M1G S1 : Géométrie

Vincent Borrelli Mathilde Gaillard Matthieu Jentile

Sébastien Pierrisnard Michael Yang

Université Claude Bernard Lyon 1

Résumé

Ce document est un polycopié de cours du module Géométrie enseigné lors du premier semestre du Master 1 Mathématiques Générales (M1G) de Lyon, réalisé par Monsieur Vincent Borelli. L'entièreté du contenu du document a été fournie par M. Borelli pendant ses enseignements lors de l'année scolaire 2020-2021.

Le but de ce polycopié est de fournir aux élèves de M1G un document de cours parallèle aux diapositives qu'utilise M. Borelli lors de ses cours, ceci afin d'en faciliter les lectures. Ainsi, le contenu est identiquement le même et ne contient aucune note personnelle.
Ce document a été réalisé en collaboration par Mathilde Gaillard, Matthieu Jentile, Sébastien Pierrisnard, Michael Yang et Jules Armand. Chacun des collaborateurs est issu de la promotion 2020-2021 du M1G et ont donc suivis les enseignements de M. Borelli.

Malgré les précautions de chacun des auteurs, il est possible que des erreurs se soient glissées çà et là. Dans ce cas (ou pour toute autre remarque vis-à-vis de ce document), il est recommandé de contacter M. Borelli, par exemple à l'adresse borrelli@math.univ-lyon1.fr.

Les collaborateurs sont profondément reconnaissants envers M. Borelli pour sa confiance en eux dans l'élaboration de ce document.

Table des matières

Chapitre 7

Courbures

Soient $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière et injective de support S ainsi que $p = f(u, v)$.

I Application tangentes

Définition : Soit $\overline{h} : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
On dit que $\overline{h}$ est **DIFFÉRENTIABLE** lorsque $\overline{h} \circ f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'est.
On dit que $\overline{h}$ est **DE CLASSE** $\mathcal{C}^k$ lorsque $\overline{h} \circ f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition-Définition 1 : Soient $X \in T_pS$ et ξ l'unique vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $df_{(u,v)}(\xi) = X$. L'application

$$d\overline{h}_p(X) : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{T_pS} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X & \longmapsto & d(\overline{h} \circ f)_{(u,v)}(\xi) \end{array}$$

est linéaire. On appelle cette application l'**APPLICATION TANGENTE** de $\overline{h}$ en p.

Proposition 7.1 : L'application tangente $d\overline{h}_p$ est **indépendante** d'un reparamétrage de f.

Démonstration :
Soit $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ un reparamétrage de f. On pose $g = f \circ \varphi$ et on note (u', v') le point tel que $\varphi(u', v') = (u, v)$. En particulier $p = f(u, v) = g(u', v')$.
Soit η l'unique vecteur tel que $dg_{(u',v')}(\eta) = X$. Puisque $g = f \circ \varphi$, on a nécessairement
$\xi = d\varphi_{(u',v')}(\eta)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} d(\overline{h} \circ g)_{(u',v')}(\eta) &= d(\overline{h} \circ f \circ \varphi)_{(u',v')}(\eta) \\ &= d(\overline{h} \circ f)_{\varphi(u',v')}\left(d\varphi_{(u',v')}(\eta)\right) \\ &= d(\overline{h} \circ f)_{(u,v)}(\xi) \end{aligned}$$

□

Exemple :

Application normale : Il s'agit de l'application

$$\begin{array}{rccc} n: & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p & \longmapsto & N(u,v) = \frac{f_u(u,v) \wedge f_v(u,v)}{|\, f_u(u,v) \wedge f_v(u,v)\,|} \end{array}$$

où (u,v) est tel que $f(u,v) = p$. En particulier $N = n \circ f$.

Il est clair que n est à valeur dans $\mathbb{S}^2$. Puisque, $\forall (u,v) \in S$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\Big\langle\, dN_{(u,v)}(\xi), N(u,v)\,\Big\rangle = 0$$

On a

$$dn_p : \overrightarrow{T_p S} \longrightarrow \mathrm{Vect}\big(\, n(p)\,\big)^{\perp}$$

Puisque $\overrightarrow{T_p S} = \mathrm{Vect}\big(\, n(p)\,\big)^{\perp}$, la différentielle dn_p est un endomorphisme.

Définition : L'opposé de la différentielle dn_p est appelé **ENDOMORPHISME DE WEINGARTEN**.

Notation : W_p désigne l'endomorphisme de Weingarten.

II Courbures

Définition : On appelle COURBURE DE GAUSS EN p le déterminant $\det(W_p)$ de l'endomorphisme de Weingarten.
On appelle COURBURE MOYENNE EN p la demi-trace $\dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(W_p)$ de W_p.

Notation :
1) $K(p)$ désigne la **courbure de Gauss** en p.
2) $H(p)$ désigne la **courbure moyenne** en p.

Définition : On appelle COURBES GÉOMÉTRIQUES ORIENTÉES $\mathcal{C}^k$ les classes d'équivalence de la relation

$$\gamma_0 \underset{k}{\overset{\circ}{\sim}} \gamma_1 \iff \gamma_1 = \gamma_0 \circ \varphi \text{ où } \varphi \text{ est un } \mathcal{C}^k\text{-difféomorphisme tel que } \varphi' > 0$$

Proposition 7.2 : L'endomorphisme de Weingarten est auto-adjoint. En particulier, il est diagonalisable dans une base orthonormée.

***Démonstration* :**
Il faut montrer que $\forall p \in S$, $\forall X, Y \in \operatorname{Vect}\big(n(p)\big)^\perp$,

$$\langle\, dn_p(X), Y \,\rangle = \langle\, X, dn_p(Y)\,\rangle$$

Soit (e_1, e_2) une base de $\operatorname{Vect}\big(n(p)\big)^\perp$. Par (bi)linéarité, il suffit de montrer la relation pour les couples (e_1, e_1), (e_2, e_2) et (e_1, e_2). Seul le dernier cas est non trivial.
Soit (e_u, e_v) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On choisit

$$e_1(p) = df_{(u,v)}(e_u) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \quad \text{et} \quad e_2(p) = df_{(u,v)}(e_v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$

On a

$$\begin{aligned} dn_p(e_1) &= d(n \circ f)_{(u,v)}(e_u) \\ &= dN_{(u,v)}(e_u) \\ &= \frac{\partial N}{\partial u}(u,v) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\langle dn_p(e_1), e_2 \rangle = \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\rangle$$

De $\left\langle N, \dfrac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = 0$, on déduit

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\rangle = -\left\langle N(u,v), \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}(u,v) \right\rangle$$

Finalement

$$\langle\, dn_p(e_1), e_2 \,\rangle = -\left\langle N(u,v), \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,(u,v) \right\rangle$$

De la même manière,

$$dn_p(e_2) = \frac{\partial N}{\partial v}(u,v)$$

Il suit que

$$\left\langle\, e_1, dn_p(e_2) \,\right\rangle = -\left\langle N(u,v), \frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\,(u,v) \right\rangle$$

L'égalité recherchée se déduit du caractère $\mathcal{C}^2$ de f. □

Définition : Les valeurs propres de W_p sont appelées les **COURBURES PRINCIPALES**.
Les vecteurs propres de W_p sont appelés les **DIRECTIONS PRINCIPALES**.

Par convention, les valeurs propres de W_p sont notées $\lambda_1(p)$ et $\lambda_2(p)$.

Proposition 7.3 :
1) $K(p) = \lambda_1 \lambda_2$.
2) $H(p) = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

Propriété 7.1 : Puisque W_p est auto-adjoint, II_p est symétrique.

Par convention, on notera

$$\mathcal{L} = -\langle N_u, f_u \rangle = \langle N, f_{uu} \rangle \quad \mathcal{N} = -\langle N_v, f_v \rangle = \langle N, f_{vv} \rangle$$

$$\mathcal{M} = -\langle N_u, f_v \rangle = -\langle N_v, f_u \rangle = \langle N, f_{uv} \rangle$$

La matrice de II_p dans la base (f_u, f_v) est donc

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

En particulier

$$II_p(X,Y) = (X_u, X_v) \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_u \\ Y_v \end{pmatrix}$$

La relation $\forall X, Y \in T_pS,\ \ II_p(Y,X) = \left\langle\, Y, W_p(X) \,\right\rangle$ s'écrit, dans la base (f_u, f_v), sous forme matricielle

$$(Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix} = (Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est la matrice de W_p dans la base (f_u, f_v). Ainsi

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La paramétrisation f étant régulière on a $EG - F^2 > 0$. La matrice de la première forme fondamentale dans la base (f_u, f_v) est donc inversible et

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\mathcal{L} - F\mathcal{M} & G\mathcal{M} - F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M} - F\mathcal{L} & E\mathcal{N} - F\mathcal{M} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Proposition 7.4 : La matrice de l'opérateur de Weingarten W_p dans la base (f_u, f_v) est

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\mathcal{L} - F\mathcal{M} & G\mathcal{M} - F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M} - F\mathcal{L} & E\mathcal{N} - F\mathcal{M} \end{pmatrix}$$

Corollaire 7.1 :
1) $K(p) = \dfrac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2}$.
2) $H(p) = \dfrac{1}{2} \dfrac{E\mathcal{N} + G\mathcal{L} - 2F\mathcal{M}}{EG - F^2}$.
3) $\lambda_1(p)$ et $\lambda_2(p)$ sont les solutions de $\lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0$ (éventuellement $\lambda_1(p) = \lambda_2(p)$ en cas de racine double).

***Démonstration* :**
1) Il suffit de calculer la trace de

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\mathcal{L} - F\mathcal{M} & G\mathcal{M} - F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M} - F\mathcal{L} & E\mathcal{N} - F\mathcal{M} \end{pmatrix}$$

2) Pour le calcul du déterminant, il est plus malin de partir de l'expression

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

pour obtenir directement celle de K.
3) W_p étant auto-adjoint pour I_p, il est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On est donc assuré que le polynôme caractéristique $\lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0$ possède deux racines réelles ou une double. $\square$

Proposition 7.5 : $\forall p \in S,\ \ H^2(p) \geqslant K(p)$.

***Démonstration* :**
Le polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0$$

possède deux racines réelles ou une double. Par conséquent son discriminant $\Delta(P)$ est positif ou nul. Or $\Delta(P) = 4\big(H^2(p) - K(p)\big)$. $\square$

Exemple :

1) **Plan** :

Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,0) \end{array}$$

Un calcul direct montre que $E = G = 1$, $F = 0$, puis $\mathcal{L} = \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0$, donc $\forall p \in P := f(\mathbb{R}^2)$, $W_p = 0$. Par conséquent $K(p) = H(p) = 0$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Enfin, toute direction de P est direction principale.

2) **Cylindre** :

Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u)\,,\,\sin(u)\,,\,v) \end{array}$$

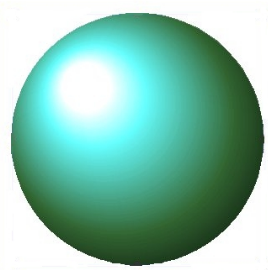
On a déjà vu que $E = G = 1$ et $F = 0$. $N(u,v) = (\cos(u)\,,\,\sin(u)\,,\,v)$ d'où $\mathcal{L} = 1$ et $\mathcal{M} = \mathcal{N} = 0$.
Dans la base (f_u, f_v) la matrice de W_p est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $K(p) = 0$, $H(p) = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_1(p) = 1$ et $\lambda_2(p) = 0$.
Les directions principales sont données par f_u et f_v.

3) **Sphère** : Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)) \end{array}$$



On a déjà vu que $E = \sin^2(v)$, $F = 0$ et $G = 1$. $N(u,v) = -f(u,v)$ d'où $\mathcal{L} = \sin^2(v)$, $\mathcal{M} = 0$ et $\mathcal{N} = 1$.
Dans la base (f_u, f_v) la matrice de W_p est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $W_p = \mathrm{Id}$ d'où $K(p) = 1,\ H(p) = 1$ et $\lambda_1(p) = \lambda_2(p) = 1$.
Enfin, toute direction est direction principale.

Exercices :
1) Refaire ces calculs pour une sphère de rayon R et constater que

$$W_p = \frac{1}{R}\,\mathrm{Id},\ \ K(p) = \frac{1}{R^2} \text{ et } H(p) = \frac{1}{R}$$

2) Refaire également ces calculs pour un cylindre dont la base un cercle de rayon R.

III Le mathématicien de la séance

Julius Weingarten (1836-1910)

D'origine très modeste, il n'obtient pas de poste universitaire à la hauteur de son talent.

Il est connu pour ses recherches sur les familles de surfaces isométriques entre elles.

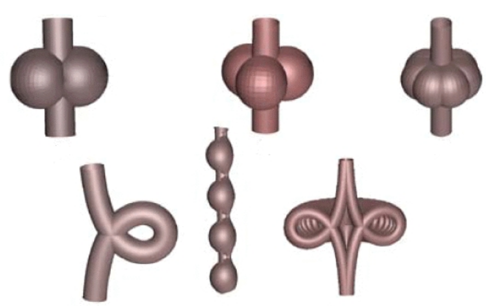
Jean Darboux (Pote)

Luigi Bianchi (Pote)

Une surface S pour laquelle il existe une fonction $F(.,.)$ telle que

$$\forall p \in S,\ F(\lambda_1(p), \lambda_2(p)) = 0$$

est appelée **surface de Weingarten**.



Quelques surfaces de Weingarten

IV Le Theorema egregium

Théorème 7.1 (Theorema egregium (Gauss, 1827)) : Soient $f_1 : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $f_2 : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux surfaces paramétrées de classe $\mathcal{C}^3$. Si f_1 et f_2 sont **isométriques** alors elles ont **même courbure de Gauss**.

***Démonstration* :**
C'est un long calcul qui exprime K en termes de E, F et G et de leurs dérivées. Il existe une démonstration plus conceptuelle mais elle n'est pas accessible à ce niveau du cours.
Puisque

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

la formule

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2}$$

s'écrit

$$\begin{aligned} K(EG-F^2)^2 &= \langle f_{uu} \, , \, f_u \wedge f_v \rangle \, \langle f_{vv} \, , \, f_u \wedge f_v \rangle - \langle f_{uv} \, , \, f_u \wedge f_v \rangle^2 \\ &= \det(f_{uu} \, , \, f_u, f_v) \, \det(f_{vv} \, , \, f_u \, , \, f_v) - \det(f_{uv} \, , \, f_u \, , \, f_v)^2 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \det(X,Y,Z) \cdot \det(X',Y,Z) &= \det(X,Y,Z) \cdot \det{}^t(X',Y,Z) \\ &= \det\big((X,Y,Z)^t(X',Y,Z)\big) \\ &= \det \begin{pmatrix} X.X' & X.Y & X.Z \\ Y.X' & Y.Y & Y.Z \\ Z.X' & Z.Y & Z.Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus,

$$\det(X,Y,Z)^2 = \det \begin{pmatrix} X.X & X.Y & X.Z \\ Y.X & Y.Y & Y.Z \\ Z.X & Z.Y & Z.Z \end{pmatrix}$$

En remplaçant, on trouve

$$K(EG-F^2)^2 = \begin{vmatrix} \langle f_{uu}, f_{vv} \rangle & \langle f_{uu}, f_u \rangle & \langle f_{uu}, f_v \rangle \\ \langle f_u, f_{vv} \rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{vv} \rangle & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle f_{uv}, f_{uv} \rangle & \langle f_{uv}, f_u \rangle & \langle f_{uv}, f_v \rangle \\ \langle f_u, f_{uv} \rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{uv} \rangle & F & G \end{vmatrix}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & \blacklozenge \\ \bigstar & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a' & \spadesuit \\ \clubsuit & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a - a' + a' & \blacklozenge \\ \bigstar & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a' & \spadesuit \\ \clubsuit & A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a - a' & \blacklozenge \\ \bigstar & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & \blacklozenge \\ 0 & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a' & \spadesuit \\ \clubsuit & A \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a-a' & \blacklozenge \\ \bigstar & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \spadesuit \\ \clubsuit & A \end{vmatrix}$$

Au bilan

$$K(EG-F^2)^2 = \begin{vmatrix} \langle f_{uu}, f_{vv}\rangle - \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle & \langle f_{uu}, f_u\rangle & \langle f_{uu}, f_v\rangle \\ \langle f_u, f_{vv}\rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{vv}\rangle & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \langle f_{uv}, f_u\rangle & \langle f_{uv}, f_v\rangle \\ \langle f_u, f_{uv}\rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{uv}\rangle & F & G \end{vmatrix}$$

En dérivant $E = \langle f_u \,,\, f_u\rangle$ on obtient $\langle f_{uu} \,,\, f_u\rangle = \dfrac{1}{2}\,E_u$. De même $\langle f_{vv} \,,\, f_v\rangle = \dfrac{1}{2}\,G_v$, $\langle f_{uv} \,,\, f_u\rangle = \dfrac{1}{2}E_v$ et $\langle f_{vu} \,,\, f_v\rangle = \dfrac{1}{2}\,G_u$.
Dérivons maintenant $F = \langle f_u \,,\, f_v\rangle$. On obtient $F_u = \langle f_{uu}, f_v\rangle + \langle f_u \,,\, f_{uv}\rangle$, d'où

$$\langle f_{uu} \,,\, f_v\rangle = F_u - \frac{1}{2}\,E_v$$

De même

$$\langle f_{vv} \,,\, f_u\rangle = F_v - \frac{1}{2}\,G_u$$

Il reste le terme le plus délicat : $\langle f_{uu}, \,,\, f_{vv}\rangle - \langle f_{uv} \,,\, f_{uv}\rangle$. Pour le traiter on va dériver les relations précédentes.
On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\langle f_{uu} \,,\, f_v\rangle &= \langle f_{uuv} \,,\, f_v\rangle + \langle f_{uu} \,,\, f_{vv}\rangle \\ \frac{\partial}{\partial u}\langle f_{vv} \,,\, f_u\rangle &= \langle f_{vvu} \,,\, f_u\rangle + \langle f_{uu} \,,\, f_{vv}\rangle \\ \frac{\partial}{\partial v}\langle f_{uv} \,,\, f_u\rangle &= \langle f_{vvu} \,,\, f_u\rangle + \langle f_{uv} \,,\, f_{uv}\rangle \\ \frac{\partial}{\partial u}\langle f_{uv} \,,\, f_v\rangle &= \langle f_{uuv} \,,\, f_v\rangle + \langle f_{uv} \,,\, f_{uv}\rangle \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\langle f_{uu} \,,\, f_{vv}\rangle - \langle f_{uv} \,,\, f_{uv}\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v}\langle f_{uu} \,,\, f_v\rangle + \frac{\partial}{\partial u}\langle f_{vv} \,,\, f_u\rangle - \frac{\partial}{\partial v}\langle f_{uv} \,,\, f_u\rangle - \frac{\partial}{\partial u}\langle f_{uv} \,,\, f_v\rangle\right)$$

En remplaçant, il vient

$$\langle f_{uu} \,,\, f_{vv}\rangle - \langle f_{uv} \,,\, f_{uv}\rangle = -\frac{1}{2}\,G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}\,E_{vv}$$

Ainsi K ne s'exprime qu'en fonction de E, F, G et de leurs dérivées premières et secondes. $\square$

Au passage nous venons d'établir la *formule de Brioschi* :

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\,G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}\,E_{vv} & \frac{1}{2}\,E_u & F_u - \frac{1}{2}\,E_v \\ F_v - \frac{1}{2}\,G_u & E & F \\ \frac{1}{2}\,G_v & F & G \end{vmatrix} - \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\,E_v & \frac{1}{2}\,G_u \\ \frac{1}{2}\,E_v & E & F \\ \frac{1}{2}\,G_u & F & G \end{vmatrix}$$

... qui n'est pas à apprendre par cœur, on s'en doute !

Exemple :
1) On a constaté le théorème précédent pour le cas du plan et du cylindre : ces deux surfaces paramétrées sont isométriques (même première forme fondamentale) et leur courbure de Gauss est effectivement la même (nulle). En revanche, les courbures moyennes sont différentes.

2) Le plan et la sphère n'ont pas la même courbure de Gauss (l'une est nulle, l'autre non), donc les deux surfaces ne sont pas isométriques. Il n'existe pas de carte plane $\mathcal{C}^3$ non menteuse de la Terre !

Remarque : La réciproque du *Theorema egregium* est fausse. Deux surfaces paramétrées peuvent avoir la même courbure sans être isométriques.

Exercice : Montrer que

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u\sin(v)\,,\, u\cos(v)\,,\, \ln(u)) \end{array}$$

et

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u\cos(v)\,,\, u\sin(v)\,,\, v) \end{array}$$

ont même courbure de Gauss mais qu'elles ne sont pas isométriques.

Le *Theorema egregium* dans le texte !

DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. VIII. OCTOBR. MDCCCXXVII.

Supponamus, superficiem nostram curvam explicari posse in aliam superficiem, curvam seu planam, ita ut cuivis puncto prioris superficiei per coordinatas x, y, z determinato respondeat punctum determinatum superficiei posterioris, cuius coordinatae sint x', y', z'. Manifesto itaque x', y', z' quoque considerari possunt tamquam functiones indeterminatarum p, q, unde pro elemento $\sqrt{(\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2)}$ prodibit expressio talis

$$\sqrt{(E'\mathrm{d}p^2 + 2F'\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + G'\mathrm{d}q^2)}$$

denotantibus etiam E', F', G' functiones ipsarum p, q. At per ipsam notionem *explicationis* superficiei in superficiem patet, elementa in utraque superficie correspondentia necessario aequalia esse, adeoque identice fieri

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'$$

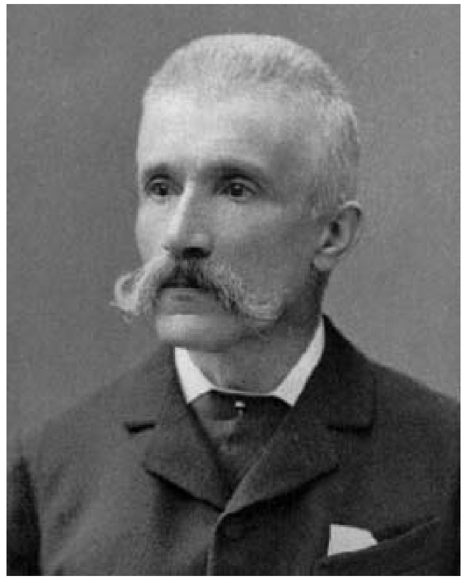
Quodsi iam has expressiones diversas in formula pro mensura curvaturae in fine art. praec. eruta substituimus, pervenimus ad formulam sequentem, e solis quantitatibus E, F, G atque earum quotientibus differentialibus primi et secundi ordinis concinnatam:

$$\begin{aligned} 4(EG-FF)^2 k = \; & E\Big(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} - 2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} + \Big(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\Big)^2\Big) \\ & + F\Big(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} - \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} - 2\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q} + 4\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q} - 2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\Big) \\ & + G\Big(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} - 2\cdot\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q} + \Big(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\Big)^2\Big) \\ & - 2(EG-FF)\Big(\frac{\mathrm{dd}E}{\mathrm{d}q^2} - 2\frac{\mathrm{dd}F}{\mathrm{d}p.\mathrm{d}q} + \frac{\mathrm{dd}G}{\mathrm{d}p^2}\Big) \end{aligned}$$

Le *Theorema egregium* chez Dr. Nozman !

La courbure de Gauss par Dr. Nozman

V Francesco Brioschi



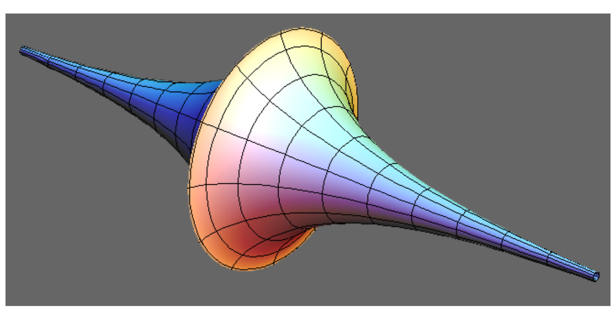
Francesco Brioschi (1824-1897)

Homme politique et mathématicien : il joua un rôle de premier plan dans la formation de l'État italien.

Convaincu de la nécessité de régénérer l'université et en particulier l'enseignement scientifique et technique sur le modèle de la Révolution française, Brioschi fut impliqué dans des émeutes et fut brièvement incarcéré.

Au cours de la période d'unification de l'Italie, il devient ministre de l'instruction publique.

Il s'impliqua largement dans le fonctionnement des institutions scientifiques, s'assura la collaboration d'**Enrico Betti** et de **Luigi Cremona**. Il encouragea la carrière de jeunes scientifiques dont **Eugenio Beltrami**.



Surface de Beltrami ou pseudo-sphère