M1G S1 : Géométrie

Vincent Borrelli Mathilde Gaillard Matthieu Jentile

Sébastien Pierrisnard Michael Yang

Université de Lyon | Université Claude Bernard Lyon 1

Résumé

Ce document est un polycopié de cours du module Géométrie enseigné lors du premier semestre du Master 1 Mathématiques Générales (M1G) de Lyon, réalisé par Monsieur Vincent Borelli. L'entièreté du contenu du document a été fournie par M. Borelli pendant ses enseignements lors de l'année scolaire 2020-2021.

Le but de ce polycopié est de fournir aux élèves de M1G un document de cours parallèle aux diapositives qu'utilise M. Borelli lors de ses cours, ceci afin d'en faciliter les lectures. Ainsi, le contenu est identiquement le même et ne contient aucune note personnelle.
Ce document a été réalisé en collaboration par Mathilde Gaillard, Matthieu Jentile, Sébastien Pierrisnard, Michael Yang et Jules Armand. Chacun des collaborateurs est issu de la promotion 2020-2021 du M1G et ont donc suivis les enseignements de M. Borelli.

Malgré les précautions de chacun des auteurs, il est possible que des erreurs se soient glissées çà et là. Dans ce cas (ou pour toute autre remarque vis-à-vis de ce document), il est recommandé de contacter M. Borelli, par exemple à l'adresse borrelli@math.univ-lyon1.fr.
Enfin, toutes les images présentes dans ce polycopié ne sont pas forcément libres de droits. Il n'est donc pas autorisé au lecteur de les utiliser comme bon lui semble, si ce n'est pour une utilisation personnelle.

Les collaborateurs sont profondément reconnaissants envers M. Borelli pour sa confiance en eux dans l'élaboration de ce document.

Table des matières

Chapitre 5

Surfaces paramétrées

I Régularité

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition : Soit $k \geqslant 1$.
Une **SURFACE PARAMÉTRÉE DE $\mathbb{R}^3$ DE CLASSE $\mathcal{C}^k$** est une application $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^k$.
Soit f une surface paramétrée. $f(\mathcal{U})$ est appelé le **SUPPORT DE f**.
Soit $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Toute application $g : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $g(\mathcal{V}) = S$ est appelée une **$\mathcal{C}^k$-PARAMÉTRISATION DE S**.

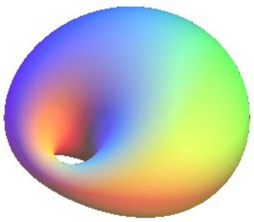
Par convention, le support d'une surface paramétrée est noté S.

Définition : Soit $(u, v) \in \mathcal{U}$. Une surface paramétrée $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite **RÉGULIÈRE EN** (u, v) lorsque $f_u(u, v)$ et $f_v(u, v)$ sont linéairement indépendants.

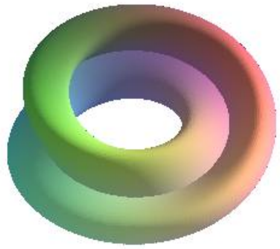
REMARQUE : De manière équivalente, f est régulière en (u, v) lorsque la différentielle $df_{(u,v)}$ est de rang deux.

Lemme 5.1 : Soient $(u, v) \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée. (u, v) est régulier si et seulement si $f_u(u, v) \wedge f_v(u, v) \neq 0$.

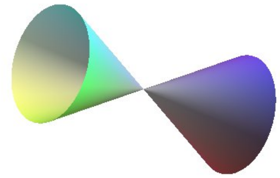
Exemple :



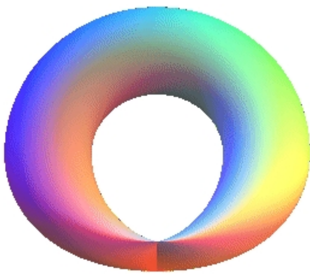
Cyclide de Dupin : régulier



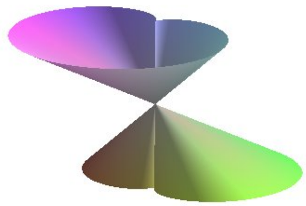
Bouteille de Klein : régulier



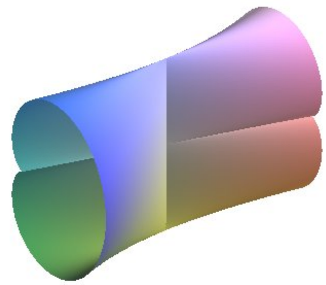
Cône : un point singulier



Bouteille de Klein pincée : deux points singuliers



Cône de base une cardioïde : une arête de points singuliers



Situation plus complexe

Définition : Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $k \geqslant 1$ ainsi que $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux surfaces paramétrées de classes $\mathcal{C}^k$.
f et g sont **ÉQUIVALENTES** si et seulement s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ tel que $g = f \circ \varphi$.
On dit que g est un **REPARAMÉTRAGE DE** f.
Une classe d'équivalence des surfaces équivalentes est appelée une **SURFACE GÉOMÉTRIQUE**.

Lemme 5.2 : Soient $(u, v) \in \mathcal{U}$ ainsi que f et g deux surfaces paramétrées équivalentes. Si f est régulière en (u, v) alors $g = f \circ \varphi$ est régulière en $(u', v') = \varphi^{-1}(u, v)$.

Démonstration **:** Immédiate puisque $d\varphi_{(u',v')}$ est un isomorphisme vectoriel et que $dg_{(u',v')} = df_{(u,v)} \circ d\varphi_{(u',v')}$.

□

Définition : Soient $(u, v) \in \mathcal{U}$ un point régulier et f une surface paramétrée. Le plan affine passant par $p = f(u, v)$ et dont le plan vectoriel associé est $\mathrm{Vect}\big(f_u(u, v), f_v(u, v)\big)$ est appelé **PLAN TANGENT DE** f **EN** (u, v).

Notation :
1) T_pS désigne le plan tangent de f en (u, v) lorsque p n'a pas d'antécédent par f.
2) $N(u, v)$ correspond au vecteur $\dfrac{f_u(u, v) \wedge f_v(u, v)}{|f_u(u, v) \wedge f_v(u, v)|}$.

Définition : Soit $(u, v) \in \mathcal{U}$ un point régulier et f une surface paramétrée. Posons $p = f(u, v)$. La droite affine $p + \mathrm{Vect}\big(N(u, v)\big)$ est appelé l'**ESPACE NORMAL À** S **EN** (u, v).

Notation : N_pS désigne l'espace normal à S en (u, v) lorsque p n'a qu'un antécédent.

Propriété 5.1 : Les sous-espaces affines T_pS et N_pS sont invariants par reparamétrages.

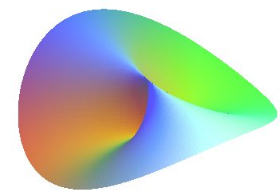
II Surface réglées

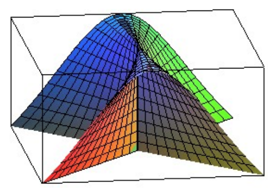
Définition : On appelle $\mathcal{C}^k$-**SURFACE RÉGLÉE** un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^3$ pour lequel il existe une paramétrisation de la forme

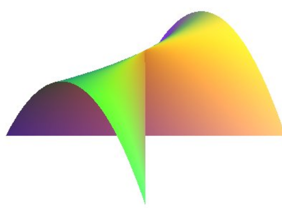
$$\begin{array}{rccl} f: & I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \alpha(u) + v\beta(u) \end{array}$$

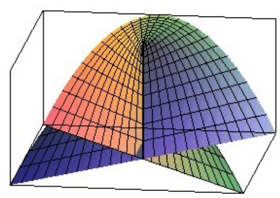
où I est un intervalle et $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple :





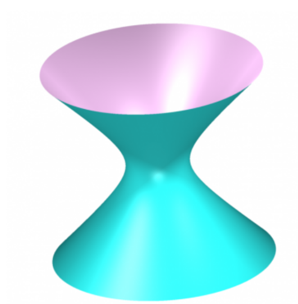




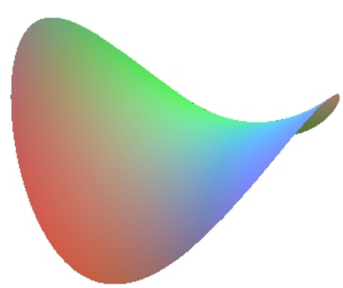
Proposition 5.1 : La famille des droites $v \longmapsto \alpha(u) + v\beta(u)$ constitue un recouvrement de $S = f(I \times \mathbb{R})$.

Proposition 5.2 :

1) L'hyperboloïde à une nappe est une surface réglée.
2) Le paraboloïde hyperbolique est une surface réglée.



Hyperboloïde à une nappe



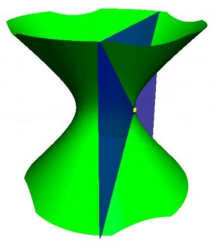
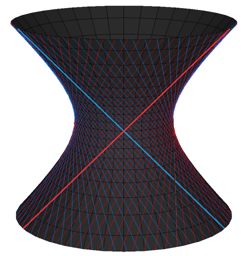
Paraboloïde hyperbolique

***Démonstration* :**

1) Quitte à composer par une application affine on peut supposer que l'hyperboloïde H a pour équation implicite

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

En effet, une application affine envoie droites sur droites.
L'intersection de H avec le plan $x = 1$ est la réunion des deux droites $D = \{x = 1, y = z\}$ et $D' = \{x = 1, y = -z\}$.

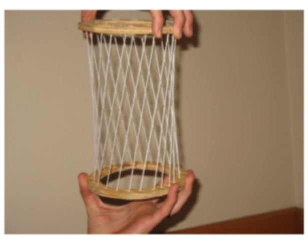
Puisque H est une surface de révolution, les familles

$$\mathcal{F} = \{R_{e_3,\theta}(D) \mid \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

et

$$\mathcal{F}' = \{R_{e_3,\theta}(D') \mid \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

forment respectivement une partition de H.




2) Pour le paraboloïde hyperbolique PH, quitte à composer par une application affine on peut toujours supposer qu'il admet pour équation implicite

$$x^2 - y^2 - z = 0$$

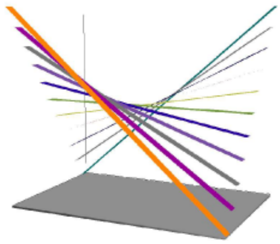
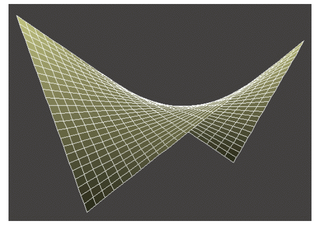
Soient $(P_a)_{a\in\mathbb{R}}$ et $(P'_a)_{a\in\mathbb{R}}$ les familles de plans définies respectivement par les équations

$$x - y = \text{ et } x + y = a$$

Les intersections de P_a et de P'_a avec le PH sont les droites

$$D_a : x - y = a \text{ et } z = 2ay + a^2$$

$$D'_a : x + y = a \text{ et } z = -2ay + a^2$$

Il est alors facile de vérifier que les familles

$$\mathcal{F} = \{D_a \mid a \in \mathbb{R}\} \text{ et } \mathcal{F}' = \{D'_a \mid a \in \mathbb{R}\}$$

forment chacune une partition du PH. $\square$

Un château d'eau

Un quartier de Kobe (Japon)

Une petite faim ?

Passage protégé entre deux immeubles (Manchester)

Où mène l'étude des courbes et surfaces...

III Graphes

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une surface paramétrée.

Définition : On appelle PARAMÉTRAGE CARTÉSIEN DE f un paramétrage de la forme

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & \big(x,\, y,\, h(x,y)\big) \end{array}$$

où $h : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple : L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,\, y,\, x^2 - y^2) \end{array}$$

est un paramétrage cartésien de

$$PH = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 - z = 0\big\}$$

Le théorème suivant affirme que tout support de surface paramétrée S peut être vu *localement* comme le graphe d'une fonction.

Théorème 5.1 : Soit $m_0 = (u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ un point régulier. Il existe un voisinage $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ de m_0 et une (éventuelle) permutation des coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ telle que $S_0 := f(\mathcal{U}_0)$ admette un paramétrage cartésien dans ces coordonnées.

***Démonstration* :** On écrit le paramétrage f sous la forme

$$(u,v) \longmapsto \big(\alpha(u,v), \beta(u,v), \gamma(u,v)\big)$$

Puisque m_0 est un point régulier, la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \alpha}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial \alpha}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial \beta}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

est de rang deux.
Quitte à permuter les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$, on peut supposer que le mineur

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \alpha}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial \alpha}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial \beta}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.
Observons que cette condition signifie que le sous-espace vectoriel $df_{m_0}(\mathbb{R}^2)$ ne contient pas l'axe (Oz).

Le théorème d'inversion locale affirme alors que

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\alpha(u,v), \beta(u,v)) \end{array}$$

est un difféomorphisme local, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}_0$ de m_0 tel que $\widetilde{g} = g_{|\mathcal{U}_0}$ soit un difféomorphisme sur son image $\mathcal{V} = g(\mathcal{U}_0)$.
La composition

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{U}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \overset{\widetilde{g}^{-1}}{\longmapsto} & (u,v) & \overset{f}{\longmapsto} & (x,\, y,\, \gamma \circ \widetilde{g}^{-1}(x,y)) \end{array}$$

donne un paramétrage cartésien. $\square$

Remarque : L'exemple de la sphère montre que l'on ne peut pas espérer un tel résultat *globalement*.

IV Position par rapport au plan tangent

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathbb{R}^3$. Notons

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & ax+by+cz+d \end{array}$$

une application affine définissant $\mathcal{P}$ i. e.

$$p \in \mathcal{P} \iff \varphi(p) = 0$$

On note également

$$\begin{array}{rccc} L(\varphi) : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & ax+by+cz \end{array}$$

sa partie linéaire, i. e. pour tout $v \in \mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \iff L(\varphi)(\overrightarrow{v}) = 0$$

Lemme 5.3 : Soient $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée et $m_0 \in \mathcal{U}$ un point régulier. Le plan $\mathcal{P}$ est tangent en m_0 si et seulement si au voisinage de m_0 on a

$$\varphi\big(f(m)\big) = o\big(\, \|\overrightarrow{m_0m}\| \,\big)$$

***Démonstration* :** Observons que le plan tangent réalise une approximation de la surface paramétrée à l'ordre 1.
Le développement de Taylor à l'ordre 1 de $\varphi \circ f$ s'écrit

$$\varphi \circ f(m) = \varphi \circ f(m_0) + d(\varphi \circ f)_{m_0}(\overrightarrow{m_0m}) + o(\|\overrightarrow{m_0m}\|)$$

Or

$$\varphi \circ f(m_0) = 0 \iff f(m_0) \in \mathcal{P}$$

D'autre part

$$d(\varphi \circ f)_{m_0}(\overrightarrow{m_0m}) = 0 \iff L\big(\varphi\big)\big(df_{m_0}(\overrightarrow{m_0m})\big) = 0$$

Ces égalités sont satisfaites pour tout m dans un voisinage de m_0 si et seulement si

$$\mathrm{Im}(df_{m_0}) \subseteq \mathrm{Ker}\big(L(\varphi)\big)$$

Puisque m_0 est régulier $dim\big(Im(df_{m_0})\big) = 2$ et la condition précédente s'écrit

$$\mathrm{Im}(df_{m_0}) = \mathrm{Ker}\big(L(\varphi)\big) = \overrightarrow{\mathcal{P}}$$

Au bilan

$$\varphi\big(f(m)\big) = o\big(\|\overrightarrow{m_0m}\|\big) \iff \mathcal{P} \text{ est tangent à } f \text{ en } m_0$$

$\square$

Soit $\mathcal{U}_0$ un voisinage de m_0 tel que $f(\mathcal{U}_0)$ admette un paramétrage cartésien :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & \big(x, y, h(x,y)\big) \end{array}$$

On suppose en outre que l'origine de $\mathbb{R}^3$ a été choisie telle que $f(m_0) = O$. Quitte à effectuer une translation, on peut également supposer que $\mathcal{V}$ contient l'origine de $\mathbb{R}^2$ et que $g(0,0) = f(m_0) = O$. Le développement de Taylor à l'ordre deux de h s'écrit

$$h(x,y) = px + qy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + o(x^2 + y^2)$$

où, avec les notations de Monge,

$$p = \frac{\partial h}{\partial x}(0,0) \qquad q = \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)$$

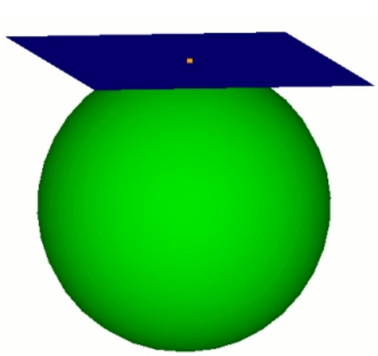
$$r = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) \qquad s = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0) \qquad t = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0)$$

D'après ce que l'on vient de voir, la forme quadratique

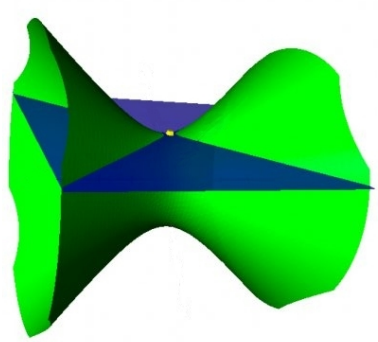
$$Q(x,y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$$

décrit la position de la surface par rapport à son plan tangent.

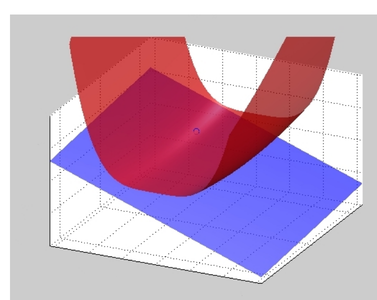
Définition :
Lorsque Q est définie (positive ou négative), i. e. si $rt - s^2 > 0$ le point $f(m_0)$ est dit **elliptique**.
Lorsque Q est non dégénérée mais change de signe, i. e. si $rt - s^2 < 0$ le point $f(m_0)$ est dit **hyperbolique**.
Lorsque Q est dégénérée mais non nulle le point $f(m_0)$ est dit **parabolique**.
Lorsque Q est nulle le point $f(m_0)$ est dit **planaire**.



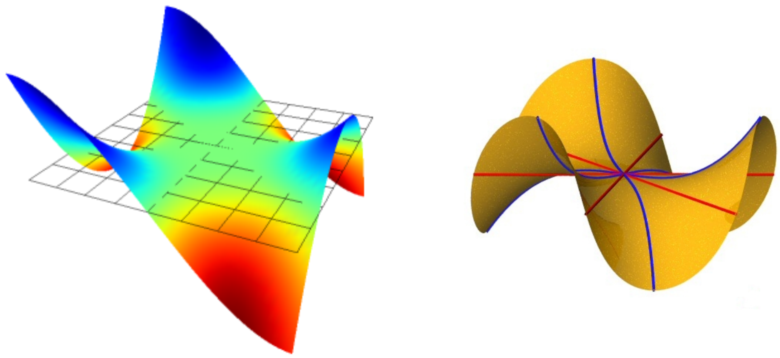
Point elliptique



Point hyperbolique



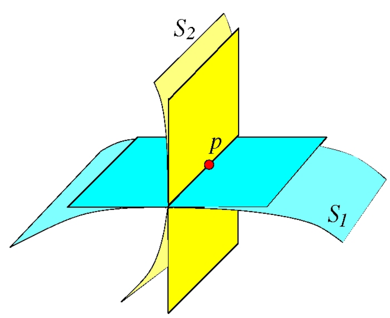
Point parabolique



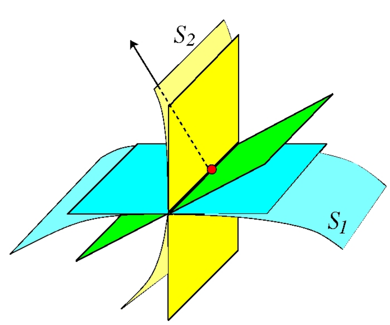
Point planaire (**selle de singe**)

V Intersections

Proposition 5.3 : Soient S_1 et S_2 deux supports de surfaces paramétrées provenant de $\mathcal{C}^1$-paramétrages injectifs et réguliers ainsi que $p \in S_1 \cap S_2$. Si T_pS_1 et T_pS_2 sont distincts (i. e. $\dim(T_pS_1 \cap T_pS_2) = 1$), alors au voisinage de p l'intersection $S_1 \cap S_2$ est le support d'une courbe paramétrée dont la tangente en p est l'intersection $T_pS_1 \cap T_pS_2$.



***Démonstration* :** On choisit un repère d'origine p et dont le troisième vecteur n'est ni dans $\overrightarrow{T_pS_1}$ ni dans $\overrightarrow{T_pS_2}$.



Localement S_1 et S_2 apparaissent comme des graphes au dessus du plan vert.

D'après un théorème précédent, $\forall i \in [\![1,2]\!]$, il existe un $\mathcal{C}^1$-paramétrages cartésiens de S_i

$$f_i : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & \big(x,\, y,\, h_i(x,y)\big) \end{array}$$

tel que $h_i(0,0) = 0$.
L'intersection est donc l'image par f_1 ou f_2 de

$$C := \big\{(x,y) \in \mathcal{V} \mid h_1(x,y) = h_2(x,y)\big\}$$

On pose $h := h_1 - h_2$. On a donc

$$C := \big\{(x,y) \in \mathcal{V} \mid h(x,y) = 0\big\}$$

Une des deux dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$ ou $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)$ est non nulle car sinon on aurait $T_pS_1 = T_pS_2$. Supposons que $\dfrac{\partial h}{\partial y}(0,0) \neq 0$. Puisque $h(0,0) = 0$, on peut appliquer le TFI et trouver I et J contenant 0 ainsi que $\varphi : I \longrightarrow J$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$C \cap (I \times J) = \big\{(x, \varphi(x)) \mid x \in I\big\}$$

La courbe $\gamma : I \ni x \longmapsto \big(x, \varphi(x)\big) \in I \times J$ est régulière puisque $\gamma'(x) = \big(1, \varphi'(x)\big) \neq (0,0)$. La courbe $f_1 \circ \gamma$ est également régulière car f_1 étant un paramétrage cartésien, il est nécessairement régulier. Par construction, le support de $f_1 \circ \gamma$ est l'intersection de $S_1 \cap S_2$ avec un voisinage de p dans $\mathbb{R}^3$. De plus

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_1 \circ \gamma)(0) \in T_pS_1$$

Bien sûr $f_2 \circ \gamma = f_1 \circ \gamma$ et donc

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_1 \circ \gamma)(0) = \frac{\partial}{\partial x}(f_2 \circ \gamma)(0) \in T_pS_2$$

Au bilan

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_1 \circ \gamma)(0) = \frac{\partial}{\partial x}(f_2 \circ \gamma)(0) \in T_pS_1 \cap T_pS_2$$

$\square$

VI Gaspard Monge (1746-1818)

FIGURE 5.13 – Gaspard Monge (1746-1818)

• Savant illustre, fondateur de la *géométrie descriptive* et homme politique ordinaire, né à Beaune et mort à Paris. Il fut l'un des fondateurs de l'Ecole polytechnique où il devint aussi professeur.
• La géométrie descriptive est une méthode pour résoudre de façon graphique sur le papier des problèmes d'intersections et d'ombres entre volumes et surfaces définis de façon géométrique dans l'espace à trois dimensions.

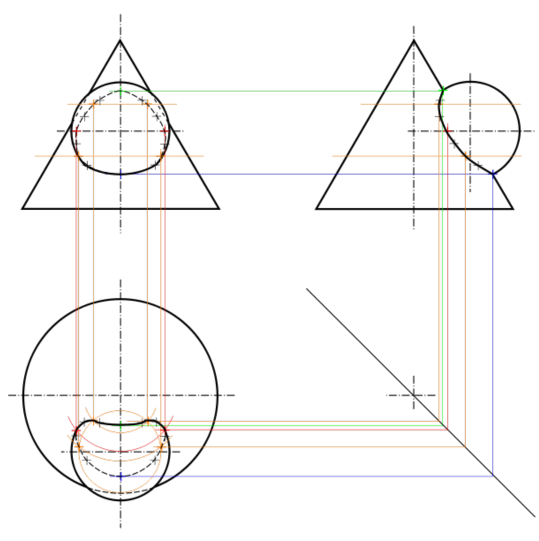


FIGURE 5.14 – Un exemple : l'intersection d'un cône et d'une sphère.

• La Révolution française, qu'il soutient dès 1789, change complètement le cours de sa vie, il quitte l'Académie des sciences pour devenir ministre de la marine.
• Il pousse à l'instauration d'un système de poids et mesures fondé sur le système décimal.Il propose d'instaurer un calendrier avec des semaines de dix jours : le calendrier républicain qui ne durera pas

au-delà de 1806.

• Sous Napoléon, Monge est nommé membre du Sénat à sa création. Il en devient président ensuite. "Monge était le plus doux, le plus faible des hommes, et n'aurait pas laissé tuer un poulet s'il eut fallu en faire l'exécution lui-même, ou seulement devant lui. Ce forcené républicain, à ce qu'il croyait, avait pourtant un espèce de culte pour moi, c'était de l'adoration : il m'aimait comme on aime sa maîtresse" - Napoléon Bonaparte