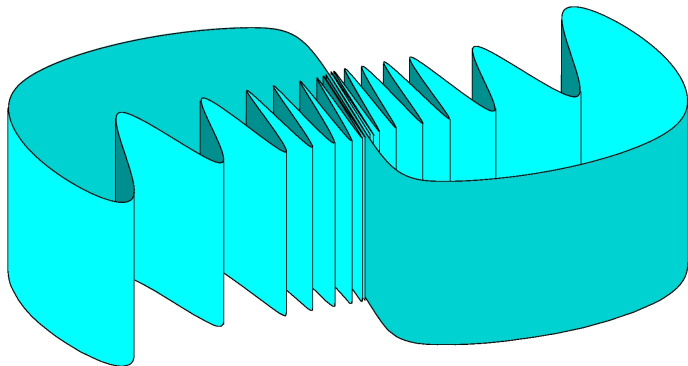
- Soit  $U$  une boule de centre  $p = f(0, v)$  et de rayon petit. L'intersection  $U \cap S$  est homéomorphe à une union de deux plans sécants. L'espace  $S$  ne peut être une sous-variété.

# Sous-variétés



- Le support  $S = f(\mathcal{U})$  de  $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  régulière et injective est une sous-variété si  $f$  s'étend en un difféomorphisme de  $\mathcal{U} \times ]-\epsilon, \epsilon[$  sur un voisinage de  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

# Sous-variétés



*Autre exemple de support de surface paramétrée régulière  
et injective qui n'est pas une sous-variété*

## Sous-variétés

**Définition.**— On dit que  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est une IMMERSION de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}^n$  si, en tout point  $p \in \mathcal{U}$ , la différentielle  $df_p : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est injective.

- Notons que nécessairement  $m \leq n$ .

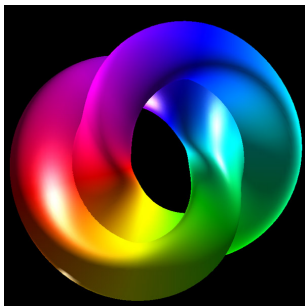
**Exemple 1.**— Si  $m = 2$  et  $n = 3$  les immersions de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}^3$  sont précisément les surfaces paramétrées  $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  régulières.

**Exemple 2.**— Si  $m = 1$  et  $n = 3$  les immersions de l'intervalle ouvert  $I$  dans  $\mathbb{R}^3$  sont précisément les courbes paramétrées  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  régulières.

- On a constaté que l'image d'un ouvert par une immersion injective n'est pas nécessairement une sous-variété.

## Sous-variétés

- En revanche cette image est *localement* une sous-variété que  $f$  soit injective ou non.



**Théorème.**— Soit  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une immersion  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , et  $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ . Alors, il existe un ouvert  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$  de  $(u_0, v_0)$  tel que  $S_0 = f(\mathcal{U}_0)$  soit une  $C^k$ -sous-variété de dimension  $m$ .

## Sous-variétés

**Démonstration.**— Pour fixer les idées, on suppose  $m = 2$  et  $n = 3$  (sachant que les arguments présentés se généralisent trivialement). Soit  $(f_1, f_2, f_3)$  les composantes de  $f$ . Puisque  $df_{(u_0, v_0)}$  est de rang deux, et quitte à permuter les coordonnées dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut supposer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

est inversible.

- Soit

$$\begin{aligned} g : \quad \mathcal{U} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) &\longmapsto (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v) + w) \end{aligned}$$



- La matrice jacobienne de  $g$  en  $(u_0, v_0)$  est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u_0, v_0) & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u_0, v_0) & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(u_0, v_0) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est donc inversible.

- D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage  $V \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}$  de  $(u_0, v_0, 0)$  tel que  $g|_V$  soit un difféomorphisme sur son image  $U = g(V)$ . On pose  $\phi = g|_V^{-1} : U \rightarrow V$ .

## Sous-variétés

- Soit  $\mathcal{U}_0 = V \cap (\mathcal{U} \times \{0\})$ . Puisque  $V \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ , on a

$$\mathcal{U}_0 = V \cap (\mathcal{U} \times \{0\}) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

- Soit  $S_0 = f(\mathcal{U}_0)$ . On a

$$g(\mathcal{U}_0) = S_0$$

puisque

$$\forall (u, v) \in \mathcal{U}_0, \quad g(u, v, 0) = f(u, v).$$

Donc  $\phi(S_0) = \mathcal{U}_0 = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$

- Bien sûr  $S_0 \subset U = g(V)$  donc  $S_0 = S_0 \cap U$  et finalement

$$\phi(U \cap S_0) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

L'image  $S_0$  est donc bien une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . □

## Sous-variétés

**Proposition.**— Soit  $S \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété de dimension  $m$  et  $p \in S$ . Alors il existe un voisinage  $U$  de  $p$  et une immersion injective  $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^n$  dont l'image est  $S \cap U$ .

- Autrement dit, localement, on peut toujours paramétrer de façon régulière et injective une sous-variété, le paramétrage régulier étant l'immersion  $f$  de la proposition. La théorie des surfaces paramétrées va donc pouvoir se recycler dans celle des sous-variétés.

**Démonstration.**— Par définition, à chaque point  $p \in S$  d'une sous-variété il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^n$ , un voisinage ouvert  $V$  de  $0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un  $C^k$ -difféomorphisme  $\phi : U \longrightarrow V$  tel que

$$\phi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Il suffit de poser  $f = \phi|_{V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})}^{-1}$ .

## Sous-variétés

**Définition.**— Soient  $p \in S$  et  $U$  un voisinage de  $p$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Toute application  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow (S \cap U) \subset \mathbb{R}^n$  qui est une immersion injective est appelé un PARAMÉTRAGE (LOCAL) de  $S$ . L'application inverse  $\varphi = f^{-1} : S \cap U \rightarrow \mathcal{U}$  est appelée une CARTE de  $S$ .

- La proposition précédente établit l'existence de paramétrisations et de cartes en tout point de  $S$ .

**Définition.**— Soient  $\varphi_1 : S \cap U \rightarrow \mathcal{U}_1$  et  $\varphi_2 : S \cap U \rightarrow \mathcal{U}_2$  deux cartes d'un même voisinage de  $S$ . Les applications  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  et  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  sont appelées des CHANGEMENTS DE CARTES.

- Nous verrons plus bas que les changements de cartes sont des difféomorphismes entre  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$ .

## Sous-variétés

**Définition.**— On dit que  $h : U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^q$  est une  $C^k$ -SUBMERSION de  $U$  dans  $\mathbb{R}^q$  ( $k \geq 1$ ) si, en tout point  $p \in U$ , la différentielle  $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  est surjective.

- Notons que nécessairement  $n \geq q$ .

**Exemple 1.**— La projection orthogonale  $\mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^1$ .

**Exemple 2.**— La fonction *distance au carré*

$$\begin{aligned} h : \mathbb{E}^3 \setminus \{O\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longrightarrow x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

**Exemple 3.**— Plus généralement  $h : U \subset \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une submersion ssi, pour tout  $p \in U$ ,  $\text{grad}_p h \neq 0$ .

## Sous-variétés

**Théorème (dit de la submersion).**– Soit

$h : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$  une  $C^k$ -submersion,  $k \geq 1$ , et a un point de  $\mathbb{R}^q$ . On suppose que  $h^{-1}(a) \neq \emptyset$ , alors

$$S = h^{-1}(a)$$

est une  $C^k$ -sous-variété de dimension  $n - q$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Démonstration.**– On Pour fixer les idées, on suppose  $n = 3$  et  $q = 1$ . Le cas général est laissée à votre sagacité. Soit  $p \in h^{-1}(a)$ . Puisque  $dh_p$  est non nul, quitte à permuter les coordonnées dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut supposer

$$\frac{\partial h}{\partial z}(p) \neq 0.$$

- On pose

$$\begin{aligned} g : \quad W &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, h(x, y, z) - a) \end{aligned}$$

# Sous-variétés

- La matrice jacobienne de  $g$  en  $p$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x}(p) & \frac{\partial h}{\partial y}(p) & \frac{\partial h}{\partial z}(p) \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible.

- D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert  $U \subset W \subset \mathbb{R}^3$  tel que  $g|_U$  soit un difféomorphisme sur son image  $V = g(U)$ . On pose  $\phi := g|_U : U \rightarrow V$ .

## Sous-variétés

- On a

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) \in V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) &\iff h(x, y, z) = a \\ &\quad \text{et } (x, y, z) \in U \\ &\iff (x, y, z) \in S = h^{-1}(a) \\ &\quad \text{et } (x, y, z) \in U \\ &\iff (x, y, z) \in U \cap S \end{aligned}$$

- Autrement dit  $\phi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$  i. e.  $S$  est une sous-variété de dimension deux de  $\mathbb{R}^3$ . □

**Application : la sphère (toujours et encore).**– Puisque

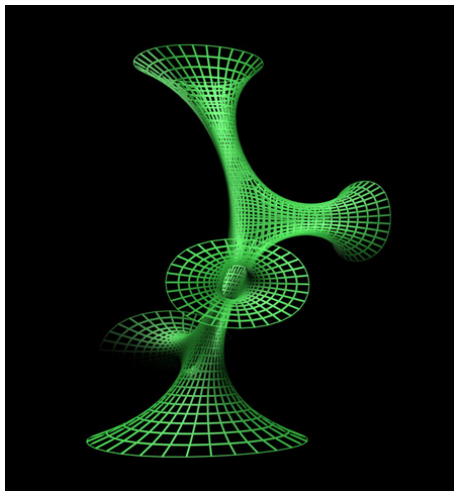
$$h : (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

est une submersion de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $S^2 = h^{-1}(0)$ , on déduit du théorème que  $S^2$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ .





# Architecture et sous-variétés



# Architecture et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

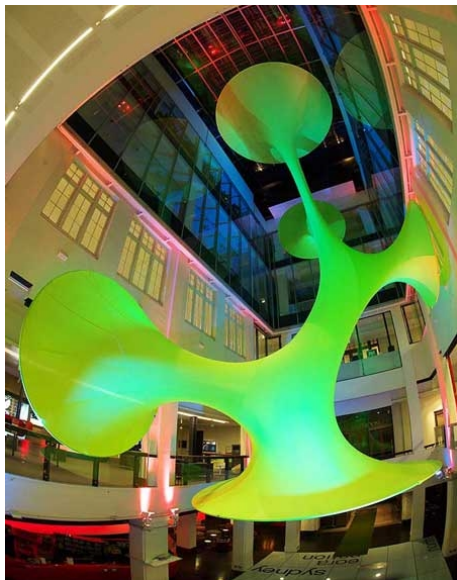
Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?



# Architecture et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?



# Architecture et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?



# Architecture et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël !



# Architecture et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?



# Architecture et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?



# Architecture et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?





# Sculptures et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?



Robert Longhurst

# Sculptures et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?



# Sculptures et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?



# Sculptures et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?



# Sculptures et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?



# Sculptures et sous-variétés

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

Hermann  
Weyl

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?



# Difféomorphismes

**Définition.**— On appelle  $C^k$ -DIFFÉOMORPHISME LOCAL,  $k \geq 1$  (ou encore APPLICATION ÉTALE) toute application de classe  $C^k$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et dont la différentielle est inversible en tout point.

**Exemple 1.**— L'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

est un  $C^\infty$ -difféomorphisme local puisque  $d\phi_x = \phi'(x)dx = 2xdx$ .

# Difféomorphismes

## Exemple 2.– L'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z = x + iy &\longmapsto z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy \end{aligned}$$

est un  $C^\infty$ -difféomorphisme local.

- En effet la matrice de la différentielle  $d\phi_{(x,y)}$  vaut

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

et son déterminant vaut  $4(x^2 + y^2) > 0$ .



**Exemple 3.**– L'application

$$\begin{aligned} \phi : ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) &\longmapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{aligned}$$

est un  $C^\infty$ -difféomorphisme local.

- En effet la matrice de la différentielle  $d\phi_{(\rho, \theta)}$  dans la base des coordonnées est

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix},$$

et son déterminant vaut  $\rho > 0$ .

# Difféomorphismes

**Exercice.**– Montrer qu'un difféomorphisme local  $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est une APPLICATION OUVERTE : l'image de tout ouvert de  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

- Un difféomorphisme local injectif est un homéomorphisme sur son image puisque, dire que  $\phi$  est ouverte, c'est dire que  $\phi^{-1}$  est continue.
- En fait on a plus, une application directe du TIL montre le résultat suivant :

**Corollaire (Théorème d'inversion globale).**– *Soit  $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un  $C^k$ -difféomorphisme local,  $k \geq 1$ . Si  $\phi$  est injectif alors  $\phi$  est un  $C^k$ -difféomorphisme sur son image.*

## Difféomorphismes

**Proposition.**— Soit  $S$  une  $C^k$ -sous-variété de dimension 2 ( $k \geq 1$ ) de  $\mathbb{R}^3$  et soient  $f_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow S$  et  $f_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow S$  deux immersions de classe  $C^k$  injectives alors

$$f_2^{-1} \circ f_1 : \mathcal{U}_1 \cap f_1^{-1}(f_2(\mathcal{U}_2)) \rightarrow \mathcal{U}_2 \cap f_2^{-1}(f_1(\mathcal{U}_1))$$

est un  $C^k$ -difféomorphisme.

- Ce résultat clé est manquant dans la théorie des surfaces paramétrées. En effet, deux paramétrisations régulières et injectives

$$f_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad f_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

peuvent avoir le même support  $S$  sans que  $f_2^{-1} \circ f_1$  soit un difféomorphisme.

- Dans ce cas, la proposition implique que ce support n'est pas une sous-variété.

# Difféomorphismes

**Contre-exemple.**— Soient

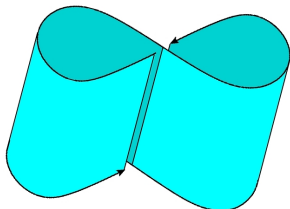
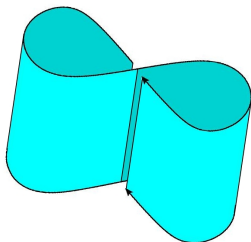
$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto \left( \frac{u + u^3}{1 + u^4}, \frac{u - u^3}{1 + u^4}, v \right)$$

et

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto \left( \frac{u + u^3}{1 + u^4}, -\frac{u - u^3}{1 + u^4}, v \right)$$



# Difféomorphismes

- On a

$$f_2^{-1} \circ f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(u, v) \longmapsto \begin{cases} (u^{-1}, v) & \text{si } u \neq 0 \\ (0, v) & \text{sinon.} \end{cases}$$

qui n'est même pas continue.

**Démonstration.**— On suppose  $f_1(\mathcal{U}_1) \cap f_2(\mathcal{U}_2) \neq \emptyset$  sinon, il n'y a rien à démontrer.

- Soit  $p \in f_1(\mathcal{U}_1) \cap f_2(\mathcal{U}_2)$ . Puisque  $S$  est une sous-variété, il existe  $U$  contenant  $p$  et un difféomorphisme  $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tel que

$$\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

# Difféomorphismes

- Les composées  $\phi \circ f_1$  et  $\phi \circ f_2$  sont des immersions injectives de  $f_1^{-1}(U \cap S)$  et  $f_2^{-1}(U \cap S)$  dans  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ , autrement dit, des difféomorphismes locaux injectifs.
- Ce sont donc des difféomorphismes sur leurs images. Il en est donc de même de

$$f_2^{-1} \circ f_1 = (\phi \circ f_2)^{-1} \circ (\phi \circ f_1).$$



# Hermann Weyl (1885-1955)

CM-S3 :  
Sous-variétés

V. Borrelli

Sous-variétés

Les  
sous-variétés  
IRL

Difféomor-  
phismes

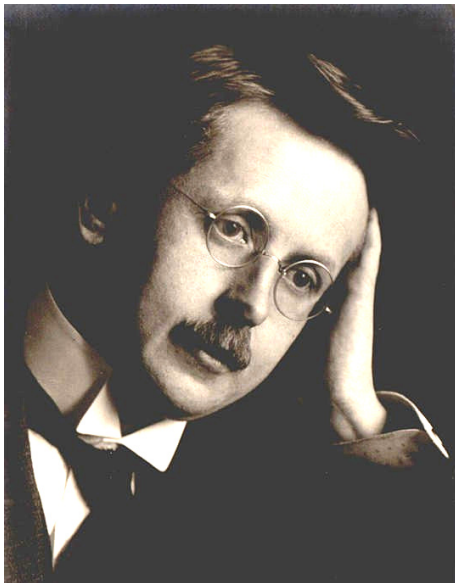
**Hermann  
Weyl**

Espaces  
tangents

Hassler  
Whitney

Orientation

Joyeux Noël ?



# Hermann Weyl (1885-1955)

- Un des mathématiciens les plus influents du XXème siècle. Ses contributions couvrent un large spectre depuis les fondements des mathématiques jusqu'à l'analyse harmonique en passant par la théorie des nombres, la théorie des représentations et la géométrie.
- Il fournit un fondement rigoureux et unifié à la théorie des surfaces de Riemann. Il dégage la notion de surface topologique.
- En géométrie riemannienne, il met en lumière l'importance de la partie sans trace du tenseur de courbure que l'on appelle désormais le *tenseur de Weyl*. Ce tenseur a une importance considérable dans l'étude des *propriétés conformes*.



# Hermann Weyl (1885-1955)

- Il est également physicien théoricien. Il a, entre autres, cherché à unifier la Relativité Générale avec l'électromagnétisme. À cette occasion, il introduit la notion de *jauge* et élabore la première *théorie de jauge*.
- Il propose une équation - dite *équation de Weyl* - pour décrire le comportement des fermions de masse nulle. Un fermion est une particule dont le spin est demi-entier. Un fermion de masse nulle est désormais appelé *fermion de Weyl*.
- Aucune des particules du modèle standard n'est un fermion de Weyl mais certains matériaux présentent des quasiparticules se comportant comme des fermions de Weyl, on nomme ces matériaux *semi-métaux de Weyl*.

# Hermann Weyl (1885-1955)

- Hermann Weyl a d'abord travaillé à l'université de Göttingen. Il y cotoie David Hilbert (son directeur de thèse) et Felix Klein.
- Puis il obtient un poste à l'École Polytechnique Fédérale de Zurich. Son intérêt pour la physique y est alors magnifié par sa rencontre avec Albert Einstein lui aussi en poste à l'EPFZ.
- La montée des fascismes le force à l'exil. Il obtient un poste à l'Institute of Advanced Studies à Princeton (EU). Il y retrouve Einstein mais aussi Gödel, Oppenheimer et Newmann.

## Hermann & Erwin



Erwin Schrödinger et Hermann Weyl

- En 1921, il rencontre le physicien Erwin Schrödinger, avec lequel il noue immédiatement et jusqu'à sa mort des liens d'amitié.

## Hermann & Hella



Hermann Weyl et Helena Joseph en 1913

- Il se marie en 1913 avec la philosophe Helena Joseph (proche du célèbre Edmund Husserl).
  - Il a une aventure avec Annemarie Schrödinger, la femme d'Erwin Schrödinger (dans le même temps Helena Joseph à également une aventure avec le physicien Paul Scherrer).
- Après la mort d'Helena, il se remarie avec la sculptrice Ellen Bär.

## Une citation



*« My work always tried to unite the truth with the beautiful,  
but when I had to choose one or the other, I usually chose  
the beautiful. »*

## Espaces tangents

**Définition.**— Soit  $S$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ . On dit qu'un vecteur  $X \in \mathbb{R}^n$  est TANGENT à  $S$  en un point  $p \in S$  s'il existe

$$\bar{\gamma} : ] - \epsilon, \epsilon[ \xrightarrow{C^1} S \subset \mathbb{R}^n$$

telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma'(0) = X$ . On note  $\overrightarrow{T_p S}$  l'ensemble des vecteurs tangents à  $S$  en  $p$ .

**Remarque.**— Cette définition est invariante par difféomorphisme. En effet, si  $\phi : V(p) \rightarrow \phi(V(p))$  est un difféomorphisme alors  $\Sigma = \phi(S \cap V(p))$  est une sous-variété et

$$\overrightarrow{T_{\phi(p)} \Sigma} = d\phi_p(\overrightarrow{T_p S})$$

puisque si  $\gamma : ] - \epsilon, \epsilon[ \rightarrow S$  alors  $\phi \circ \gamma : ] - \epsilon, \epsilon[ \rightarrow \Sigma$  et réciproquement.

## Espaces tangents

**Proposition.**— *Les vecteurs tangents en un point  $p \in S$  forment un sous-espace vectoriel de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ . Il est noté  $\overrightarrow{T_p S}$ .*

**Démonstration.**— Il suffit d'appliquer la remarque que nous venons de faire avec un difféomorphisme  $\phi$  linéarisant  $S$  au voisinage de  $p$  :

$$\phi(V(p) \cap S) = \phi(V(p)) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Ainsi la sous-variété  $\Sigma$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ .

- Il est alors trivial de vérifier que

$$T_{\phi(p)}\Sigma = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$$

ce qui montre que  $T_{\phi(p)}\Sigma$  est un sous-espace vectoriel.

# Espaces tangents

- On a

$$\overrightarrow{T_{\phi(p)}\Sigma} = d\phi_p(\overrightarrow{T_pS}) \iff \overrightarrow{T_pS} = (d\phi_p)^{-1}(\overrightarrow{T_{\phi(p)}\Sigma})$$

et puisque  $(d\phi_p)^{-1}$  est un isomorphisme linéaire et que  $T_{\phi(p)}\Sigma$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace  $\overrightarrow{T_pS}$  est lui-même un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m$ . □

**Définition.**– L'espace  $\overrightarrow{T_pS}$  est appelé ESPACE TANGENT en  $p$  est à  $S$ . L'espace affine  $T_pS = p + \overrightarrow{T_pS}$  est appelé l'ESPACE TANGENT AFFINE de  $S$  en  $p$ .



## Espaces tangents

**Proposition.**— Soit  $S$  une sous-variété de dimension  $m$  et  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$  une paramétrisation locale. Alors pour tout  $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U}$  on a

$$\overrightarrow{T_p S} = \text{Vect} \left( \frac{\partial f}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial f}{\partial u_m}(u) \right)$$

où  $p = f(u_1, \dots, u_m)$ .

**Démonstration.**— Soit  $\phi : V(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difféomorphisme linéarisant. L'application

$$\phi \circ f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$$

est un difféomorphisme local. On a noté, comme dans la démonstration précédente  $\Sigma = \phi \circ f(\mathcal{U})$ .

## Espaces tangents

- D'après l'invariance de l'espace tangent par difféomorphisme, on a donc

$$\overrightarrow{T_{\phi(p)}(\Sigma)} = d\phi_p \circ df_u(\overrightarrow{T_u\mathbb{R}^m})$$

c'est-à-dire

$$df_u(\overrightarrow{T_u\mathbb{R}^m}) = (d\phi_p)^{-1}(\overrightarrow{T_{\phi(p)}(\Sigma)}).$$

- Or, la démonstration précédente a montré que

$$\overrightarrow{T_p\hat{S}} = d\phi_{\phi(p)}^{-1}(\overrightarrow{T_{\phi(p)}\hat{\Sigma}})$$

il s'en suit que

$$df_u(\overrightarrow{T_u\mathbb{R}^m}) = \overrightarrow{T_p\hat{S}}.$$

## Espaces tangents

- Il est trivial que  $T_u\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$  et que par conséquent

$$df_u(\overrightarrow{T_u\mathbb{R}^m}) = \text{Vect} \left( \frac{\partial f}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial f}{\partial u_m}(u) \right)$$



**Proposition.**— Soit  $h = (h_1, \dots, h_q) : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  une submersion. On suppose que  $S = h^{-1}(a) \neq \emptyset$ . Alors, en tout point  $p \in S$ , on a

$$\overrightarrow{T_p S} = \bigcap_{i=1}^q \ker(dh_i)_p.$$

**Corollaire.**—  $\overrightarrow{T_p S} = \text{Vect}^\perp(\text{grad } h_1(p), \dots, \text{grad } h_q(p)).$

## Espaces tangents

**Démonstration de la proposition.**– Si

$$\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \longrightarrow S$$

alors  $h \circ \gamma = 0$  ce qui implique en  $t = 0$

$$dh_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = 0.$$

• Notons  $p = \gamma(0)$ . On a donc

$$\overrightarrow{T_p S} \subset \ker dh_p.$$

• Puisque  $h$  est une submersion, la dimension de  $\ker dh_p$  est  $m$ . C'est aussi la dimension de  $S$ . On en déduit l'égalité

$$\overrightarrow{T_p S} = \ker dh_p.$$

• On conclut en remarquant que

$$\ker dh_p = \bigcap_{i=1}^q \ker (dh_i)_p.$$

# Espaces tangents

**Démonstration du corollaire.**– Par définition du vecteur gradient

$$\forall i \in \{1, \dots, q\}, \quad (dh_i)_p(\cdot) = \langle \text{grad } h_i(p), \cdot \rangle$$

donc

$$\forall i \in \{1, \dots, q\}, \quad \ker(dh_i)_p = \text{Vect}^\perp(\text{grad } h_i(p)).$$

• Ainsi

$$\begin{aligned} \ker dh_p &= \bigcap_{i=1}^q \ker(dh_i)_p = \bigcap_{i=1}^q \text{Vect}^\perp(\text{grad } h_i(p)) \\ &= \text{Vect}^\perp(\text{grad } h_1(p), \dots, \text{grad } h_q(p)) \end{aligned}$$



# Espaces tangents

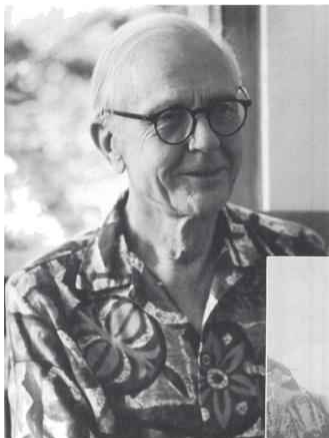
**Définition.**— Soit  $S$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ . On définit l'ESPACE TANGENT GLOBAL  $TS$  de  $S$  par

$$TS := \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in S, v \in \overrightarrow{T_p S}\}.$$

**Proposition (admise).**—  $TS$  est une sous-variété de dimension  $2m$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Remarque importante.**— En général, l'espace tangent global n'est pas isomorphe au produit  $S \times \mathbb{R}^m$ . Par exemple,  $TS^2$  n'est pas isomorphe à  $S^2 \times \mathbb{R}^2$ . Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de la sphère chevelue* et il n'est pas au programme.

# Hassler Whitney (1907-1989)



Hassler Whitney in the 1970s  
(Photograph by Sally Whitney)

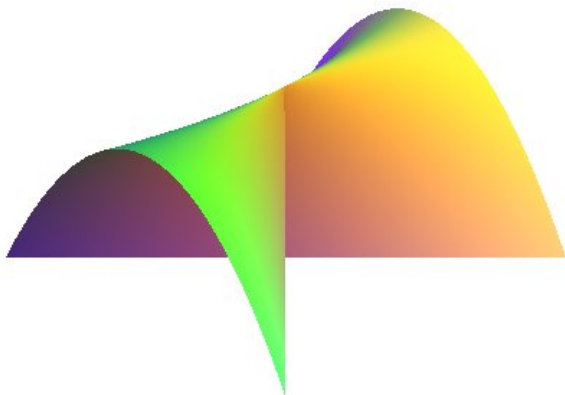


## Hassler Whitney (1907-1989)

- Mathématicien américain, un des fondateurs de la théorie des singularités et figure incontournable de l'histoire de la topologie différentielle.
- Le *théorème de plongement de Whitney* montre que toute variété peut-être vue comme une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ .
- Deux autres résultats célèbres : en théorie des fibrés (classes de Stiefel-Whitney) et en théorie des singularités (le parapluie de Whitney).
- Grimpeur remarquable, il réalise avec son cousin Bradley Gilman la première ascension du *Whitney-Gilman ridge* (sans piton et sans protection)
- Se marie pour la troisième fois à l'âge de 79 ans...



# Le parapluie de Whitney



$$x = uv, y = u, z = v^2.$$

# Whitney-Gilman ridge



*Sans piton, sans protection...*

# Orientation

- On travaille désormais dans l'espace euclidien  $\mathbb{E}^3$  que l'on suppose orienté.

**Définition.**— On dit qu'une sous-variété de dimension deux  $S \subset \mathbb{R}^3$  est ORIENTABLE si existe une application normale

$$n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

continue. Une sous-variété orientable est ORIENTÉE lorsque l'on a choisi l'une des deux applications normales unitaires pour induire une orientation sur tous les plans tangents de  $S$ .

- L'orientation induite est la suivante : soit  $p \in S$ , une base  $(X, Y)$  de  $\overrightarrow{T_p S}$  est dite directe si  $(X, Y, n(p))$  est directe dans  $\mathbb{E}^3$ .

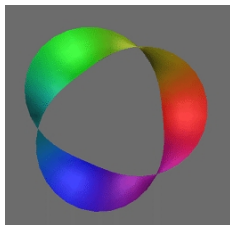
## Orientation

**Exemple 1.**– La sphère est orientable. Prendre par exemple  $n(p) = p$ .

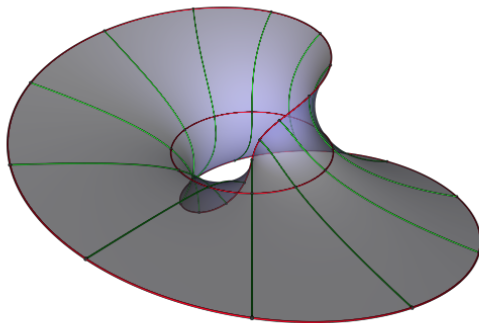
**Exemple 2.**– Le ruban de Möbius  $M = f(]0, 1[ \times ]0, 2\pi])$  est une sous-variété de dimension deux qui n'est pas orientable.

$$f : ]0, 1[ \times ]0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \theta) \longmapsto \begin{pmatrix} (1 + r \cos \frac{\theta}{2}) \cos \theta \\ (1 + r \cos \frac{\theta}{2}) \sin \theta \\ r \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

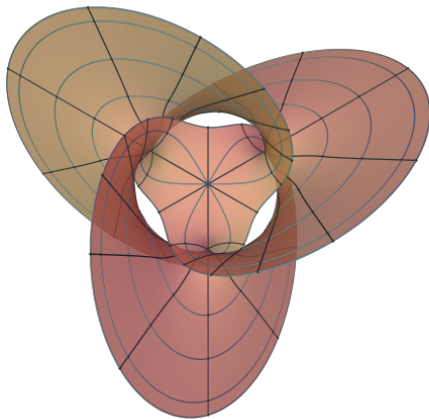


# Orientation



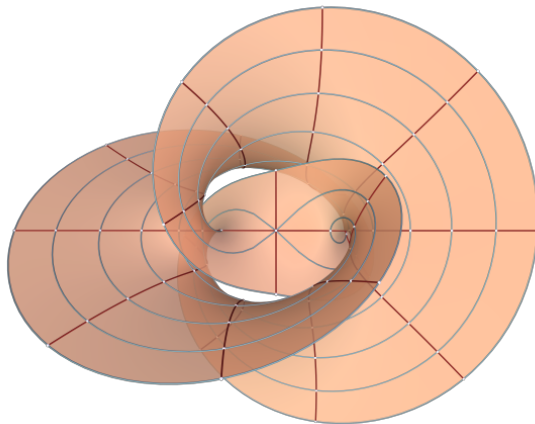
*La surface de Möbius-Meeks*

# Orientation



*La surface de Kusner*

# Orientation



*La surface de Lopez*

# Orientation

**Définition.**— Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  orientée et  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$  une immersion injective. On dit que  $f$  RESPECTE L'ORIENTATION si elle envoie l'orientation canonique de  $\mathbb{R}^2$  sur celle de  $S$ .

- Supposons que  $n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$  soit l'application normale qui oriente  $S$  et que l'orientation canonique de  $\mathbb{R}^2$  soit donnée par  $(e_u, e_v)$ . Alors  $f$  respecte l'orientation si en tout point  $p = f(u, v)$ , on a

$$\frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}(u, v) = n(p).$$



## Orientation

**Théorème.**— Soient  $h : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une submersion et  $a \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $h^{-1}(a) \neq \emptyset$  alors  $S = h^{-1}(a)$  est sous-variété de dimension deux orientable.

**Démonstration.**— Une normale unitaire est donnée par

$$n(p) = \frac{\text{grad } h}{\|\text{grad } h\|}(p).$$



- Autrement dit, on ne peut pas simplifier la définition des sous-variétés en les caractérisant comme le lieu des zéros des submersions  $h : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , on éliminerait toutes les sous-variétés non orientables !

# Orientation

**Une remarque.**— Un changement d'orientation transforme l'endomorphisme de Weingarten, la seconde forme fondamentale, les courbures normales et la courbure moyenne en leurs opposés. En revanche la première forme fondamentale et la courbure de Gauss restent inchangées.

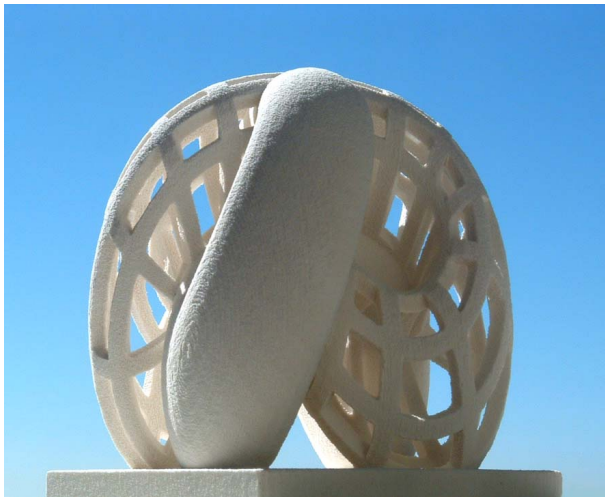
# Joyeux Noël ?



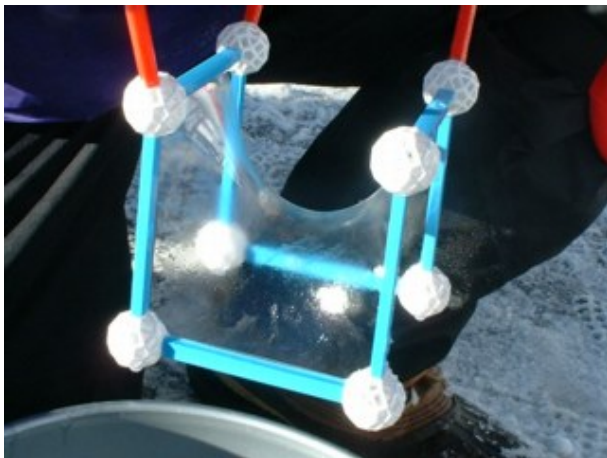
# Joyeux Noël ?



# Joyeux Noël ?



# Joyeux Noël ?



# Joyeux Noël ?



# Joyeux Noël ?

