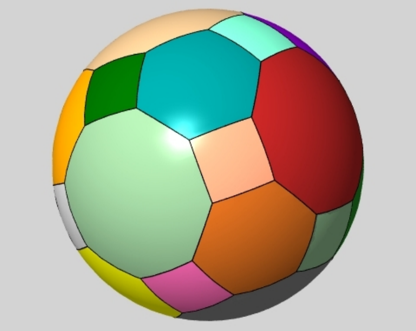
CM-S7 : Le théorème de Gauss-Bonnet

Vincent Borrelli

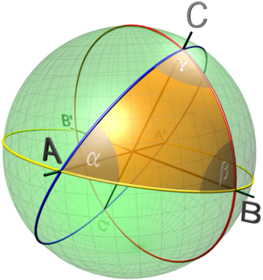
Université de Lyon



Polygones réguliers sur une sphère

La formule d'Harriot

• On suppose que l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$ est orienté.



Définition.– On appelle TRIANGLE SPHÉRIQUE un domaine T de la sphère homéomorphe à un disque et dont le bord est formé de trois arcs géodésiques dont aucun n'est réduit à un point.

La formule d'Harriot

• On note A, B et C les extrémités des arcs géodésiques et α, β et γ les angles intérieurs définis par les tangentes aux géodésiques. Ces angles peuvent être orientés par le choix d'une normale à la sphère.

• Si T est un triangle sphérique alors l'adhérence de son complémentaire dans la sphère est encore un triangle sphérique.

• Si l'union des trois arcs géodésiques forme un grand cercle de la sphère, alors le triangle sphérique correspondant est une demi-sphère.

La formule d'Harriot

Définition.– On appelle BIANGLE SPHÉRIQUE un domaine B de la sphère homéomorphe à un disque et dont le bord est formé de deux arcs géodésiques dont les extrémités communes sont deux points antipodaux.

- L'aire du biangle B_α d'angle au sommet α est $2\alpha R^2$.

La formule d'Harriot

Théorème (la formule d'Harriot).– *Soit T un triangle sphérique, on a*

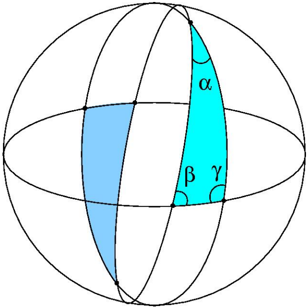
$$\frac{Aire(T)}{R^2} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

où R est le rayon de la sphère.

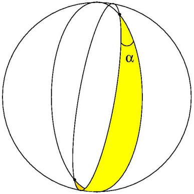
• Notons que $\dfrac{1}{R^2}$ est la courbure de Gauss de la sphère de rayon R.

La formule d'Harriot

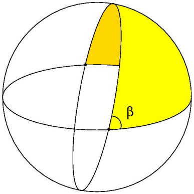
Démonstration.– Elle repose sur la partition de la sphère induite par un triangle sphérique.



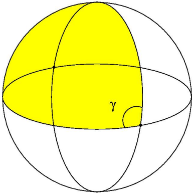
La formule d'Harriot



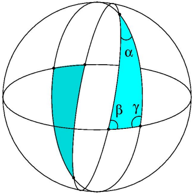
Biangle B_α



Biangle B_β



Biangle B_γ



Triangle T

La formule d'Harriot

- Ainsi

$$Aire(2B_\alpha + 2B_\beta + 2B_\gamma) = Aire(\mathbb{S}^2) + 4Aire(T)$$

i. e.

$$Aire(T) = \frac{1}{2}Aire\,(B_\alpha + B_\beta + B_\gamma) - \frac{1}{4}Aire(\mathbb{S}^2)$$

- On remplace :

$$\begin{aligned} Aire(T) &= \frac{1}{2}\left(2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2\right) - \frac{1}{4}(4\pi R^2) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2 \end{aligned}$$

C'est la formule d'Harriot. $\square$

Thomas Harriot (1560-1621)

Thomas Harriot (1560-1621)

• Mathématicien, physicien, géographe et astronome anglais.

• L'algèbre moderne c'est lui... et François Viète bien sûr !

• En tant que géographe, il étudie la trigonométrie sphérique et découvre sa formule. Il ne la publie pas. Elle sera redécouverte par le mathématicien français Albert Girard.

• En astronomie, il effectua les premiers dessins de la Lune au travers d'une lunette quatre mois avant Galilée.

• Probablement athée, il est heureusement sous la protection du comte de Northumberland, Henry Percy.

Thomas Harriot (1560-1621)

Une carte de la Lune dessinée par Thomas Harriot

Thomas Harriot (1560-1621)

Une cratère lunaire du nom d'Harriot (sur la face cachée)

Le trièdre de Darboux

• Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une variété de dimension 2 et $\overline{\gamma} : I \longrightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et dont le support est contenue dans S.

• Localement (=quitte à réduire I), on peut toujours supposer qu'il existe une immersion $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ et une courbe paramétrée $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{U}$ telles que $\overline{\gamma} = f \circ \gamma$.

• On pose

$$T(s) := \overline{\gamma}'(s) \quad \text{et} \quad V(s) := n(\gamma(s)) \wedge T(s).$$

Définition.– Le repère orthonormée $(T, V, n \circ \gamma)$ est appelé TRIÈDRE DE DARBOUX

Le trièdre de Darboux

• En dérivant les 6 relations exprimant le caractère orthonormé de $(T, V, n\circ\gamma)$, on montre que nécessairement les dérivées de T, V et $n\circ\gamma$ sont de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{dT}{ds} & = & 0 & + & -aV & - & b\, n\circ\gamma \\ \dfrac{dV}{ds} & = & aT & + & 0 & - & c\, n\circ\gamma \\ \dfrac{d(n\circ\gamma)}{ds} & = & bT & + & cV & + & 0 \end{array}$$

où $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Le trièdre de Darboux

- Notons que

$$\begin{aligned} k_{T(s)} &= II(\overline{\gamma}'(s), \overline{\gamma}'(s)) \\ &= \langle -dn(\overline{\gamma}'(s)), \overline{\gamma}'(s)) \rangle \\ &= \langle -\frac{d(n\circ\gamma)}{ds}(s), T(s) \rangle \\ &= -b. \end{aligned}$$

Définition.– La fonction a est appelée la COURBURE GÉODÉSIQUE et elle est notée k_g. La fonction c est appelée la TORSION GÉODÉSIQUE et notée τ_g.

Le trièdre de Darboux

- Au bilan

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= -k_g.V + k_T.n\circ\gamma \\ \frac{dV}{ds} &= k_g.T - \tau_g.n\circ\gamma \\ \frac{d(n\circ\gamma)}{ds} &= -k_T.T + \tau_g.V \end{aligned}$$

Lemme.– *Soit $\overline{\gamma} = f\circ\gamma : I \longrightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc alors :*

$\overline{\gamma}$ *est une géodésique ssi* $k_g \equiv 0$

$\overline{\gamma}$ *est une courbe asymptotique ssi* $k_T \equiv 0$

$\overline{\gamma}$ *est une ligne de courbure ssi* $\tau_g \equiv 0$

Le trièdre de Darboux

Démonstration.– C'est quasi immédiat.

• $\overline{\gamma}$ est une géodésique ssi $(\frac{dT}{ds})^T = 0$ i.e. ssi $k_g \equiv 0$.

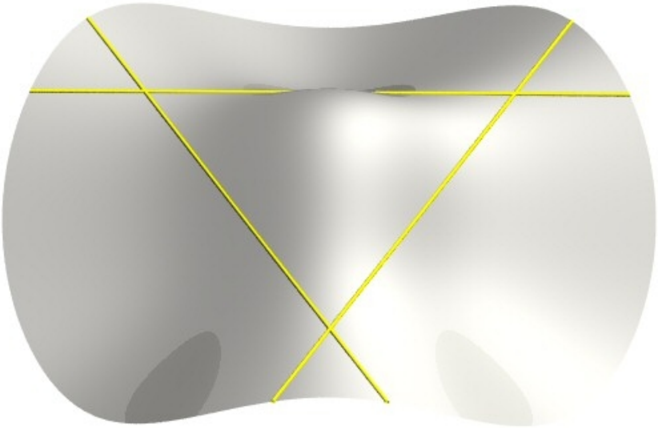
• $\overline{\gamma}$ est une courbe asymptotique ssi la courbure normale dans la direction T est nulle i.e. ssi $k_T = 0$.

• $\overline{\gamma}$ est une ligne de courbure ssi T est vecteur propre de $-dn$, autrement dit, ssi $\frac{d(n\circ\gamma)}{ds}$ est proportionnel à T, i. e. $\tau_g = 0$. $\square$

Corollaire.– *Si $\overline{\gamma} = f \circ \gamma : I \longrightarrow S$ est une droite paramétrée par la longueur d'arc alors c'est une géodésique et une courbe asymptotique.*

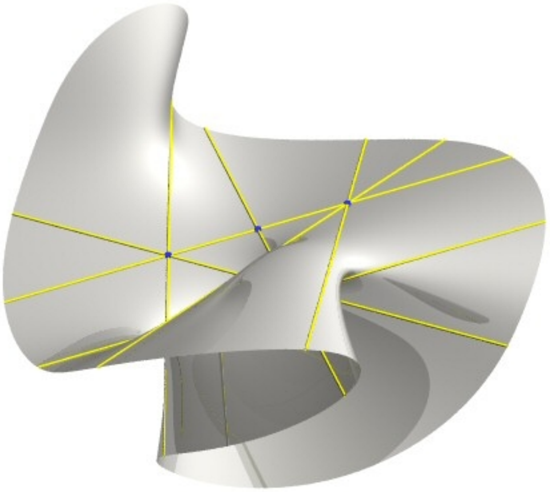
Démonstration.– En effet, dans ce cas $\frac{dT}{ds} = 0$ et donc $k_g = k_T = 0$. $\square$

Le trièdre de Darboux



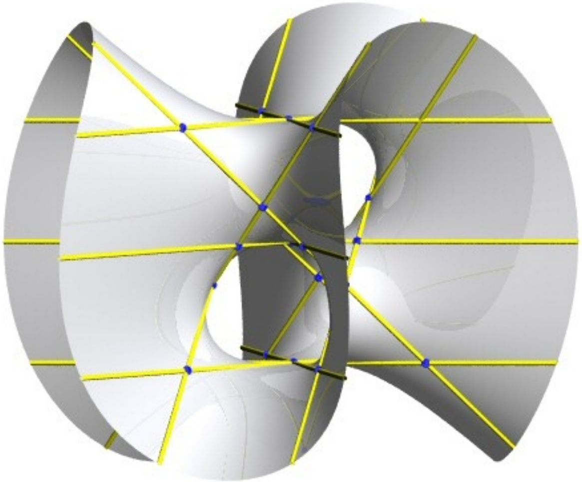
Trois droites sur une cubique

Le trièdre de Darboux



Sept droites sur une cubique

Le trièdre de Darboux



Quinze droites sur une cubique

Gaston Darboux (1842-1917)

Gaston Darboux (1842-1917)

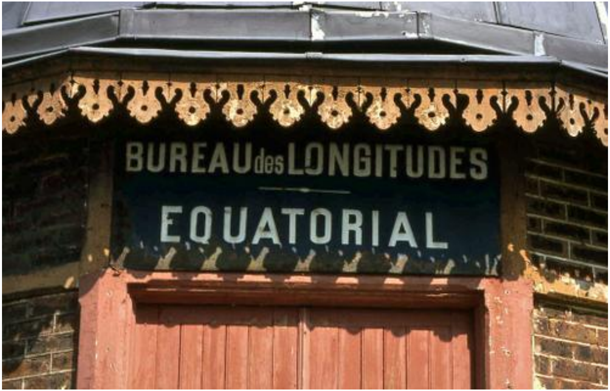
• Ses travaux concernent l'analyse (intégration, équations aux dérivées partielles) et la géométrie différentielle (étude des courbes et des surfaces)

• Deux théorèmes portent son nom, l'un en analyse et l'autre en géométrie symplectique

• Il fut membre du bureau des longitudes : initialement (1795), le but de ce bureau était de résoudre les problèmes astronomiques liés à la détermination de la longitude en mer afin de reprendre « la maîtrise des mers aux Anglais ».

• Actuellement bureau des longitudes est une académie de 13 membres qui définissent les missions confiées à l'Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides.

Gaston Darboux (1842-1917)



L'ancienne entrée du bureau des longitudes...

Gaston Darboux (1842-1917)

... et les anciens locaux : la marine anglaise a dû trembler d'effroi !

Gaston Darboux (1842-1917)

Les locaux actuels de l'Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides à l'observatoire de Paris

Le théorème de Gauss-Bonnet

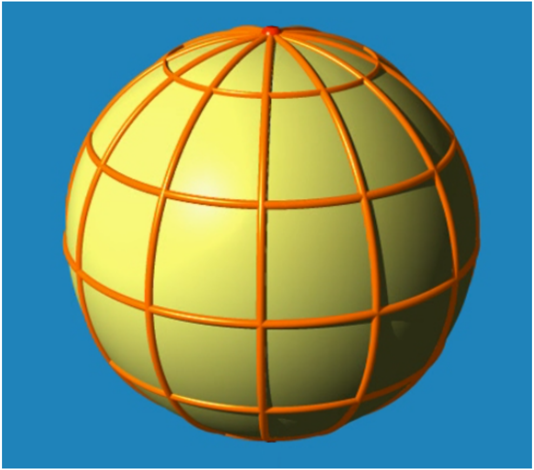
Définition.– Soit S une sous-variété de dimension 2 et $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ un paramétrage régulier. On dit que f est un PARAMÉTRAGE ORTHOGONAL de S si, dans la base (f_u, f_v), la matrice de la première forme fondamentale est de la forme

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

autrement dit, si $F = 0$.

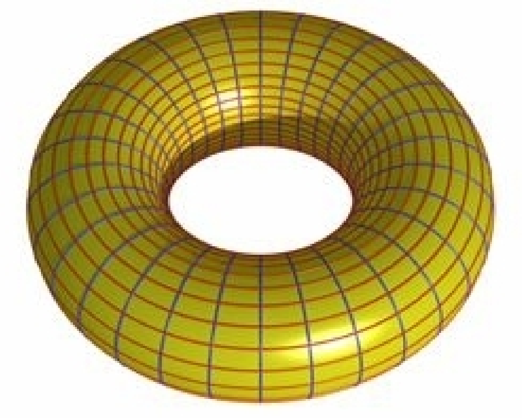
Théorème (admis).– *Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ un paramétrage régulier et $p = f(u_0, v_0) \in S$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ de (u_0, v_0) et un difféomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ tel que $g = f \circ \varphi$ soit un paramétrage orthogonal du voisinage $g(\mathcal{V})$ de p dans S.*

Le théorème de Gauss-Bonnet



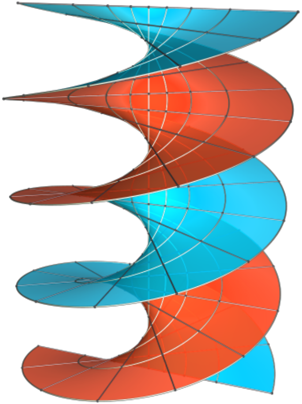
Le paramétrage usuel de la sphère est orthogonal

Le théorème de Gauss-Bonnet



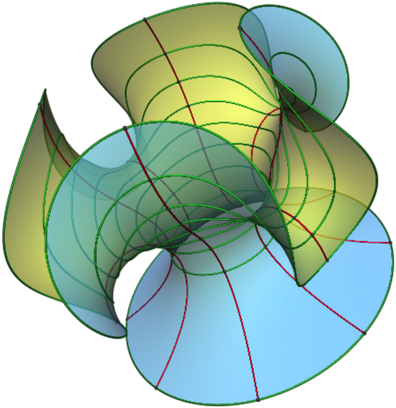
Idem pour le tore...

Le théorème de Gauss-Bonnet



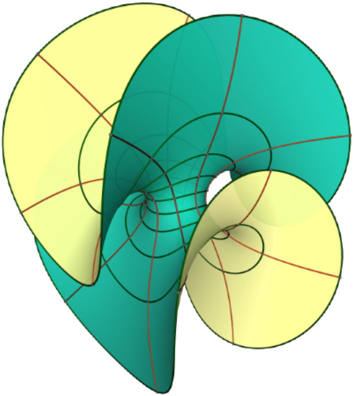
... et l'hélicoïde

Le théorème de Gauss-Bonnet



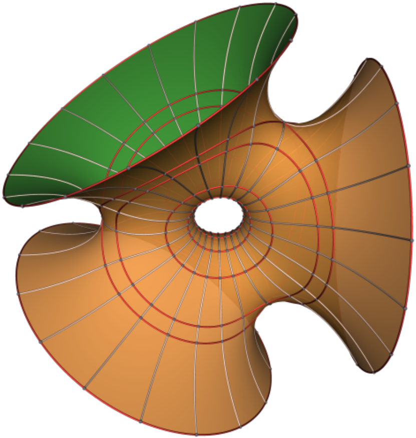
Un exemple moins évident : sur la catenoïde ondulée

Le théorème de Gauss-Bonnet



Un autre : sur la surface d'Enneper double

Le théorème de Gauss-Bonnet



Encore un autre : sur la 3-noïde de genre 1

Le théorème de Gauss-Bonnet

Proposition.– *Soit* $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ *un paramétrage orthogonal alors*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right).$$

De plus, si $\overline{\gamma} = f \circ \gamma : I \longrightarrow S$ *une courbe paramétrée par la longueur d'arc, alors sa courbure géodésique vaut*

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(G_u v' - E_v u'\right) + \varphi'$$

où $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *est l'angle orientée (par n) du couple de vecteurs* $(f_u \circ \gamma, \overline{\gamma}')$.

Le théorème de Gauss-Bonnet

Démonstration.– Il est un peu long mais facile de vérifier au moyen de la formule de Brioschi que si $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ est un paramétrage orthogonal alors

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right).$$

• A partir des relations vues en CM-S4, on tire directement

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\frac{E_u}{E} \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E} \qquad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}\frac{G_u}{E}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{G} \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G} \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}$$

Le théorème de Gauss-Bonnet

• Soit $\overline{\gamma} = f \circ \gamma : I \longrightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc. Dans la base (f_u, f_v) on a

$$\overline{\gamma}'(s) = u' f_u + v' f_v.$$

• Mais puisque la base

$$\left(\frac{f_u}{\sqrt{E}}, \frac{f_v}{\sqrt{G}}\right)$$

est orthonormée, on peut aussi choisir d'écrire

$$\overline{\gamma}'(s) = \cos(\varphi(s))\frac{f_u}{\sqrt{E}} + \sin(\varphi(s))\frac{f_v}{\sqrt{G}}.$$

où $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Le théorème de Gauss-Bonnet

• En identifiant

$$u' = \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{E}} \quad \text{et} \quad v' = \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{G}}$$

et

$$u'' = -\varphi' \frac{\sin\varphi}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{E^2}E_u - \frac{1}{2}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{E\sqrt{EG}}E_v$$

$$v'' = \varphi' \frac{\cos\varphi}{\sqrt{G}} - \frac{1}{2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{G\sqrt{EG}}G_u - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi}{G^2}G_v$$

• Puisque $(\overline{\gamma}'')^T = -k_g V$ et d'après une relation vue en CM-S4, on a

$$-k_g V = \left(u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2\right) f_u$$

$$+ \left(v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2\right) f_v.$$

Le théorème de Gauss-Bonnet

• Il « suffit » de remplacer pour obtenir

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{G_u}{\sqrt{G}}\sin(\varphi) - \frac{E_v}{\sqrt{E}}\cos(\varphi)\right) + \varphi'$$

que l'on peut aussi écrire :

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(G_u v' - E_v u'\right) + \varphi'$$

$\square$

• On vient d'exprimer, pour un paramétrage orthogonal, toutes les quantités qui ne dépendent que de la première forme fondamentale, autrement dit, toutes celles qui sont invariantes par isométrie.

Le théorème de Gauss-Bonnet

Définition.– Une courbe paramétrée $\overline{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite FERMÉE SIMPLE ET C^k-RÉGULIÈRE PAR MORCEAUX si

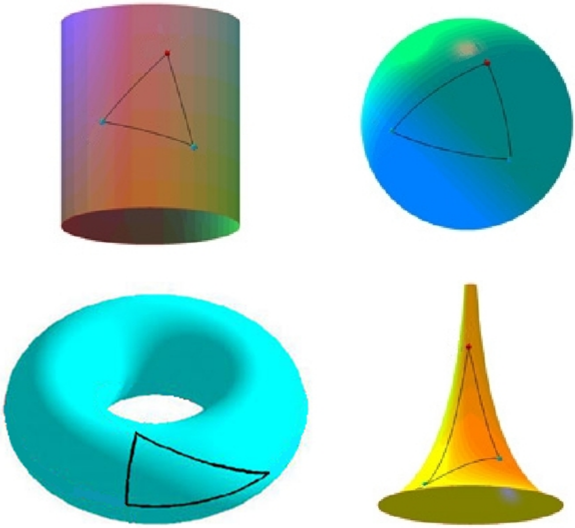
$$\begin{array}{ll} (i) & \overline{\gamma}(a) = \overline{\gamma}(b) \\ (ii) & \forall\, t_1, t_2 \in [a, b[,\ t_1 \neq t_2 \Rightarrow \overline{\gamma}(t_1) \neq \overline{\gamma}(t_2) \\ (iii) & \text{Il existe une subdivision} \end{array}$$

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = b$$

de $[a, b]$ telle que $\overline{\gamma}$ soit C^k et régulière sur chaque $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in \{0, \ldots, k\}$.

• On suppose maintenant en outre que $\overline{\gamma} = f \circ \gamma$ où f est une paramétrisation régulière et injective.

Le théorème de Gauss-Bonnet



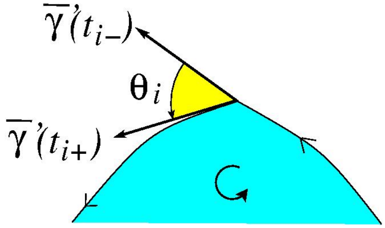
Courbes fermées simples et régulières par morceaux

Le théorème de Gauss-Bonnet

• On note θ_i, $i \in \{0, ..., k\}$, les angles en $\overline{\gamma}(t_i)$ formées par les couples de vecteurs

$$(\overline{\gamma}'(t_{i-}), \overline{\gamma}'(t_{i+}))$$

et orientés par la normale de f.



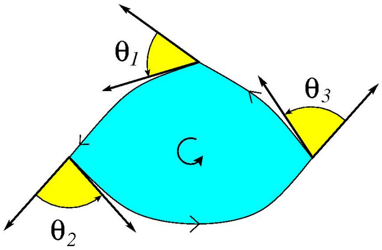
Le théorème de Gauss-Bonnet

- On note φ l'angle orienté entre f_u et $\overline{\gamma}'$.

Théorème des tangentes tournantes pour les surfaces (admis).– *Si $f(\mathcal{U})$ est homéomorphe à un disque on a*

$$\sum_{i=0}^{k}(\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i))+\sum_{i=0}^{k}\theta_i=\pm 2\pi$$

le signe dépendant de l'orientation de $\overline{\gamma}$.

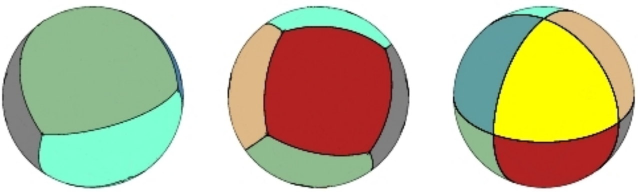


Le théorème de Gauss-Bonnet

Définition.– On dit que $D \subset S$ est un DOMAINE SIMPLE si D est homéomorphe à un disque fermé et si le bord ∂D de D est le support d'une courbe paramétrée

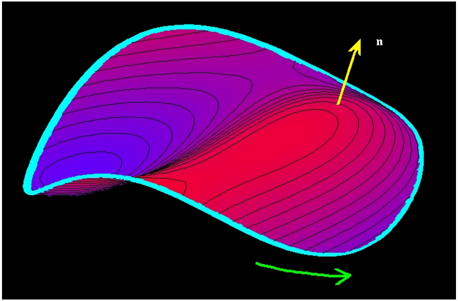
$$\overline{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \partial D \subset S$$

fermée simple et régulière par morceaux.



Des domaines simples sur la sphère

Le théorème de Gauss-Bonnet

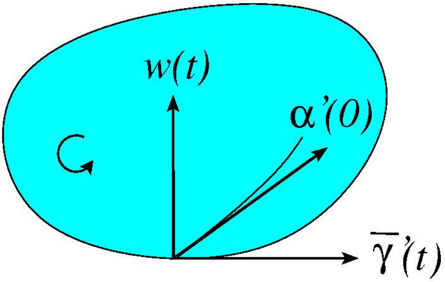


Définition.– Soit $\overline{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \partial D \subset S$ une courbe paramétrée fermée simple et régulière par morceaux. On dit que $\overline{\gamma}$ est ORIENTÉE POSITIVEMENT si pour tout $t \in]t_k, t_{k+1}[$, lorsque l'on complète $\overline{\gamma}'(t)$ en une base $(\overline{\gamma}'(t), w(t))$ orthogonale directe pour l'orientation induite par n, alors le vecteur $w(t)$ « pointe à l'intérieur de D ».

Le théorème de Gauss-Bonnet

- « Pointer à l'intérieur de D » signifie que pour toute courbe $\alpha : [0, \epsilon[\longrightarrow D$ telle que $\alpha(0) = \overline{\gamma}(t)$ et $\alpha'(0) \notin \mathbb{R}\overline{\gamma}'(t)$ on a

$$\langle \alpha'(0), w(t) \rangle > 0.$$



Le théorème de Gauss-Bonnet

Théorème de Gauss-Bonnet.–*Soit $D \subset S = f(\mathcal{U})$ un domaine simple bordé par $\overline{\gamma}$ orientée positivement et paramétrée par la longueur d'arc. Alors :*

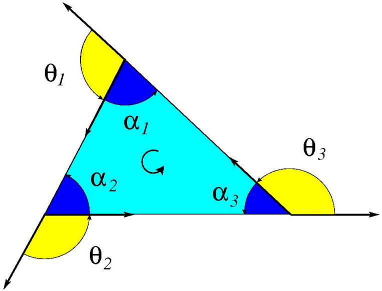
$$\sum_{i=1}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds + \int_D K\, d^2S + \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 2\pi.$$

Corollaire.– *Si le support de $\overline{\gamma}$ est formé d'arcs géodésiques alors*

$$\int_D K\, d^2S = 2\pi - \sum_{i=1}^{k} \theta_i.$$

Le théorème de Gauss-Bonnet

• Si D est un triangle dans un plan ($K = 0$), la formule de Gauss-Bonnet s'écrit : $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$.



Si on note α_i les angles intérieurs, on obtient

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi.$$

On retrouve le théorème de la somme des angles d'un triangle.

Le théorème de Gauss-Bonnet

• Si D est un triangle sphérique tracée sur une sphère de rayon R alors

$$\int_D K\, d^2S = \frac{Aire(D)}{R^2}.$$

La formule de Gauss-Bonnet s'écrit donc

$$\frac{Aire(D)}{R^2} = 2\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3).$$

En passant aux angles intérieurs on retrouve la formule d'Harriot

$$\frac{Aire(D)}{R^2} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi.$$

Le théorème de Gauss-Bonnet

Démonstration.– On suppose pour simplifier la démonstration que $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ est un paramétrage orthogonal.

- Ainsi

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds = A + B$$

où

$$A = \sum_{i=1}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u v' - E_v u'\right) ds$$

et

$$B = \sum_{i=1}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \varphi' ds.$$

Le théorème de Gauss-Bonnet

- On s'occupe en premier de A. On note

$$P = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}.$$

Par Green-Riemann

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u v' - E_v u' \right) ds \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} Pu' + Qv' ds \\ &= \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv \\ &= \int_D \left(\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right) dudv \end{aligned}$$

Le théorème de Gauss-Bonnet

• A un facteur $-\sqrt{EG}$ près on reconnaît l'expression de la courbure de Gauss, d'où

$$A = -\int_D K\sqrt{EG}\,dudv.$$

• Or $\sqrt{EG}$ est l'élément d'aire puisque $F = 0$. Ainsi

$$A = -\int_D K\,d^2S.$$

• On s'occupe de B maintenant. On a

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \varphi' ds \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i)\right). \end{aligned}$$

Le théorème de Gauss-Bonnet

• Le théorème des tangentes tournantes permet ensuite d'écrire que

$$\sum_{i=1}^{k}(\varphi(s_{i+1})-\varphi(s_i)) = 2\pi - \sum_{i=1}^{k}\theta_i$$

• Finalement

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds &= A+B \\ &= -\int_D K\, d^2S + 2\pi - \sum_{i=1}^{k}\theta_i\end{aligned}$$

C'est la formule de Gauss-Bonnet. $\square$

Pierre-Ossian Bonnet (1819-1892)

Pierre-Ossian Bonnet (1819-1892)

- Il renonce à une carrière d'ingénieur pour se tourner vers l'enseignement et la recherche

- On lui doit d'importantes contributions en théorie des surfaces : c'est lui qui introduit la courbure géodésique puis démontre la formule de Gauss-Bonnet

- En fait cette formule avait déjà été établie par Gauss, mais il ne l'avait pas publiée

- Comme Darboux, il fut membre du bureau des longitudes... mais 20 avant !