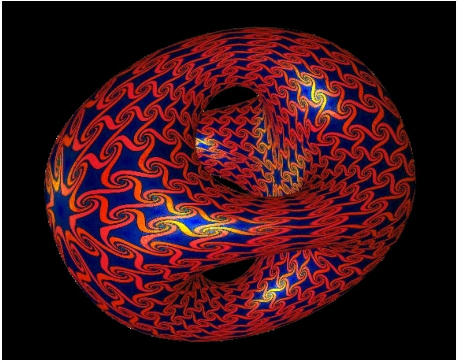
CM-S5 : Sous-variétés

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Une sous-variété de genre trois

Sous-variétés

Définition.– Une partie $S \subset \mathbb{R}^n$ est une C^k-SOUS-VARIÉTÉ DE DIMENSION m DE $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$ si pour tout $p \in S$, il existe un voisinage ouvert U de p dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un C^k-difféomorphisme $\phi : U \longrightarrow V$ tel que

$$\phi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Exemple : la sphère.– Montrons que

$$\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{E}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

une sous-variété de dimension 2.

• Soit $p = (x,y,z) \in \mathbb{S}^2$, on note $\pi_p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow Vect(p)^\perp$ la projection orthogonale et U la boule ouverte de centre p et de rayon 1. On note encore L n'importe quel isomorphisme vectoriel de $\mathbb{R}^3$ tel que $L(Vect(p)^\perp) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Sous-variétés

• On pose

$$\begin{array}{rccc} \phi : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (L \circ \pi_p(x,y,z), x^2+y^2+z^2-1) \end{array}$$

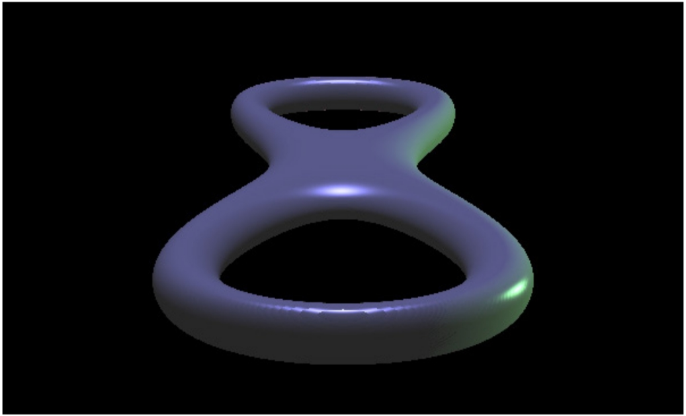
• Il est facile (mais fastidieux !) de vérifier que ϕ est un difféomorphisme de U sur son image $V = \phi(U)$.

• En revanche, la propriété

$$\phi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$$

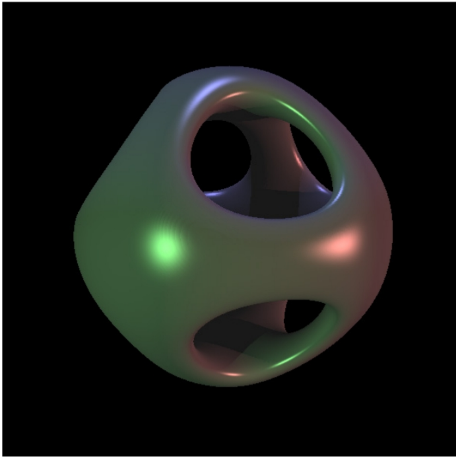
est immédiate.

Sous-variétés



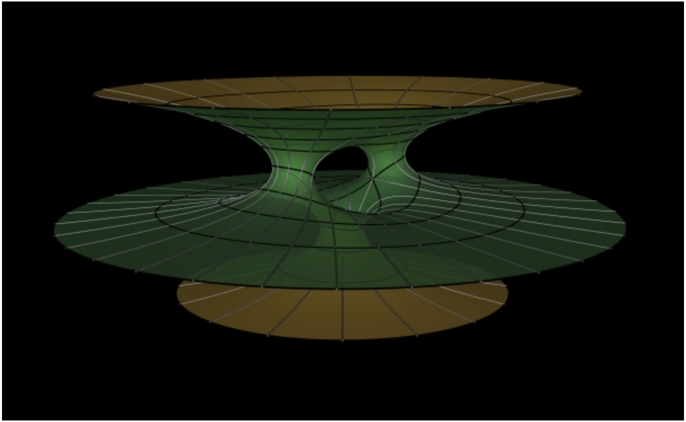
Un exemple de sous-variété : le tore à deux trous ou « bretzel »

Sous-variétés



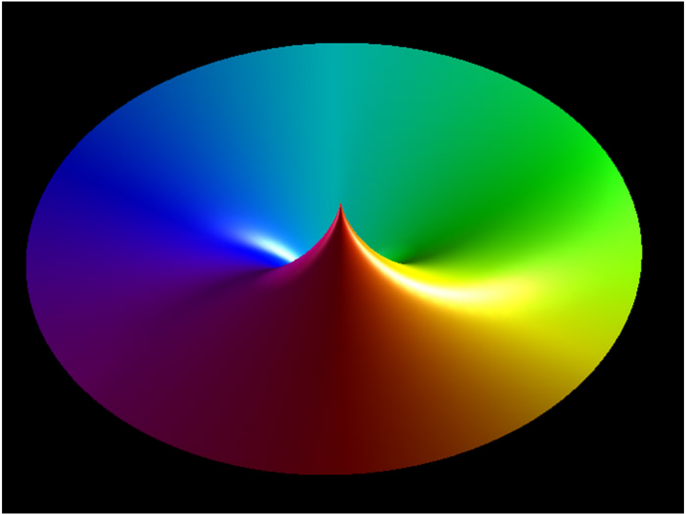
Un autre exemple de sous-variété : la surface « orthocercles »

Sous-variétés



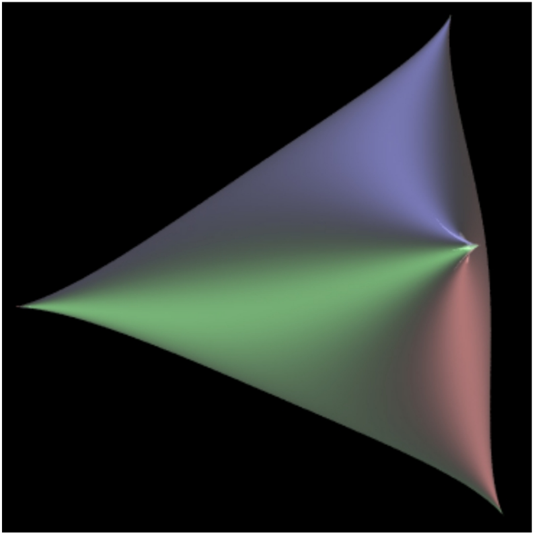
Encore un exemple de sous-variété : la surface de Costa

Sous-variétés



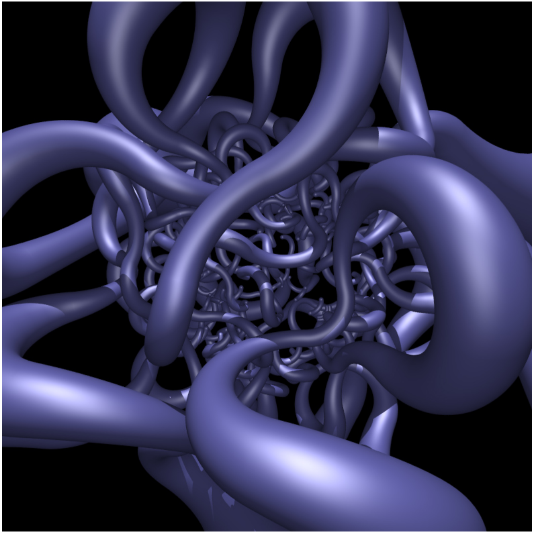
Un contre-exemple : ceci n'est pas une sous-variété

Sous-variétés



Ni ceci !

Sous-variétés



Une sous-variété ?

Sous-variétés

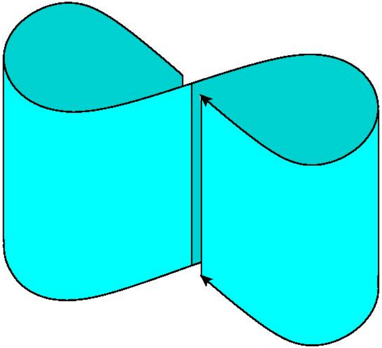
Mise en garde.– Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière et injective, en général $f(\mathcal{U})$ n'est pas une sous-variété.

• **Exemple.–** Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \left(\dfrac{u+u^3}{1+u^4}, \dfrac{u-u^3}{1+u^4}, v\right) \end{array}$$

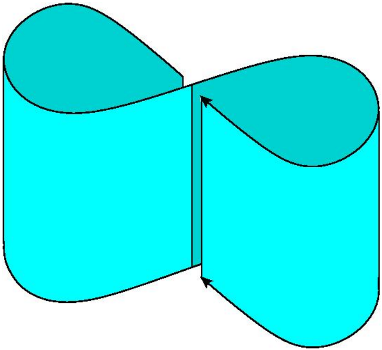
• On vérifie aisément que f est injective et régulière et que, de plus, l'image $S = f(\mathbb{R}^2)$ est un cylindre de base une lemniscate de Bernoulli.

Sous-variétés



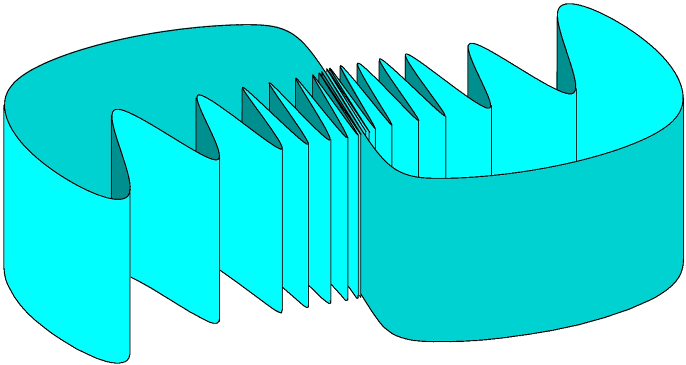
• Soit U une boule de centre $p = f(0, v)$ et de rayon petit. L'intersection $U \cap S$ est homéomorphe à une union de deux plans sécants. L'espace S ne peut être une sous-variété.

Sous-variétés



• Le support $S = f(\mathcal{U})$ de $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ régulière et injective est une sous-variété si f s'étend en un difféomorphisme de $\mathcal{U} \times]-\epsilon, \epsilon[$ sur un voisinage de S dans $\mathbb{R}^3$.

Sous-variétés



Autre exemple de support de surface paramétrée régulière et injective qui n'est pas une sous-variété

Sous-variétés

Définition.– On dit que $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une IMMERSION de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$ si, en tout point $p \in \mathcal{U}$, la différentielle $df_p : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est injective.

• Notons que nécessairement $m \leq n$.

Exemple 1.– Si $m = 2$ et $n = 3$ les immersions de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^3$ sont précisément les surfaces paramétrées $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ régulières.

Exemple 2.– Si $m = 1$ et $n = 3$ les immersions de l'intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}^3$ sont précisément les courbes paramétrées $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ régulières.

• On a constaté que l'image d'un ouvert par une immersion injective n'est pas nécessairement une sous-variété.

Sous-variétés

• En revanche cette image est *localement* une sous-variété que f soit injective ou non.

Théorème.– *Soit* $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une immersion* C^k, $k \geq 1$, *et* $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$. *Alors, il existe un ouvert* $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ *de* (u_0, v_0) *tel que* $S_0 = f(\mathcal{U}_0)$ *soit une* C^k*-sous-variété de dimension m.*

Sous-variétés

• **Démonstration.–** Pour fixer les idées, on suppose $m = 2$ et $n = 3$ (sachant que les arguments présentés se généralisent trivialement). Soit (f_1, f_2, f_3) les composantes de f. Puisque $df_{(u_0,v_0)}$ est de rang deux, et quitte à permutter les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$, on peut supposer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

est inversible.

• Soit

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathcal{U} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v, w) & \longmapsto & (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v) + w) \end{array}$$

Sous-variétés

• La matrice jacobienne de g en (u_0, v_0) est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}(u_0, v_0) & 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial v}(u_0, v_0) & 0 \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial f_3}{\partial v}(u_0, v_0) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est donc inversible.

• D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage $V \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ de $(u_0, v_0, 0)$ tel que $g_{|V}$ soit un difféomorphisme sur son image $U = g(V)$. On pose $\phi = g_{|V}^{-1} : U \longrightarrow V$.

Sous-variétés

- Soit $\mathcal{U}_0 = V \cap (\mathcal{U} \times \{0\})$. Puisque $V \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, on a

$$\mathcal{U}_0 = V \cap (\mathcal{U} \times \{0\}) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

- Soit $S_0 = f(\mathcal{U}_0)$. On a

$$g(\mathcal{U}_0) = S_0$$

puisque

$$\forall\, (u, v) \in \mathcal{U}_0, \quad g(u, v, 0) = f(u, v).$$

Donc $\phi(S_0) = \mathcal{U}_0 = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$

- Bien sûr $S_0 \subset U = g(V)$ donc $S_0 = S_0 \cap U$ et finalement

$$\phi(U \cap S_0) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

L'image S_0 est donc bien une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. $\square$

Sous-variétés

Proposition.– *Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension m et $p \in S$. Alors il existe un voisinage U de p et une immersion injective $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ dont l'image est $S \cap U$.*

• Autrement dit, localement, on peut toujours paramétrer de façon régulière et injective une sous-variété, le paramétrage régulier étant l'immersion f de la proposition. La théorie des surfaces paramétrées va donc pouvoir se recycler dans celle des sous-variétés.

Démonstration.– Par définition, à chaque point $p \in S$ d'une sous-variété il existe un voisinage ouvert U de p dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un C^k-difféomorphisme $\phi : U \longrightarrow V$ tel que

$$\phi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Il suffit de poser $f = \phi^{-1}_{|V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})}$. □

Sous-variétés

Définition.– On dit que $h : U \subset \mathbb{R}^m \stackrel{C^k}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$ est une C^k-SUBMERSION de U dans $\mathbb{R}^n$ ($k \geq 1$) si, en tout point $p \in \mathcal{U}$, la différentielle $df_p : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est surjective.

- Notons que nécessairement $m \geq n$.

Exemple 1.– La projection orthogonale $\mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^1$.

Exemple 2.– La fonction *distance au carré*

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{E}^3 \setminus \{O\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & x^2 + y^2 + z^2. \end{array}$$

Exemple 3.– Plus généralement $h : U \subset \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une submersion ssi, pour tout $p \in U$, $\mathrm{grad}_p\, h \neq 0$.

Sous-variétés

Théorème.– *Soit $h : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une C^k-submersion, $k \geq 1$, et a un point de $\mathbb{R}$. On suppose que $h^{-1}(a) \neq \emptyset$, alors*

$$S = h^{-1}(a)$$

est une C^k-sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.– Pour fixer les idées, on suppose $n = 3$. Soit $p \in h^{-1}(a)$. Puisque dh_p est non nul, quitte à permuter les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$, on peut supposer

$$\frac{\partial h}{\partial z}(p) \neq 0.$$

- On pose

$$\begin{array}{cccc} g : & W & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,h(x,y,z)-a) \end{array}$$

Sous-variétés

• La matrice jacobienne de g en p est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(p) & \dfrac{\partial h}{\partial y}(p) & \dfrac{\partial h}{\partial z}(p) \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible.

• D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert $U \subset W \subset \mathbb{R}^3$ tel que $g_{|U}$ soit un difféomorphisme sur son image $V = g(U)$. On pose $\phi := g_{|U} : U \longrightarrow V$.

Sous-variétés

• On a

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z) \in V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \quad &\Longleftrightarrow \quad h(x,y,z) = a \\
&\qquad\ \text{et } (x,y,z) \in U \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,y,z) \in S = h^{-1}(a) \\
&\qquad\ \text{et } (x,y,z) \in U \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,y,z) \in U \cap S
\end{aligned}$$

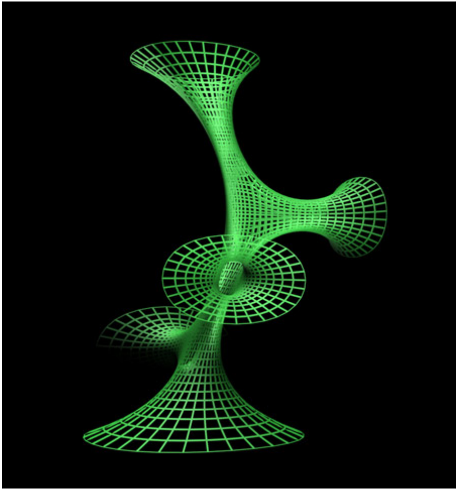
• Autrement dit $\phi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ i. e. S est une sous-variété de dimension deux de $\mathbb{R}^3$. $\square$

Application : la sphère (toujours et encore).– Puisque

$$h : (x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

est une submersion de $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ dans $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{S}^2 = h^{-1}(0)$, on déduit du théorème que $\mathbb{S}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Architecture et sous-variétés



Architecture et sous-variétés

Architecture et sous-variétés

Architecture et sous-variétés

Architecture et sous-variétés

Architecture et sous-variétés

Architecture et sous-variétés

Architecture et sous-variétés

Difféomorphismes

Définition.– On appelle C^k-DIFFÉOMORPHISME LOCAL, $k \geq 1$ (ou encore APPLICATION ÉTALE) toute application de classe C^k d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et dont la différentielle est inversible en tout point.

Exemple 1.– L'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^*_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

est un C^∞-difféomorphisme local puisque $d\phi_x = \phi'(x)dx = 2xdx$.

Difféomorphismes

Exemple 2.– L'application

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z = x + iy & \longmapsto & z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy \end{array}$$

est un C^∞-difféomorphisme local.

• En effet la matrice de la différentielle $d\phi_{(x,y)}$ vaut

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

et son déterminant vaut $4(x^2 + y^2) > 0$.

Difféomorphismes

Exemple 3.– L'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : &]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\rho,\theta) & \longmapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array}$$

est un C^∞-difféomorphisme local.

• En effet la matrice de la différentielle $d\phi_{(\rho,\theta)}$ dans la base des coordonnées est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix},$$

et son déterminant vaut $\rho > 0$.

Difféomorphismes

Exercice.– Montrer qu'un difféomorphisme local $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une APPLICATION OUVERTE : l'image de tout ouvert de U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

• Un difféomorphisme local injectif est un homéomorphisme sur son image puisque, dire que ϕ est ouverte, c'est dire que ϕ^{-1} est continue.

• En fait on a plus, une application directe du TIL montre le résultat suivant :

Corollaire (Théorème d'inversion globale).– *Soit $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un C^k-difféomorphisme local, $k \geq 1$. Si ϕ est injectif alors ϕ est un C^k-difféomorphisme sur son image.*

Difféomorphismes

Proposition.– *Soit S une C^k-sous-variété de dimension 2 ($k \geq 1$) de $\mathbb{R}^3$ et soient $f_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow S$ et $f_2 : \mathcal{U}_2 \longrightarrow S$ deux immersions de classe C^k injectives alors*

$$f_2^{-1} \circ f_1 : \mathcal{U}_1 \cap f_1^{-1}(f_2(\mathcal{U}_2)) \longrightarrow \mathcal{U}_2 \cap f_2^{-1}(f_1(\mathcal{U}_1))$$

est un C^k-difféomorphisme.

• Ce résultat clé est manquant dans la théorie des surfaces paramétrées. En effet, deux paramétrisations régulières et injectives

$$f_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad f_2 : \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

peuvent avoir le même support S sans que $f_2^{-1} \circ f_1$ soit un difféomorphisme.

• Dans ce cas, la proposition implique que ce support n'est pas une sous-variété.

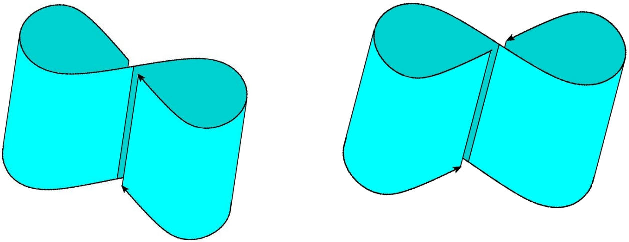
Difféomorphismes

Contre-exemple.– Soient

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \left(\dfrac{u+u^3}{1+u^4}, \dfrac{u-u^3}{1+u^4}, v\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \left(\dfrac{u+u^3}{1+u^4}, -\dfrac{u-u^3}{1+u^4}, v\right) \end{array}$$



Difféomorphismes

• On a

$$f_2^{-1}\circ f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (u^{-1},v) & \text{si } u\neq 0 \\ (0,v) & \text{sinon.} \end{array}\right. \end{array}$$

qui n'est même pas continue.

Démonstration.– On suppose $f_1(\mathcal{U}_1)\cap f_2(\mathcal{U}_2)\neq\emptyset$ sinon, il n'y a rien à démontrer.

• Soit $p\in f_1(\mathcal{U}_1)\cap f_2(\mathcal{U}_2)$. Puisque S est une sous-variété, il existe U contenant p et un difféomorphisme $\phi : U\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tel que

$$\phi(U\cap S)=\phi(U)\cap(\mathbb{R}^2\times\{0\}).$$

Difféomorphismes

• Les composées $\phi \circ f_1$ et $\phi \circ f_2$ sont des immersions injectives de $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, autrement dit, des difféomorphismes locaux injectifs.

• Ce sont donc des difféomorphismes sur leurs images. Il en est donc de même de

$$f_2^{-1} \circ f_1 = (\phi \circ f_2)^{-1} \circ (\phi \circ f_1).$$

$\square$

Espaces tangents, différentielles

Définition.– Soit S une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ est TANGENT À S en un point $p \in S$ s'il existe

$$\overline{\gamma} :]-\epsilon, \epsilon[\xrightarrow{C^1} S \subset \mathbb{R}^n$$

telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$.

Lemme (facile et admis).– *Les vecteurs tangents en un point $p \in S$ forment un espace vectoriel de dimension m. Il est noté $\overrightarrow{T_pS}$.*

Définition.– L'ESPACE TANGENT en p à S, noté T_pS, est l'ensemble des points P de $\mathbb{R}^n$ tel que $P - p$ soit dans $\overrightarrow{T_pS}$.

• Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière et injective et $p = f(u, v)$. L'espace tangent de f en (u, v) et l'espace tangent de S en p coïncident (choisir $\overline{\gamma} = f \circ \gamma$).

Espaces tangents, différentielles

Définition.– Soit S une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On définit l'ESPACE TANGENT GLOBAL TS de S par

$$TS := \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in S, v \in T_pS\}.$$

Proposition (admise).– *TS est une sous-variété de dimension $2m$ de $\mathbb{R}^{2n}$.*

Remarque importante.– En général, l'espace tangent global n'est pas isomorphe au produit $S \times \mathbb{R}^m$. Par exemple, $T\mathbb{S}^2$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de la sphère chevelue* et il n'est pas au programme.

Espaces tangents, différentielles

Définition.– Soient $p \in S$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant p et $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme qui redresse S :

$$\phi(U \cap S) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}.$$

On note $\mathcal{U} := \phi(U \cap S)$ puis $f = \phi^{-1}_{|\mathcal{U}}$ et (u, v) tel que $f(u, v) = p$. Une application $h : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite DE CLASSE C^k en p ($k \geq 1$) si $h \circ f$ est de classe C^k en (u, v).

• Cette définition ne dépend pas du choix du difféomorphisme qui redresse S. En effet, soient ϕ_1 et ϕ_2 deux tels difféomorphismes alors

$$f_1 = (\phi_1^{-1})_{|\mathcal{U}_1} \quad \text{et} \quad f_2 = (\phi_2^{-1})_{|\mathcal{U}_2}$$

sont deux immersions injectives et donc $f_2^{-1} \circ f_1$ est un C^k-difféomorphisme.

Espaces tangents, différentielles

• Puisque

$$\begin{aligned} h\circ f_1 &= h\circ(f_2\circ f_2^{-1})\circ f_1 \\ &= (h\circ f_2)\circ(f_2^{-1}\circ f_1) \end{aligned}$$

on déduit que $h\circ f_1$ est différentiable en (u,v) ssi $h\circ f_2$ est différentiable en $(f_1^{-1}\circ f_2)(u,v)$.

• Ceci montre également que $h : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^k en p si $h\circ f$ est de classe C^k en (u,v) où $f : \mathcal{U} \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ une immersion injective telle que $f(u,v) = p$

Exemple.– Soit S une C^2-sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Si elle existe, l'application normale $n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est de classe C^1.

• En effet, soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ est une immersion injective de classe C^2 alors $n\circ f = N$ et

$$N(u,v) = \pm\frac{f_u\wedge f_v}{\|f_u\wedge f_v\|}(u,v).$$

Espaces tangents, différentielles

Définition.– Soit $h : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On définit la DIFFÉRENTIELLE en $p \in S$ de h par

$$\forall X \in \overrightarrow{T_pS}, \quad dh_p(X) := d(h \circ f)_u(U)$$

où $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ est une immersion injective telle que $p = f(u)$, $u \in \mathcal{U}$ et U est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ tel que $df_u(U) = X$.

• Cette définition ne dépend pas de l'immersion injective f que l'on a choisi.

• En effet, soit $g : \mathcal{V} \longrightarrow S$ une autre immersion injective, soit $v \in \mathcal{V}$ un point tel que $g(v) = p$ et soit $V \in \mathbb{R}^m$ tel que $dg_v(V) = X$.

Espaces tangents, différentielles

• D'après la proposition $\varphi = g^{-1} \circ f$ est un difféomorphisme et on a $f = g \circ \varphi$. Puisque

$$X = dg_v(V) = df_u(U)$$

et que

$$df_u(U) = dg_v \circ d\varphi_u(U)$$

c'est que

$$V = d\varphi_u(U).$$

• Par conséquent

$$\begin{aligned} dh_p(X) &= d(h \circ f)_u(U) \\ &= d(h \circ g \circ \varphi)_u(U) \\ &= d(h \circ g)_{(u',v')} \circ d\varphi_u(U) \\ &= d(h \circ g)_v(V). \end{aligned}$$

Espaces tangents, différentielles

Application 1 : l'opérateur de Weingarten.– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une sous-variété de dimension 2. A partir d'une application normale unitaire $n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, on définit pour tout $p \in S$ l'opérateur de Weingarten

$$W_p = -dn_p : T_pS \longrightarrow T_pS.$$

Ses valeurs propres donnent les courbures principales de la sous-variété en p, puis leur demi-somme et leur produit, la courbure moyenne et la courbure de Gauss.

• Bien sûr tout ceci coïncide en un sens évident avec les mêmes courbures définies pour une surface paramétrée $f : \mathcal{U} \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$.

Espaces tangents, différentielles

Application 2 : l'application exponentielle.– Soient $p \in S$ et $v \in \overrightarrow{T_pS}$. La courbe paramétrée

$$t \longmapsto \overline{\gamma}(t) := exp_p(tv)$$

est la géodésique passant par $p = \overline{\gamma}(0)$ et telle que

$$\overline{\gamma}'(0) = v.$$

Soit

$$\begin{array}{rccc} \gamma : &]-\epsilon,\epsilon[& \longrightarrow & D(0,\epsilon) \subset \overrightarrow{T_pS} \\ & t & \longmapsto & tv \end{array}$$

Evidemment $\gamma(0) = 0$ et $\gamma'(0) = v$.

• On a $\overline{\gamma} = \exp_p \circ \gamma$, d'où

$$\overline{\gamma}'(0) = d(exp_p)_0(\gamma'(0))$$

par conséquent

$$d(exp_p)_0(v) = v.$$

Espaces tangents, différentielles

Proposition (en exo).– *Soient $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ et $p = f(u, v) \in S$. Si $df_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \overrightarrow{T_pS}$ est un isomorphisme alors f est un difféomorphisme local en p.*

• L'application exp_p est un difféomorphisme local en l'origine.

Définition.– Un voisinage $\mathcal{V} \subset S$ de $p \in S$ est dit NORMAL s'il est l'image $\mathcal{V} = exp_p(\mathcal{U})$ d'un voisinage $\mathcal{U} \subset \overrightarrow{T_pS}$ de O sur lequel $\exp_p$ est un difféomorphisme.

Sculptures et sous-variétés

Robert Longhurst

Sculptures et sous-variétés

Sculptures et sous-variétés

Sculptures et sous-variétés

Sculptures et sous-variétés

Sculptures et sous-variétés

Orientation

• On travaille désormais dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$ que l'on suppose orienté.

Définition.– On dit qu'une sous-variété de dimension deux $S \subset \mathbb{R}^3$ est ORIENTABLE si existe une application normale

$$n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

continue. Une sous-variété orientable est ORIENTÉE lorsque l'on a choisi l'une des deux applications normales unitaires pour induire une orientation sur tous les plans tangents de S.

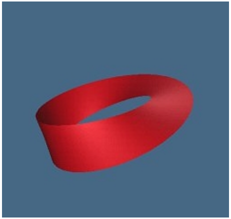
• L'orientation induite est la suivante : soit $p \in S$, une base (X, Y) de $\overrightarrow{T_pS}$ est dite directe si $(X, Y, n(p))$ est directe dans $\mathbb{E}^3$.

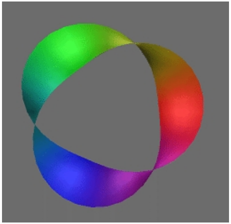
Orientation

Exemple 1.– La sphère est orientable. Prendre par exemple $n(p) = p$.

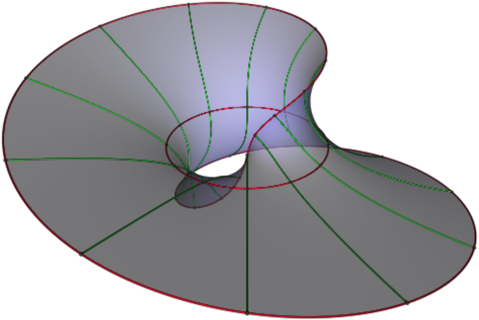
Exemple 2.– Le ruban de Möbius $M = f(]0,1[\times[0,2\pi])$ est une sous-variété de dimension deux qui n'est pas orientable.

$$\begin{array}{cccc} f &]0,1[\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \left(1 + r\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta \\ \left(1 + r\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta \\ r\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$



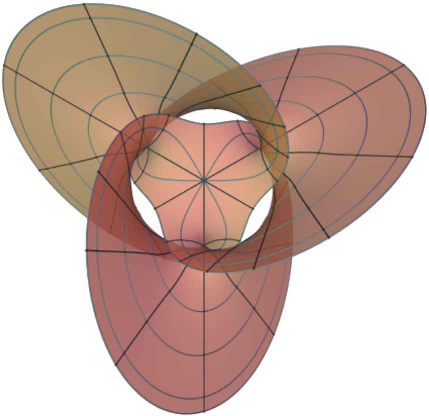


Orientation



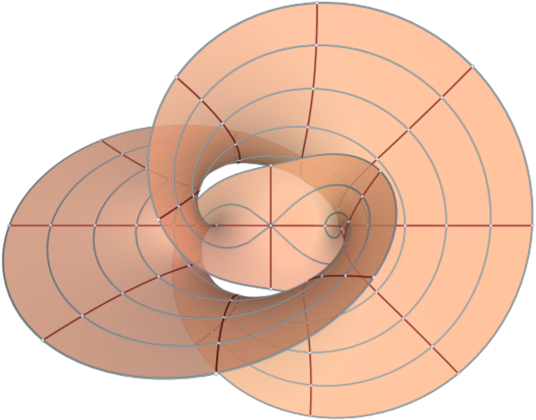
La surface de Möbius-Meeks

Orientation



La surface de Kusner

Orientation



La surface de Lopez

Orientation

Définition.– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ orientée et $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ une immersion injective. On dit que f RESPECTE L'ORIENTATION si elle envoie l'orientation canonique de $\mathbb{R}^2$ sur celle de S.

• Supposons que $n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ soit l'application normale qui oriente S et que l'orientation canonique de $\mathbb{R}^2$ soit donnée par (e_u, e_v). Alors f respecte l'orientation si en tout point $p = f(u,v)$, on a

$$\frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}(u,v) = n(p).$$

Orientation

Théorème.– *Soient* $h : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une submersion et* $a \in \mathbb{R}$. *On suppose que* $h^{-1}(a) \neq \emptyset$ *alors* $S = h^{-1}(a)$ *est sous-variété de dimension deux orientable.*

Démonstration.– Une normale unitaire est donnée par

$$n(p) = \frac{grad\ h}{\|grad\ h\|}(p).$$

$\square$

• Autrement dit, on ne peut pas simplifier la définition des sous-variétés en les caractérisant comme le lieu des zéros des submersions $h : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, on éliminerait toutes les sous-variétés non orientables !

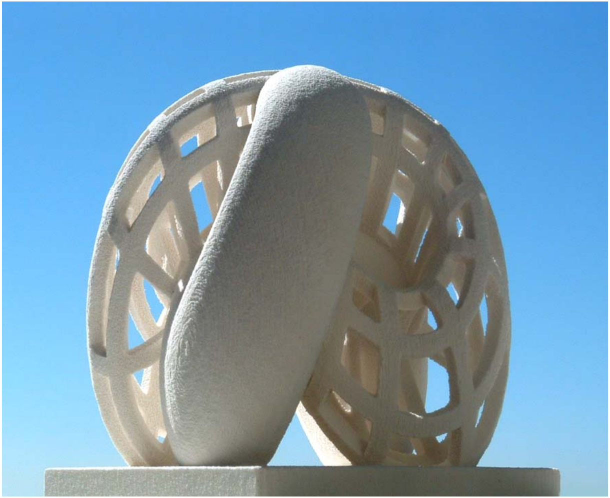
Orientation

Une remarque.– Un changement d'orientation transforme l'endomorphisme de Weingarten, la seconde forme fondamentale, les courbures normales et la courbure moyenne en leurs opposés. En revanche la première forme fondamentale et la courbure de Gauss restent inchangées.

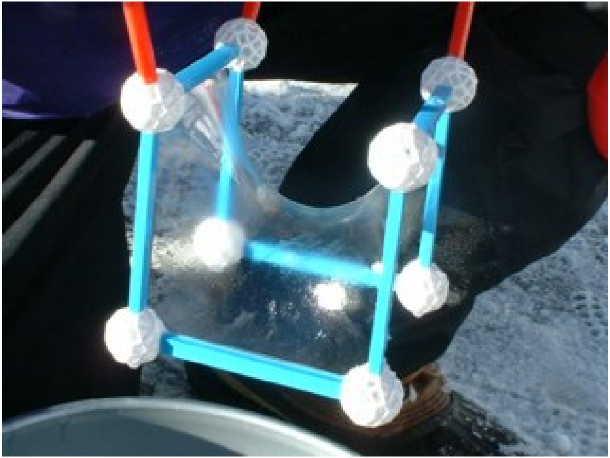
Joyeux Noël ?

Joyeux Noël ?

Joyeux Noël ?



Joyeux Noël ?



Joyeux Noël ?

Joyeux Noël ?