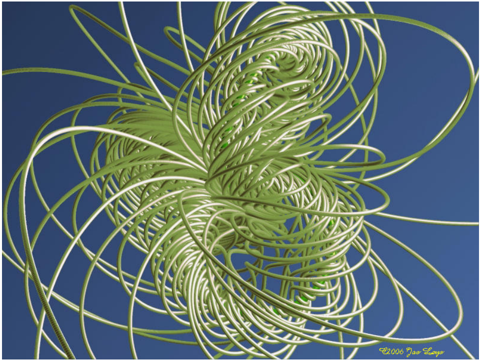
CM-S6 : La formule de Stokes

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Une trajectoire du flot horocyclique

Champs de vecteurs

Définition.– On appelle CHAMP DE VECTEURS toute application $X : U \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$.

• Soit $X = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3$. On pose

$$\begin{array}{rccc} L_X : & C^\infty(U) & \longrightarrow & C^\infty(U) \\ & f & \longmapsto & X_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + X_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{array}$$

Définition.– L'application L_X est appelée la DÉRIVATION ASSOCIÉE À X. Elle est aussi notée $X(f)$.

• La base canonique (e_1, e_2, e_3) est parfois notée $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ rendant ainsi plus visible l'action par dérivation de

$$X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2 + X_3\partial_3$$

sur $C^\infty(U)$.

Champs de vecteurs

• Soient $f \in C^\infty(U)$ et

$$X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2 + X_3\partial_3 \quad \text{et} \quad Y = Y_1\partial_1 + Y_2\partial_2 + Y_3\partial_3$$

alors

$$\begin{aligned} L_X(L_Y f) &= L_X\left(\sum_{i=1}^{3} Y_i\partial_i f\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} X_j\partial_j Y_i.\partial_i f + X_j Y_i \partial^2_{ij} f \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_Y(L_X f) &= L_Y\left(\sum_{i=1}^{3} X_i\partial_i f\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} Y_j\partial_j X_i.\partial_i f + Y_j X_i \partial^2_{ij} f \end{aligned}$$

Champs de vecteurs

- Par conséquent

$$L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f) = \sum_{i,j=1}^{3} (X_j \partial_j Y_i - Y_j \partial_j X_i) \partial_i f$$

- Posons

$$[X, Y] := \sum_{i=1}^{3} Z_i \partial_i \quad \text{où} \quad Z_i = \sum_{j=1}^{3} (X_j \partial_j Y_i - Y_j \partial_j X_i).$$

On vient de montrer que

$$L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X,Y]}.$$

Champs de vecteurs

Définition.– Le champ de vecteurs $[X, Y]$ est appelé le CROCHET de X et de Y.

Exemple 1.– Soient A et B deux matrices 3×3. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad X_A(x) = A(x) \quad \text{et} \quad X_B(x) = B(x).$$

Un calcul immédiat montre alors

$$[X_A, X_B] := (BA - AB)(x)$$

Champs de vecteurs

Exemple 2.– Soient

$$E_1 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3, \quad E_2 = x_1\partial_3 - x_3\partial_1, \quad E_3 = x_2\partial_1 - x_1\partial_2.$$

et soient

$$V = v_1 E_1 + v_2 E_2 + v_3 E_3, \quad W = w_1 E_1 + w_2 E_2 + w_3 E_3$$

avec $v_1, \ldots, w_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

• Dans la base (E_1, E_2, E_3) on a

$$[V, W] = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Champs de vecteurs

Identité de Jacobi.– *Soient X, Y, Z trois champs de vecteurs sur U alors*

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Démonstration.– Il suffit d'écrire les expressions algébriques. $\square$

• Si $\varphi : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme et X un champ de vecteurs, on note $\varphi_* X$ le champ de vecteur défini par

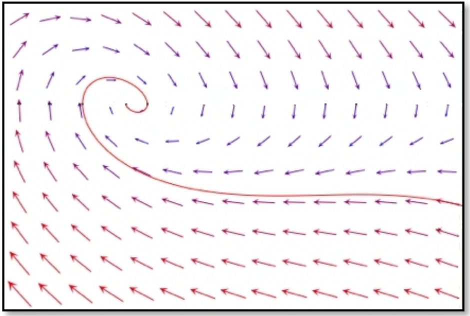
$$(\varphi_* X)(y) := d\varphi_x(X_x) \quad \text{où} \quad x = \varphi^{-1}(y).$$

Lemme.– *Soit $\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme alors*

$$\varphi_*[X, Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y].$$

Démonstration.– Un stupide calcul. $\square$

Champs de vecteurs



Définition.– On appelle TRAJECTOIRE ou COURBE INTÉGRALE d'un champ de vecteurs X sur $U \subset \mathbb{R}^3$ toute courbe $\gamma : I \longrightarrow U$ telle que

$$\forall t \in I, \quad \gamma'(t) = X_{\gamma(t)}.$$

Champs de vecteurs

Théorème.– *Soit X un champ de vecteurs sur $U \subset \mathbb{R}^3$ et $x \in U$. Alors il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une trajectoire $\gamma_x : I \longrightarrow U$ de X telle que $\gamma_x(0) = x$. De plus, si $\delta_x : J \longrightarrow U$ est une autre trajectoire telle que $\delta_x(0) = x$ alors γ_x et δ_x coïncident sur $I \cap J$.*

Démonstration.– L'équation définissant les courbes intégrales est une EDO. Les résultats classiques d'existence et d'unicité s'appliquent (rappelons que X est supposé C^1). $\square$

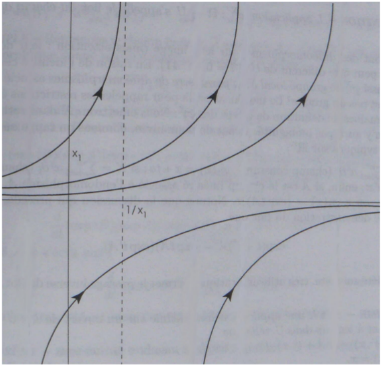
Remarque.– Même si X est défini sur $\mathbb{R}^3$, les trajectoires ne sont pas forcément définies sur tout $\mathbb{R}$.

Champs de vecteurs

Exemple.– Soit X défini sur $\mathbb{R}^3$ par $X_{(x_1,x_2,x_3)} := (x_1^2, 1, 0)$ alors la trajectoire passant par (x_1, x_2, x_3) en $t = 0$ ($x_1 > 0$) est

$$\gamma_x(t) = \left(\frac{x_1}{1 - tx_1}, t + x_2, x_3 \right).$$

Elle est définie sur $]-\infty, \frac{1}{x_1}[$.



Champs de vecteurs

• Soit I_x l'intervalle de définition maximal de γ_x, on pose

$$\Omega = \bigcup_{x \in U} I_x \times \{x\}.$$

Proposition (admise).– *L'ensemble* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R} \times U$ *qui contient* $\{0\} \times U$.

Pour une démonstration, consulter le chapitre 2, théorème 8 du cours *Équations Différentielles L3* de Julien Vovelle. Il est disponible sur sa page web.

Champs de vecteurs

• Une application du théorème d'inversion locale en dimension infinie montre que

$$(t, x) \longmapsto \gamma_x(t)$$

est de la même classe que X mais c'est non trivial.

Définition.– L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \Omega & \longrightarrow & U \\ & (t, x) & \longmapsto & \gamma_x(t) \end{array}$$

s'appelle le FLOT de X.

Champs de vecteurs

• Il est traditionnel d'écrire $\varphi_t(x)$ plutôt que $\varphi(t, x)$.

• L'unicité des solutions d'une EDO implique que $\varphi_t : U \longrightarrow \varphi_t(U)$ est un difféomorphisme.

• Mieux, l'EDO étant autonome, si $\gamma_x(t)$ est une trajectoire, il en est de même de $\gamma_x(t + a)$ quand cela a un sens. Par unicité

$$\gamma_x(t + a) = \gamma_{\gamma_x(a)}(t).$$

• Ceci s'écrit aussi

$$\varphi_{t+a}(x) = \varphi_t(\varphi_a(x)).$$

Propriété.– *Chaque fois que cela a un sens, on a*

$$\varphi_{t_1+t_2} = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2}.$$

Champs de vecteurs

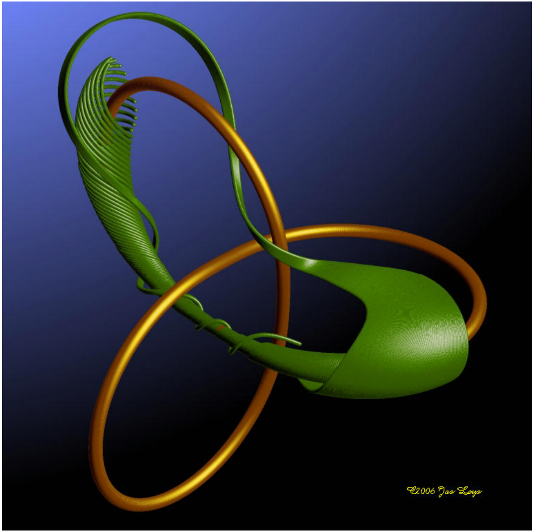
Exemple.– Soit $X_A(x) = A(x)$ où A est une matrice 3×3. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_t(x) = \exp(tA).x.$$

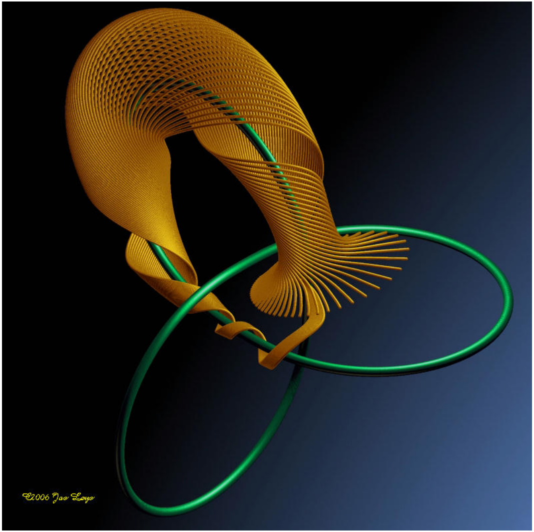
La propriété précédente énonce

$$exp(t_1 + t_2)A = exp(t_1 A)exp(t_2 A).$$

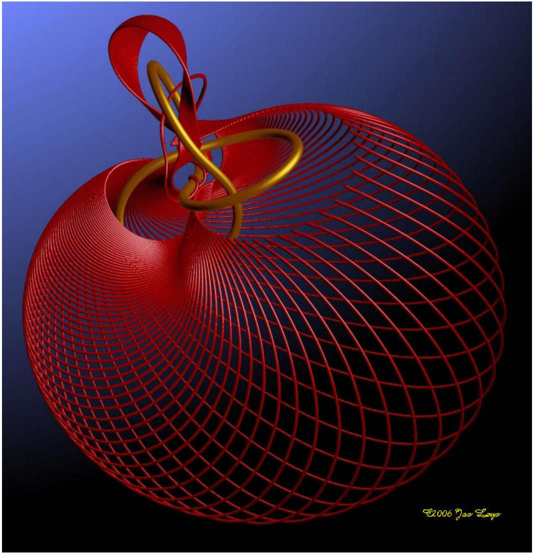
Champs de vecteurs



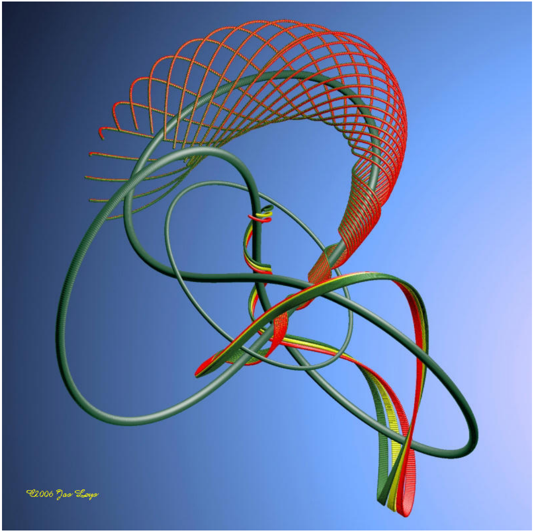
Champs de vecteurs



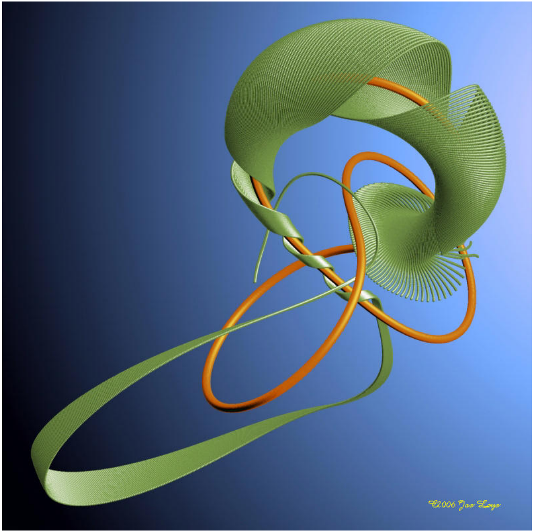
Champs de vecteurs



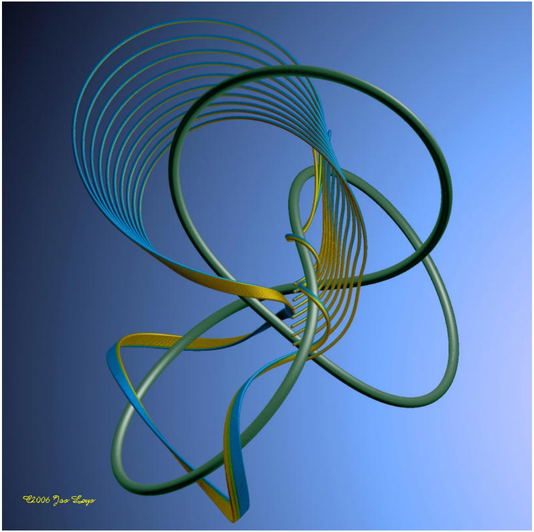
Champs de vecteurs



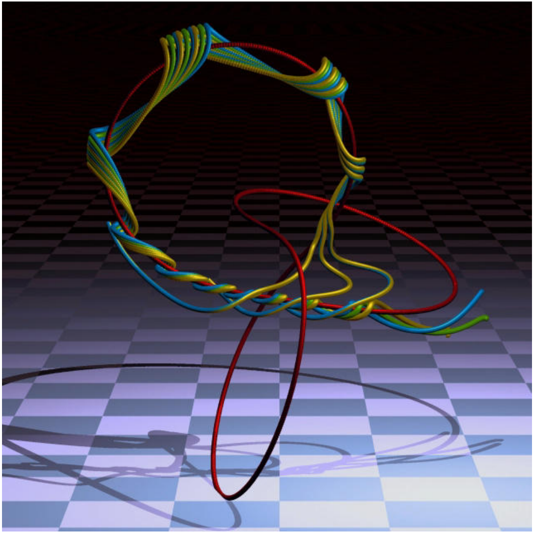
Champs de vecteurs



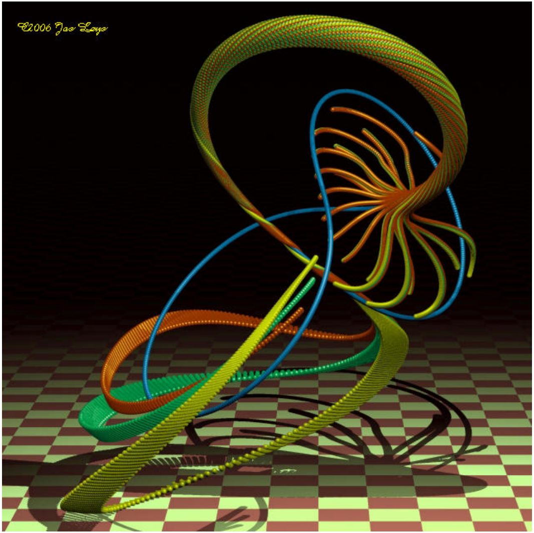
Champs de vecteurs



Champs de vecteurs



Champs de vecteurs



Carl Jacobi (1804-1851)

Carl Jacobi (1804-1851)

• Mathématicien allemand, très connu pour ses travaux sur les intégrales elliptiques.

• Il est l'un des fondateurs de la théorie des déterminants. En particulier, il invente le déterminant de la matrice formée par les dérivées partielles : le *jacobien* d'une application.

• L'identité de Jacobi apparaît dans l'étude des algèbres de Lie (un espace vectoriel muni d'un crochet bilinéaire, antisymétrique et qui justement vérifie l'identité de Jacobi).

• Il contribue à la mécanique céleste, notamment sur le problème des trois corps. Un cratère sur la Lune porte son nom.

Carl Jacobi (1804-1851)

• Une citation : « La véritable finalité de la science est l'honneur de l'esprit humain »

• Une autre citation. Face à ses étudiants qui préconisaient d'apprendre tout ce qui avait déjà été élaboré avant de se lancer dans la recherche, Jacobi répondait : « Si votre père avait pensé qu'il devait connaître toutes les filles avant d'en épouser une, il ne se serait jamais marié et vous ne seriez jamais nés »

Formes différentielles d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$

- Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On note

$$\begin{aligned}
\Omega^0(U) &= C^\infty(U) \\
\Omega^1(U) &= \{\alpha_1(x)dx_1 + \alpha_2(x)dx_2 + \alpha_3(x)dx_3, \\
&\quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in C^\infty(U) \times C^\infty(U) \times C^\infty(U)\} \\
\Omega^2(U) &= \{\beta_1(x)dx_2 \wedge dx_3 + \beta_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + \beta_3(x)dx_1 \wedge dx_2, \\
&\quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in C^\infty(U) \times C^\infty(U) \times C^\infty(U)\} \\
\Omega^3(U) &= \{h(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, h \in C^\infty(U)\} \\
\Omega^k(U) &= \{0\} \quad \text{si} \quad k > 3.
\end{aligned}$$

les espaces vectoriels des k-formes de U ($k \in \mathbb{N}$).

Champs de vecteurs d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$

• On note aussi

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(U) &= \{X_1\partial_1 + X_2\partial_2 + X_3\partial_3, \\ &\quad (X_1, X_2, X_3) \in C^\infty(U) \times C^\infty(U) \times C^\infty(U)\} \end{aligned}$$

l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur U.

• Les espaces vectoriels $\mathfrak{X}(U)$, $\Omega_1(U)$ et $\Omega_2(U)$ sont tous les trois isomorphes à

$$C^\infty(U) \times C^\infty(U) \times C^\infty(U).$$

et donc isomorphes entre eux.

• Si $\mathbb{R}^3$ est muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et orienté alors on peut construire des isomorphismes canoniques (canoniques=qui ne dépendent pas du choix de la base) entre $\Omega_1(U)$, $\Omega_2(U)$ et $\mathfrak{X}(U)$.

Les isomorphismes musicaux

• On note $\flat : \mathfrak{X}(U) \to \Omega^1(U)$ l'application qui a tout champ de vecteurs X associe la 1-forme différentielle $\alpha = \langle X, . \rangle$.

• Similairement, on note $\sharp : \Omega^1(U) \to \mathfrak{X}(U)$ l'application qui a toute 1-forme différentielle α associe le champ de vecteur X tel que, en tout point $x \in U$, X_x soit perpendiculaire à $\ker \alpha_x$ et $\alpha_x(X_x) = 1$.

• On a : $(\partial_i)^\flat = dx_i$ et $(dx_i)^\sharp = \partial_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

• On a : $\flat \circ \sharp = id_{\Omega^1(U)}$ and $\sharp \circ \flat = id_{\mathfrak{X}(U)}$.

Définition.– Les deux isomorphismes $\flat$ et $\sharp$ sont appelés ISOMORPHISMES MUSICAUX.

L'étoile de Hodge

• On définit une application $\star : \Omega_1(U) \to \Omega_2(U)$ en posant

$$\star dx_1 = dx_2 \wedge dx_3, \quad \star dx_2 = dx_3 \wedge dx_1 \quad \text{et} \quad \star dx_3 = dx_1 \wedge dx_2$$

et en la prolongeant de façon linéaire.

• Sa réciproque est encore notée $\star : \Omega_2(U) \to \Omega_1(U)$ et elle vérifie

$$\star(dx_1 \wedge dx_2) = dx_3, \ \star(dx_2 \wedge dx_3) = dx_1 \ \text{ et } \ \star(dx_3 \wedge dx_1) = dx_2$$

• On définit de même $\star : \Omega_0(U) \to \Omega_3(U)$ et $\star : \Omega_3(U) \to \Omega_0(U)$ en posant

$$\star 1 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad \text{et} \quad \star(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = 1.$$

Définition.– L'opérateur $\star$ est appelé l'ÉTOILE DE HODGE.

L'étoile de Hodge

Exemple/exercice.– Soit

$$\beta_x = \beta_1(x)dx_2 \wedge dx_3 + \beta_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + \beta_3(x)dx_1 \wedge dx_2.$$

Alors

$$\star\beta_x = \beta_1(x)dx_1 + \beta_2(x)dx_2 + \beta_3(x)dx_3$$

et

$$(\star\beta_x)^\sharp = \beta_1(x)\partial_1 + \beta_2(x)\partial_2 + \beta_3(x)\partial_3.$$

Ainsi

$$(\star\beta)^\sharp : \Omega_2(U) \to \mathfrak{X}(U)$$

est un isomorphisme. On montre (exercice) que

$$\star(X^\flat) : \mathfrak{X}(U) \to \Omega_2(U)$$

est sa réciproque.

L'étoile de Hodge

Remarque.– Notre façon de définir l'étoile de Hodge fait intervenir des bases, par exemple (dx_1, dx_2, dx_3) pour $\star : \Omega_1(U) \to \Omega_2(U)$. Il existe une façon plus intrinsèque de définir $\star$ en s'appuyant sur le produit scalaire et l'orientation de $\mathbb{R}^3$. Pour des questions de temps, nous ne l'aborderons pas ici.

Intégration des formes différentielles

Définition.– Soient

$$\alpha_x = \alpha_1(x)dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3(x)dx_1 \wedge dx_2$$

une 2-forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^3$ et

$$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^3$$

une application de classe C^1. Le TIRÉ EN ARRIÈRE $f^*\alpha$ de α est la 2-forme différentielle de $\mathcal{U}$ définie par

$$(f^*\alpha)_{(u,v)}(.,.) = \alpha_{f(u,v)}(df_{(u,v)}(.), df_{(u,v)}(.)).$$

Intégration des formes différentielles

Définition.– Soient

$$\alpha_x = \alpha_1(x)dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3(x)dx_1 \wedge dx_2$$

une 2-forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^3$ et

$$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^3$$

une application de classe C^1. Le TIRÉ EN ARRIÈRE $f^*\alpha$ de α est la 2-forme différentielle de $\mathcal{U}$ définie par

$$(f^*\alpha)_{(u,v)}(.,.) = \alpha_{f(u,v)}(df_{(u,v)}(.), df_{(u,v)}(.)).$$

- Remarquons que toute 2-forme d'un ouvert $U \subset \mathbb{E}^3$ s'écrit

$$\alpha_x(.,.) = det(X_x, ., .)$$

où $X_x = \alpha_1(x)\partial_1 + \alpha_2(x)\partial_2 + \alpha_3(x)\partial_3 = (\star\alpha_x)^\sharp$

Intégration des formes différentielles

- Par conséquent, si $x = f(u, v)$, on a

$$\begin{aligned}(f^*\alpha)_{(u,v)}(\partial_u, \partial_v) &= det(X_x, f_u, f_v)\\ &= \langle X_x, f_u \wedge f_v\rangle\\ &= \sqrt{EG - F^2}\,\langle X_x, N(u, v)\rangle.\end{aligned}$$

- Donc

$$(f^*\alpha)_{(u,v)} = \langle X_{f(u,v)}, N(u, v)\rangle \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$$

- Si on note $(\star\alpha)^\sharp$ plutôt que X, on obtient

$$(f^*\alpha)_{(u,v)} = \langle (\star\alpha)^\sharp_{f(u,v)}, N(u, v)\rangle \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv.$$

Intégration des formes différentielles

Définition.– Soit S orientée et $f : \mathcal{U} \longrightarrow S = f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ une immersion injective respectant l'orientation. On appelle INTÉGRALE DE α sur S le nombre

$$\int_S \alpha := \int_{\mathcal{U}} f^*\alpha$$

où

$$\int_{\mathcal{U}} f^*\alpha := \int_{\mathcal{U}} \langle (\star\alpha)^\sharp_{f(u,v)}, N(u,v) \rangle \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

Lemme.– *Soit $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ un difféomorphisme préservant l'orientation (i. e. det Jac$(\varphi) > 0$) et $g = f \circ \varphi$. Alors*

$$\int_{\mathcal{V}} g^*\alpha = \int_{\mathcal{U}} f^*\alpha.$$

Intégration des formes différentielles

Démonstration.– Soit $(u', v') = \varphi^{-1}(u, v)$. On a déjà vu au CM-S2 que

$$g_{u'} \wedge g_{v'} = (det\ Jac(\varphi)).(f_u \wedge f_v) \circ \varphi$$

Donc, si $det\ Jac(\varphi) > 0$,

$$N_g(u', v') = \frac{g_{u'} \wedge g_{v'}}{\|g_{u'} \wedge g_{v'}\|} = \frac{(f_u \wedge f_v) \circ \varphi}{\|(f_u \wedge f_v) \circ \varphi\|} = N_f \circ \varphi(u', v').$$

• Dès lors, l'égalité

$$\int_{\mathcal{V}} g^*\alpha = \int_{\mathcal{U}} f^*\alpha.$$

se déduit de la formule de changement de variables dans les intégrales. $\square$

Intégration des formes différentielles

• Bien sûr, si φ renverse l'orientation, on a

$$\int_{\mathcal{V}} g^*\alpha = -\int_{\mathcal{U}} f^*\alpha.$$

• C'est une différence notable entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégration des 2-formes : l'orientation rentre en compte.

• Pour l'intégrale de Lebesgue, la formule de changement de variables fait apparaître la valeur absolue du déterminant de la jacobienne.

• Notre définition de l'intégrale d'une 1-forme n'est pas complètement satisfaisante. Nous avons discrètement supposé que $S = f(\mathcal{U})$ ce qui est restrictif...

Intégration des formes différentielles

• On pourrait corriger ce défaut avec un peu plus de technologie (=une partition de l'unité).

Exemple.– Soit $\alpha = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$ et S la sphère unité. Alors

$$\begin{aligned}\int_S \alpha &= \int_{\mathcal{U}} \langle (\star\alpha)^\sharp_{f(u,v)}, N(u,v)\rangle \sqrt{EG-F^2}dudv.\\ &= \int_{\mathcal{U}} \langle f(u,v), N(u,v)\rangle \sqrt{EG-F^2}dudv.\end{aligned}$$

car $(\star\alpha)^\sharp_{f(u,v)} = f(u,v)$. Finalement

$$\int_S \alpha = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{EG-F^2}dudv = 4\pi.$$

Intégration des formes différentielles

Définition.– Soit S une sous-variété orientée par $n : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$ et X un champ de vecteurs. On appelle FLUX DE X à travers S le nombre

$$\Phi_S(X) := \int_S \langle X, n \rangle d^2 S.$$

• Le champ de vecteurs $X : U \to \mathbb{R}^3$ définit une 2-forme $\star(X^\flat) \in \Omega^2(U)$:

$$\star(X^\flat) = X_1 dx_2 \wedge dx_3 + X_2 dx_3 \wedge dx_1 + X_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Lemme (évident).– *On a*

$$\Phi_S(X) = \int_S \star(X^\flat).$$

Intégration des formes différentielles

Définition.– Soit $\overline{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière injective et $\Gamma = \overline{\gamma}([a, b])$. On appelle INTÉGRALE DE la 1-forme

$$\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3$$

le long de γ le nombre

$$\int_\gamma \alpha := \int_a^b \overline{\gamma}^* \alpha$$

où

$$\int_a^b \overline{\gamma}^* \alpha = \int_a^b \langle \alpha^\sharp, \overline{\gamma}'(t) \rangle dt$$

avec

$$\alpha^\sharp = \alpha_1 \partial_1 + \alpha_2 \partial_2 + \alpha_3 \partial_3 .$$

Intégration des formes différentielles

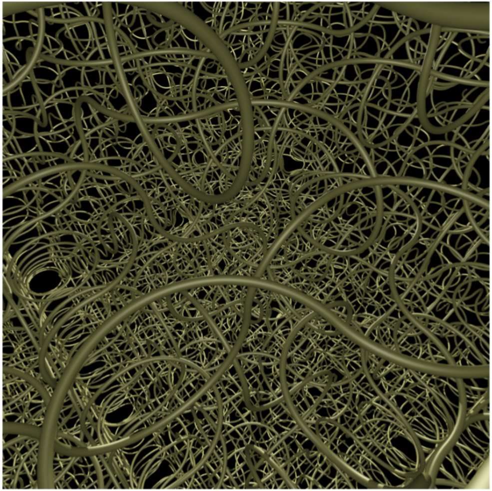
Lemme.– *Soit* $\varphi : [a', b'] \longrightarrow [a, b]$ *un difféomorphisme préservant l'orientation (i. e.* $\varphi'(t) > 0$*) et* $\overline{\delta} = \overline{\gamma} \circ \varphi$ *alors*

$$\int_{a'}^{b'} \overline{\delta}^* \alpha = \int_a^b \overline{\gamma}^* \alpha.$$

Démonstration.– Ici, la préservation de l'orientation permet de ne pas renverser $\int_a^b$ en $\int_b^a$. $\square$

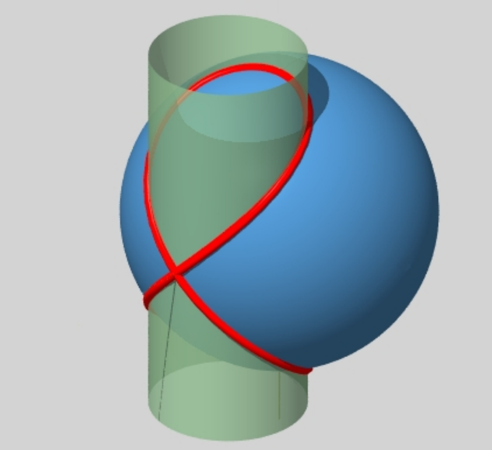
• Notons que la tentation est grande de voir $\Gamma = \overline{\gamma}([a, b])$ comme une sous-variété de dimension un. C'est bien le cas... aux extrémités près. On dit que Γ est une sous-variété à bord.

Intégration des formes différentielles



Une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension de 1

Intégration des formes différentielles



La fenêtre de Viviani : ce n'est pas une sous-variété de dimension de 1

Intégration des formes différentielles

• Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une varieté de dimension 1 (éventuellement à bord). Le choix d'un champ de vecteurs unitaires tangents $T : \Gamma \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^3$ est appelé une ORIENTATION DE Γ.

• On dira que $\overline{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \Gamma$ préserve l'orientation si $\overline{\gamma}'$ et T ont un coefficient de proportionnalité positif.

• On peut alors définir l'intégrale des 1-formes α sur les sous-variétés orientées Γ de dimension 1 au moyen des applications $\overline{\gamma}$ qui préservent l'orientation.

Intégration des formes différentielles

Définition.– Soit Γ une sous-variété orientée par $T : \Gamma \longrightarrow \mathbb{E}^3$ et X un champ de vecteurs. On appelle CIRCULATION DE X le long de Γ le nombre

$$\mathcal{C}_\Gamma(X) := \int_\Gamma \langle X, T \rangle \, ds.$$

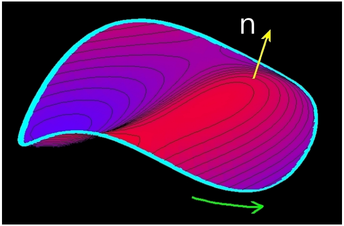
Lemme (évident).– *On a*

$$\mathcal{C}_\Gamma(X) = \int_\Gamma X^\flat$$

où $X^\flat = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$.

La formule de Stokes

Définition.– Soit $S \subset \mathbb{E}^3$ une sous-variété de dimension deux. On dit que $D \subset S$ est un DOMAINE RÉGULIER de dimension 2 s'il est compact et si sa frontière $D \setminus \mathring{D}$ est une sous-variété de dimension 1. Cette sous-variété est notée ∂D et appelé le BORD de D.



• Si S est orientée par n, alors on oriente ∂D en demandant que (T, W, n) soit directe dans $\mathbb{E}^3$, W étant un champ de vecteurs le long de ∂D, tangent à S et tel que W pointe à l'intérieur de D (*cf.* CM-S5).

La formule de Stokes

Théorème : la formule de Stokes.– *Soit D un domaine régulier d'une sous-variété de dimension deux orientée S et soit ∂D son bord orienté. Soit α une 1-forme définie sur un ouvert contenant S, alors*

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha.$$

- Rappelons que si $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3$ alors

$$\begin{aligned} d\alpha \quad = \quad & \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\ + & \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 \\ + & \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 . \end{aligned}$$

La formule de Stokes

Démonstration.– On ne la présente que dans le cas où D est dans l'image d'une immersion injective $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$.

• Puisque S est une sous-variété f est un difféomorphisme sur son image, par conséquent $\mathcal{D} = f^{-1}(D)$ est un domaine régulier de $\mathcal{U}$ dont le bord $\partial\mathcal{D}$ est $f^{-1}(\partial D)$.

• On suppose en outre qu'il existe

$$\gamma : I_1 \coprod I_2 \coprod ... \coprod I_n \longrightarrow \partial\mathcal{D}$$

une courbe régulière injective de support $\partial\mathcal{D}$.

• On suppose enfin que les orientations induites par f et $f \circ \gamma$ sont cohérentes avec celles de D et ∂D (sinon, on met des signes moins partout dans la démonstration).

La formule de Stokes

- Par définition

$$\int_D d\alpha := \int_{\mathcal{D}} f^* d\alpha = \int_{\mathcal{D}} d(f^*\alpha).$$

- On applique la formule de Green-Riemann pour obtenir

$$\int_D d\alpha := \int_{\partial\mathcal{D}} f^*\alpha.$$

- D'autre part

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_J (f\circ\gamma)^*\alpha = \int_J \gamma^*(f^*\alpha)$$

où $J = I_1 \coprod I_2 \coprod \ldots \coprod I_n$.

La formule de Stokes

- Par définition

$$\int_{\partial \mathcal{D}} f^*\alpha = \int_J \gamma^*(f^*\alpha).$$

- En égalant, on trouve

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha.$$

$\square$

Application 1.– Si $\partial S = \emptyset$ alors pour tout 1-forme α on a

$$\int_S d\alpha = 0.$$

La formule de Stokes

Application 2.– La circulation d'un champ de vecteur X s'écrit

$$\mathcal{C}_{\partial D}(X) = \int_{\partial D} X^\flat = \int_D d(X^\flat).$$

• Or

$$\begin{aligned} d(X^\flat) \quad = \quad & \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\ + \quad & \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 \\ + \quad & \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 . \end{aligned}$$

Définition.– Le champ de vecteurs $(\star d(X^\flat))^\sharp$ est appelé le ROTATIONNEL de X, il est noté $rot\ X$.

La formule de Stokes

- On a donc

$$rot\ X =$$

$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)\partial_1 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right)\partial_2 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right)\partial_3.$$

- Au bilan

$$\mathcal{C}_{\partial D}(X) = \int_{\partial D}\langle X, T\rangle ds = \int_D \langle rot\ X, n\rangle d^2S = \Phi_D(rot\ X).$$

George Stokes (1819-1903)

George Stokes (1819-1903)

• Mathématicien et physicien britannique de tout premier ordre. Il a occupé la chaire de mathématique *Isaac Newton* à Cambridge.

• Ses recherches ont concerné essentiellement la mécanique des fluides, l'optique et la géodésie.

• La formule qui porte son nom est due en réalité William Thomson avec qui George Stokes a entretenu une correspondance active.

• En reconnaissance de la valeur de ses travaux, il est fait baronnet en 1889.

George Stokes (1819-1903)

• Croyant fervent, il a été président du Victoria Institute, une société savante dont le but était de défendre la « grande vérité des Saintes Ecritures » face à la « fausse science » de l'*Origine des espèces* de Charles Darwin.

• Sur *Wikipédia*, on peut lire la perfidie suivante : « Son mariage en 1857 avec Mary Robinson coïncide avec un ralentissement certain de sa productivité scientifique »

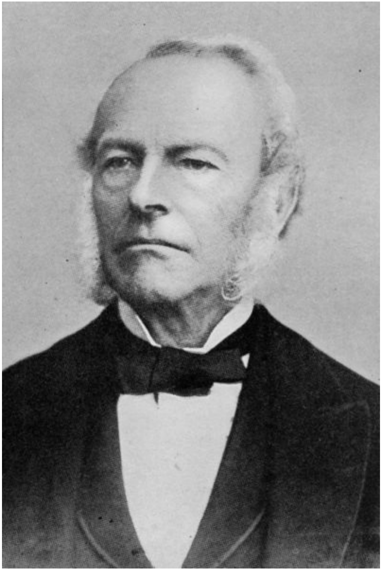
• Deux cratères portent son nom, un sur la Lune l'autre sur Mars.

• Pour finir sur une note joyeuse : quelques portraits de Stokes...

George Stokes (1819-1903)

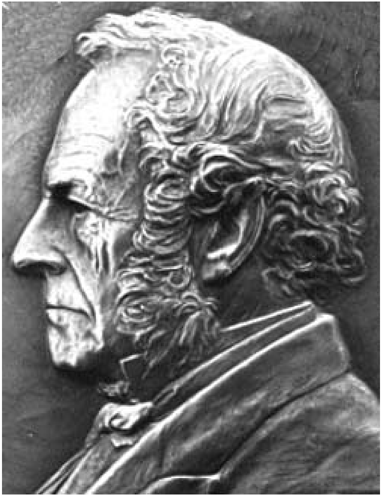
George Stokes (1819-1903)

George Stokes (1819-1903)



George Stokes (1819-1903)

George Stokes (1819-1903)



La formule d'Ostrogradski

Définition.– On dit que $D \subset \mathbb{E}^3$ est un DOMAINE RÉGULIER de dimension 3 s'il est égal à l'adhérence de son intérieur et si sa frontière $\overline{D} \setminus \mathring{D}$ est une sous-variété de dimension 2. Cette sous-variété est notée $S = \partial D$ et appelé le BORD de D.

• On oriente alors $S = \partial D$ en choisissant la normale sortante.

La formule d'Ostrogradski

Théorème : la formule d'Ostrogradski (admise).– *Soit $D \subset \mathbb{E}^3$ un domaine régulier de dimension trois et soit $S = \partial D$ son bord orienté. Soit α une 2-forme définie sur un ouvert contenant D, alors*

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha.$$

- Rappelons que si

$$\alpha = \alpha_1 dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2 dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3 dx_1 \wedge dx_2$$

alors

$$d\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

La formule d'Ostrogradski

• Bien sûr, on définit l'intégrale d'une 3-forme

$$\alpha = h\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

sur un domaine régulier de dimension trois D par

$$\int_D \alpha := \int_D h\, dx_1 dx_2 dx_3.$$

• On note $\omega := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Autrement dit

$$\omega(X, Y, Z) = det(X, Y, Z).$$

• Si X est un champ de vecteurs, on définit une 2-forme $i_X\omega$ par

$$(i_X\omega)(.,.) := \omega(X, ., .)$$

La formule d'Ostrogradski

- Un calcul immédiat montre que

$$i_X\omega := X_1 dx_2 \wedge dx_3 + X_2 dx_3 \wedge dx_1 + X_3 dx_1 \wedge dx_2$$

- Ainsi

$$d(i_X\omega) = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)\omega.$$

Définition.– On appelle DIVERGENCE DE X l'application

$$div\ X := \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right).$$

La formule d'Ostrogradski

Application.– Le flux de X s'écrit maintenant

$$\Phi_S(X) = \int_S \langle X, n\rangle d^2S = \int_S det(X, ., .) = \int_S i_X\omega.$$

• La formule d'Ostrogradski permet d'écrire

$$\Phi_S(X) = \int_D d(i_X\omega) = \int_D dix(X)\omega.$$

Mikhail Ostrogradski (1801-1862)

Mikhail Ostrogradski (1801-1862)

• Considéré comme l'un des physiciens/mathématiciens les plus importants de la Russie impériale.

• Commence ses études à Kharkiv (Ukraine) mais ne peut obtenir son diplôme de thèse après la suspension de son directeur de thèse (et recteur de l'Université) Timofei Osipovsky.

• Le Prince Aleksander Golitsyn, ministre de l'enseignement, avait en effet ordonné que la science soit présentée selon « des principes chrétiens » et Osipovsky aurait manqué de ferveur en déclamant « Dieu est vivant » lors de l'examen oral d'un étudiant.

• Poursuit ses études à Paris où il se lie d'amitié et d'estime avec Cauchy, Binet, Fourier et Poisson.

Mikhail Ostrogradski (1801-1862)

• Revient au pays pour enseigner à l'école des cadets de la Marine, puis à l'Institut des Ingénieurs et enfin à l'école d'Artillerie de Saint-Pétersbourg.

• Rejette le travail de Lobachevsky sur les géométries non-euclidiennes (article soumis à l'Académie des Sciences de Saint Pétersbourg).

• La formule qui porte son nom fut découverte par Lagrange en 1762, puis redécouverte par Gauss en 1813 et par Green en 1825. Elle fut *démontrée* par Ostrogradski en 1831.