

M1G S1 : Géométrie

Vincent BORRELLI

Mathilde GAILLARD

Matthieu JENTILE

Sébastien PIERRISNARD

Michael YANG



Université Claude Bernard



Lyon 1

Résumé

Ce document est un polycopié de cours du module Géométrie enseigné lors du premier semestre du Master 1 Mathématiques Générales (M1G) de Lyon, réalisé par Monsieur Vincent Borelli. L'entièreté du contenu du document a été fournie par M. Borelli pendant ses enseignements lors de l'année scolaire 2020-2021.

Le but de ce polycopié est de fournir aux élèves de M1G un document de cours parallèle aux diapositives qu'utilise M. Borelli lors de ses cours, ceci afin d'en faciliter les lectures. Ainsi, le contenu est identiquement le même et ne contient aucune note personnelle.

Ce document a été réalisé en collaboration par Mathilde Gaillard, Matthieu Jentile, Sébastien Pierrisnard, Michael Yang et Jules Armand. Chacun des collaborateurs est issu de la promotion 2020-2021 du M1G et ont donc suivis les enseignements de M. Borelli.

Malgré les précautions de chacun des auteurs, il est possible que des erreurs se soient glissées çà et là. Dans ce cas (ou pour toute autre remarque vis-à-vis de ce document), il est recommandé de contacter M. Borelli, par exemple à l'adresse borrelli@math.univ-lyon1.fr.

Enfin, toutes les images présentes dans ce polycopié ne sont pas forcément libres de droits. Il n'est donc pas autorisé au lecteur de les utiliser comme bon lui semble, si ce n'est pour une utilisation personnelle.

Les collaborateurs sont profondément reconnaissants envers M. Borelli pour sa confiance en eux dans l'élaboration de ce document.

Table des matières

- 8 Courbes remarquables sur les surfaces 2**
- I Courbure normale 2
- II Courbes asymptotiques 5
- III Lignes de courbures 9
- IV Géodésiques 12
- V Jean-Baptiste Meusnier de La Place (1754-1793) 16
- VI Charles Dupin (1784-1873) 17

Chapitre 8

Courbes remarquables sur les surfaces

I Courbure normale

Soient $f : U \rightarrow S$ une surface paramétrée régulière et injective, $p = f(u, v) \in S$ et $n(p)$ une normale unitaire en p .

Définition :

Soit $X \in T_p S$ unitaire. Le nombre $II_p(X, X)$ est appelée la **COURBURE NORMALE EN p DANS LA DIRECTION X** .

Notation :

$k_X(p)$ désigne la courbure normale en p dans la direction X .

Théorème 8.1 (Meusnier) :

Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ une courbe régulière telle que $\gamma(0) = p$. On note $k(p)$ sa courbure principale, $n_{princ}(p)$ sa normale principale et X un vecteur tangent unitaire à γ en 0.

$$k_X(p) = \langle n_{princ}(p), n(p) \rangle k(p)$$

Démonstration :

On peut toujours supposer que γ est paramétrée par la longueur d'arc et que $\gamma'(0) = X$.

On a

$$\begin{aligned} k_X &= II_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) \\ &= \langle -dn_p(\gamma'(0)), \gamma'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \gamma'(0) \rangle \text{ où on a noté } N = n \circ \gamma \end{aligned}$$

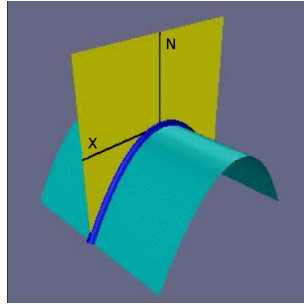
Puisque, pour tout s , $\langle N(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, on en déduit

$$\langle N'(s), \gamma'(s) \rangle = -\langle N(s), \gamma''(s) \rangle$$

Donc

$$k_X = \langle N(0), \gamma''(0) \rangle = \langle n, kn_{princ} \rangle$$

□



A tout $X \in T_p S$ unitaire on associe le plan affine $P_X = p + \text{Vect}(X, n(p))$. D'après un résultat du CM-S1, au voisinage de p , l'intersection de $P_X \cap S$ est le support d'une courbe paramétrée $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow P_X$. On peut toujours supposer qu'elle est paramétrée par la longueur d'arc et que de plus $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$.

On oriente le plan P_X par $(X, n(p))$ et on note k_{alg} la courbure algébrique de γ en 0. Alors

$$k_X = \langle n, kn_{princ} \rangle = \langle n, k_{alg} n_{alg} \rangle = \pm k_{alg}$$

Théorème 8.2 (Formule d'Euler pour les courbures) :

La fonction

$$\begin{aligned} T_p^1 S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto k_X \end{aligned}$$

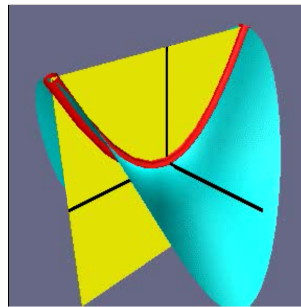
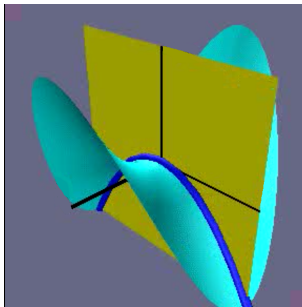
atteint ses extrema en les vecteurs propres (unitaires) de l'opérateur de Weingarten W_p .

Si X_1 est un tel vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 et si X fait un angle θ avec X_1 alors

$$k_X = k_{X_1} \cos^2(\theta) + k_{X_2} \sin^2(\theta)$$

où X_2 est un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ_2 .

De plus $\lambda_1 = k_{X_1}$ et $\lambda_2 = k_{X_2}$.



Démonstration :

Par définition

$$k_X = II_p(X, X) = \langle -dn_p(X), X \rangle$$

Le vecteur X étant unitaire, on écrit

$$X = \cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2$$

On a

$$-dn_p(X) = \cos(\theta)\lambda_1 X_1 + \sin(\theta)\lambda_2 X_2$$

d'où

$$k_X = \cos^2(\theta)\lambda_1 + \sin^2(\theta)\lambda_2$$

□

Proposition 8.1 :

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors X_1 et X_2 sont **orthogonaux**.

Corollaire 8.1 :

Soit $X_\theta = \cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2$. La moyenne de la fonction $\theta \mapsto k_{X_\theta}$ est la courbure moyenne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_{X_\theta} d\theta = H(p)$$

Démonstration :

C'est un calcul immédiat qui utilise la formule d'Euler pour les courbures :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_{X_\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\lambda_1 + \sin^2(\theta)\lambda_2 d\theta \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \end{aligned}$$

□

II Courbes asymptotiques

Définition :

Soit $p \in S$. On appelle **DIRECTION ASYMPTOTIQUE DE S AU POINT p** une direction de $T_p S$ pour laquelle la courbure normale est nulle. On appelle **COURBE ASYMPTOTIQUE** une courbe $\bar{\gamma} : I \rightarrow S$ régulière telle que $\forall t \in I, k_{\bar{\gamma}'(t)} = 0$.

REMARQUE :

Autrement dit, une courbe asymptotique est une courbe régulière $\bar{\gamma} : I \rightarrow S$ telle que pour tout $t \in I$, l'espace affine $\bar{\gamma}(t) + \text{Vect}(\bar{\gamma}'(t))$ est une direction asymptotique.

Puisque

$$k_X = \cos^2(\theta) \lambda_1 + \sin^2(\theta) \lambda_2$$

il n'y a pas de direction asymptotique en un point où $K(p) > 0$ et si $K(p) < 0$ il y a deux directions asymptotiques sur $T_p S$.

Lemme 8.1 :

Soient $f : U \rightarrow S$ une surface paramétrée régulière et injective et

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow U \\ t &\longmapsto (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

$\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ est une courbe asymptotique si et seulement si

$$\mathcal{L} \cdot (u')^2 + 2\mathcal{M} \cdot u'v' + \mathcal{N} \cdot (v')^2 = 0$$

Démonstration :

Puisque $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ on a

$$\bar{\gamma}'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

donc

$$\bar{\gamma}'(t) = u'(t) f_u(\gamma(t)) + v'(t) f_v(\gamma(t))$$

D'autre part, si $X = X_u f_u + X_v f_v$ alors

$$k_X = II_p(X, X) = \mathcal{L} \cdot X_u^2 + 2\mathcal{M} \cdot X_u X_v + \mathcal{N} \cdot X_v^2$$

car la matrice de la seconde forme fondamentale dans la base (f_u, f_v) est précisément

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

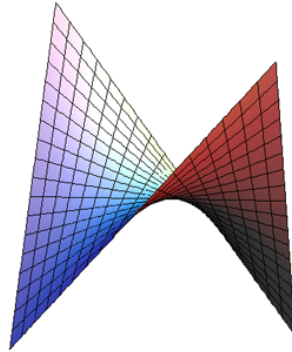
Par conséquent

$$k_{\bar{\gamma}'} = \mathcal{L} \cdot (u')^2 + 2\mathcal{M} \cdot u'v' + \mathcal{N} \cdot (v')^2$$

Enfin, $\bar{\gamma}$ est une courbe asymptotique **ssi** pour tout $t \in I$, on a $k_{\bar{\gamma}'(t)} = 0$. □

Exemple :

Paraboloïde hyperbolique



Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto \left(x, y, \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \right)$$

Un calcul montre que

$$N(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puis que $\mathcal{L} = 1$, $\mathcal{M} = 0$ et $\mathcal{N} = -1$.

L'équation

$$\mathcal{L} \cdot (x')^2 + 2\mathcal{M} \cdot x'y' + \mathcal{N} \cdot (y')^2 = 0$$

s'écrit donc

$$x'^2 - y'^2 = 0$$

Ainsi $y' = x'$ ou $y' = -x'$.Les solutions sont donc les droites de \mathbb{R}^2

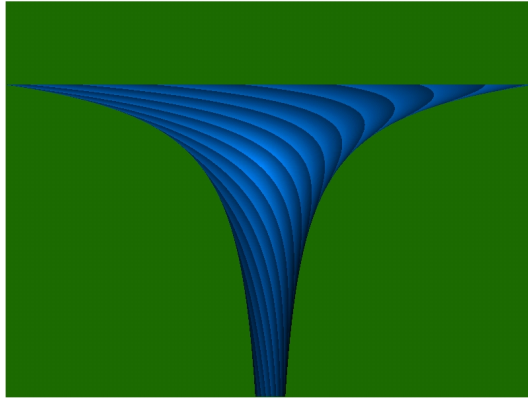
$$y = x + y_0 \text{ et } y = -x + y_0 \text{ où } y_0 \in \mathbb{R}$$

Les courbes asymptotes s'obtiennent en composant par f :

$$x \mapsto f(x, x + y_0) = \left(x, x + y_0, -\frac{y_0}{2}(2x + y_0) \right)$$

$$x \mapsto f(x, -x + y_0) = \left(x, -x + y_0, \frac{y_0}{2}(2x - y_0) \right)$$

Les lignes asymptotiques de f forment donc un réseau de droites dans $PH = f(\mathbb{R}^2)$: une autre façon de constater que PH est biréglé!



Courbes asymptotiques sur une surface de révolution : en général les courbes asymptotiques ne sont pas des droites

Définition :

Soit $p \in S$. On appelle **INDICATRICE DE DUPIN** S EN p l'ensemble

$$ID(p) := \{X \in T_p S \mid II_p(X, X) = \pm 1\}$$

Notation : 1) $ID_+(p)$ désigne l'ensemble $\{X \in T_p S \mid II_p(X, X) = 1\}$

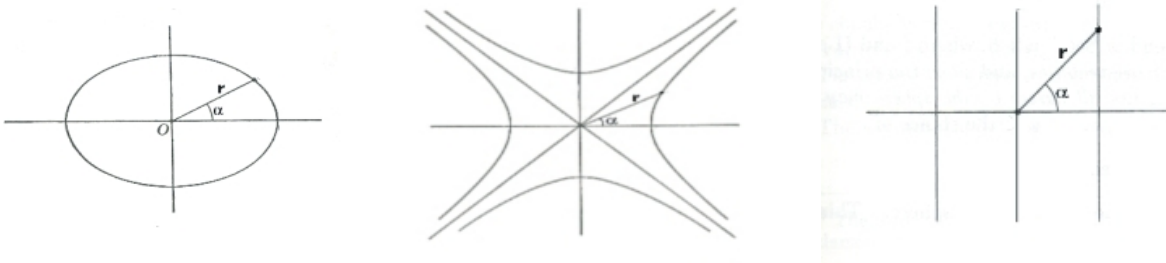
2) $ID_-(p)$ désigne l'ensemble $\{X \in T_p S \mid II_p(X, X) = -1\}$

Proposition 8.2 :

$ID(p)$ est une conique.

Démonstration :

Cela provient de la formule d'Euler pour les courbures. □



Pour tout $r \in \mathbb{R}^*$, on note P_r le plan parallèle à $T_p S$ à distance signée r (grâce au choix d'une normale) de $T_p S$.

On définit $ID_\times(p) := ID_+(p)$ si $ID_+(p) \neq \emptyset$ et $ID_\times(p) := ID_-(p)$ sinon.

Théorème 8.3 :

Soit $p \in S$ un point tel que $II_p \neq 0$. Il existe un voisinage V de p dans \mathbb{R}^3 et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $0 < |r| < \varepsilon$, si $P_r \cap S \cap V$ est non vide, alors il est difféomorphe à $ID_\times(p)$.

Démonstration :

Idée de démonstration. On choisit un paramétrage cartésien de S :

$$\begin{aligned} f : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S = f(U) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, h(x, y)) \end{aligned}$$

On suppose que $(0, 0) \in U$ et $f(0, 0) = p$.

On suppose en outre que : $h_x(0, 0) = 0$ et $h_y(0, 0) = 0$. Ainsi le plan (Oxy) est tangent à S en p .

On suppose enfin que (Ox) et (Oy) sont les directions principales. Un calcul montre alors que $h_{xy}(0, 0) = 0$ et que $\lambda_1(p) = h_{xx}(0, 0)$ et $\lambda_2(p) = h_{yy}(0, 0)$. Un développement de Taylor en $(0, 0)$ et à l'ordre 2 de h s'écrit

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2) + o(x^2 + y^2)$$

Soit $X = xf_x + yf_y \in T_p S$. Un calcul montre que :

$$\begin{aligned} II_p(X, X) &= h_{xx}(0, 0) x^2 + 2h_{xy}(0, 0) xy + h_{yy}(0, 0) y^2 \\ &= \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2. \end{aligned}$$

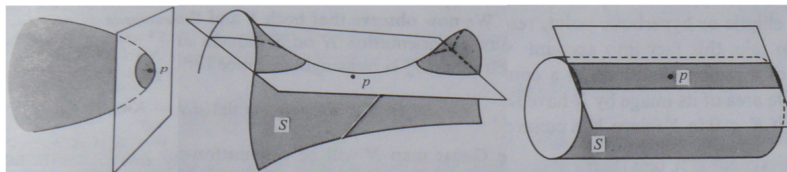
Déterminer $P_r \cap S \cap V$ revient à résoudre $h(x, y) = r$, une équation qui, après renormalisation, ressemble beaucoup à $II_p(X, X) = \pm 1$, le signe dépendant de celui de r . \square

On déduit immédiatement de la démonstration du théorème précédent le :

Corollaire 8.2 :

On a les points suivants

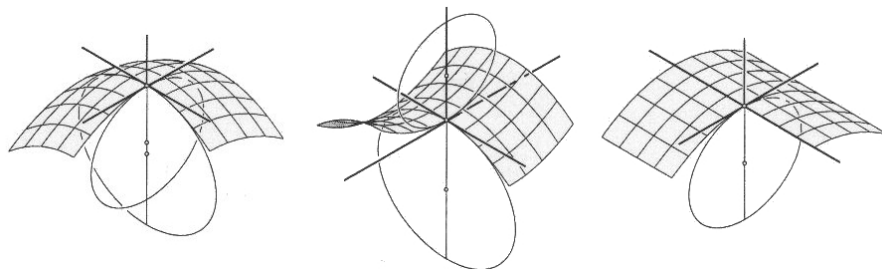
- 1) Si $K(p) > 0$, alors p est un **POINT ELLIPTIQUE**.
- 2) Si $K(p) < 0$, alors p est un **POINT HYPERBOLIQUE**.
- 3) Si $K(p) = 0$ et $H(p) \neq 0$, alors p est **PARABOLIQUE**.



$$K(p) > 0$$

$$K(p) < 0$$

$$K(p) = 0 \\ \text{et } H(p) \neq 0.$$



III Lignes de courbures

Définition :

On appelle **LIGNE DE COURBURE** une courbe paramétrée régulière $\bar{\gamma} : I \rightarrow S$ telle que, pour tout $t \in I$, la tangente $\bar{\gamma}(t) + \text{Vect}(\bar{\gamma}'(t))$ soit une direction principale de S en $\bar{\gamma}(t)$.

Proposition 8.3 :

Toute courbe paramétrée régulière dont le support est contenu dans un plan ou une sphère est une ligne de courbure.

Définition :

On appelle **POINT OMBILICAL** un point $p \in S$ pour lequel $\lambda_1(p) = \lambda_2(p)$.

Proposition 8.4 :

Tous les points d'une sphère ou d'un plan sont ombilicaux.

Lemme 8.2 :

Soient $f : U \rightarrow S$ une surface paramétrée régulière, injective et sans point ombilical et

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow U \\ t &\longmapsto (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

une courbe régulière.

$\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ est une ligne de courbure si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = 0$$

Démonstration :

Puisque f est sans point ombilical, on peut définir sans ambiguïté deux fonctions courbures principales $\lambda_1, \lambda_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$.

La courbe paramétrée $\bar{\gamma}$ est une ligne de courbure si et seulement si il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $\forall t \in I$, $-dn(\bar{\gamma}'(t)) = \lambda_i \bar{\gamma}'(t)$.

Dans la base (f_u, f_v) l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\mathcal{L} - F\mathcal{M} & G\mathcal{M} - F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M} - F\mathcal{L} & E\mathcal{N} - F\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

D'où, en multipliant la première ligne par v' et la seconde par u' :

$$\begin{aligned} \frac{G\mathcal{L} - F\mathcal{M}}{EG - F^2} u'v' + \frac{G\mathcal{M} - F\mathcal{N}}{EG - F^2} (v')^2 &= \lambda_i u'v' \\ \frac{E\mathcal{M} - F\mathcal{L}}{EG - F^2} (u')^2 + \frac{E\mathcal{N} - F\mathcal{M}}{EG - F^2} u'v' &= \lambda_i v'u' \end{aligned}$$

En égalant on obtient une expression qui est, à un facteur près, le déterminant figurant dans le lemme. \square

Corollaire 8.3 :

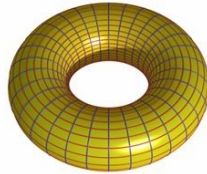
Si $F \equiv 0$ et $\mathcal{M} \equiv 0$ alors $u \mapsto f(u, v_0)$ et $v \mapsto f(u_0, v)$ sont des lignes de courbure.

Exemple :

Le Tore Soient $0 < b < a$ et

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} (a + b \sin(v)) \cos(u) \\ (a + b \sin(v)) \sin(u) \\ b \cos(v) \end{pmatrix}$$



Un calcul direct montre que $F = 0$ et $\mathcal{M} = 0$. Les lignes de courbures sont donc les cercles

$$u \mapsto f(u, v_0) \text{ et } v \mapsto f(u_0, v)$$

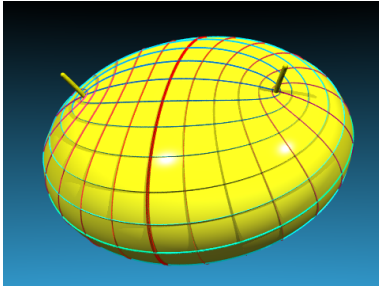
Plus généralement, les méridiens et les latitudes sont les supports de lignes de courbures des surfaces de rotation.

Définition :

Soit V un ouvert de \mathbb{R}^3 . On appelle **SYSTÈME TRIPLE ORTHOGONAL SUR V** la donnée de trois familles de surfaces $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ telles que pour tout $p \in V$, il existe une unique surface de chaque famille contenant p et que, de plus, ces surfaces s'intersectent deux à deux orthogonalement.

Théorème 8.4 (Dupin) :

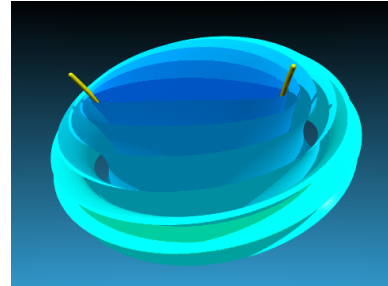
Les surfaces d'un système triple orthogonal s'intersectent deux à deux le long de leurs lignes de courbure.

Application 1 : Lignes de courbure de l'ellipsoïde.

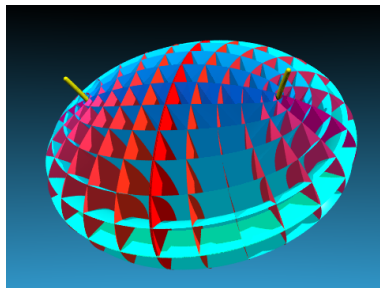
Les lignes de courbures de l'ellipsoïde.



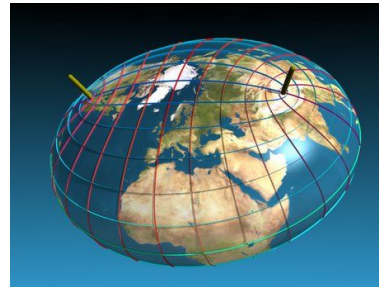
Hyperboloïdes confocales à deux nappes



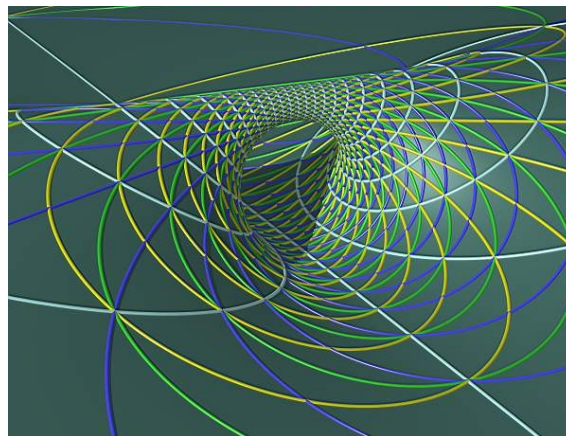
Hyperboloïdes confocales à une nappe



Le système triple orthogonal dessine les lignes de courbure



Les quatre points où l'hyperbole intersecte la surface sont les points ombilicaux de l'ellipsoïde

Application 2 : Lignes de courbure des cyclides de Dupin.

Les lignes de courbures sont les courbes vertes et blanches : ce sont des cercles ou des droites.

IV Géodésiques

Définition :

Une courbe paramétrée $\bar{\gamma} : I \rightarrow S$ à vitesse constante est dite **GÉODÉSIQUE** lorsque,

$$\forall t \in I \quad (\bar{\gamma}''(t))^T = 0 \quad \text{où } (\cdot)^T \text{ désigne la composante tangentielle de } \bar{\gamma}''(t) \text{ sur } T_{\bar{\gamma}(t)}S$$

Proposition 8.5 :

- 1) Dans le plan les géodésiques sont les courbes paramétrées à vitesse constante dont le support est une portion de droite.
- 2) Dans la sphère les géodésiques sont les courbes paramétrées à vitesse constante dont le support est un arc de grand cercle.



Elwin Bruno Christoffel (1829-1900)

Définition :

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière. On appelle **SYMBOLE DE CHRISTOFFEL** les composantes tangentielles des dérivées secondes de f dans la base (f_u, f_v) .

Notation :

Γ_{ij}^k désignent les symboles de Christoffel.

Plus précisément :

$$\begin{aligned} f_{uu} &= \Gamma_{11}^1 f_u + \Gamma_{11}^2 f_v + \mathcal{L}N \\ f_{uv} &= \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v + \mathcal{M}N \\ f_{vv} &= \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v + \mathcal{N}N \end{aligned}$$

Théorème 8.5 :

Les symboles de Christoffel ne dépendent que des coefficients E, F, G et de leurs dérivées premières. En particulier si $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, 2\}$, sont deux surfaces paramétrées de classe \mathcal{C}^2 isométriques, alors elles ont même symboles de Christoffel.

Démonstration :

Traitons d'abord le cas des symboles Γ_{11}^1 et Γ_{11}^2 . On a

$$\begin{aligned} E \Gamma_{11}^1 + F \Gamma_{11}^2 &= \langle f_{uu}, f_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ F \Gamma_{11}^1 + G \Gamma_{11}^2 &= \langle f_{uu}, f_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système est $EG - F^2 > 0$, il est donc inversible. On agit similairement pour les autres symboles. \square

Proposition 8.6 :

Soient $f : U \rightarrow S$ une surface paramétrée régulière, injective et

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow U \\ t &\longmapsto (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

une courbe régulière. $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ est géodésique si et seulement si

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 &= 0 \end{aligned}$$

Démonstration :

On a

$$\bar{\gamma}'(t) = u'(t) f_u(u(t), v(t)) + v'(t) f_v(u(t), v(t))$$

d'où

$$\bar{\gamma}'' = u'' f_u + u'(u' f_{uu} + v' f_{uv}) + v'' f_v + v'(u' f_{uv} + v' f_{vv})$$

En exprimant f_{uu} , f_{uv} et f_{vv} dans la base (f_u, f_v) il vient

$$(\bar{\gamma}'')^T = (u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2) f_u + (v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2) f_v$$

\square

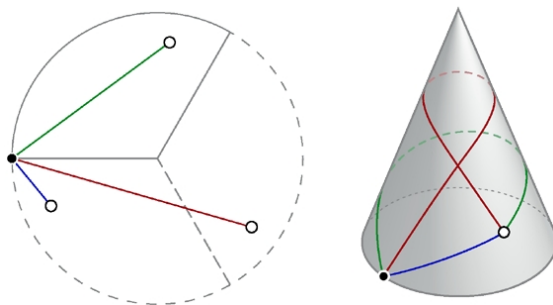
Corollaire 8.4 :

Soient $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, 2\}$, deux surfaces paramétrées de classe \mathcal{C}^2 isométriques et $\gamma : I \rightarrow U$. Si $\bar{\gamma}_1 = f_1 \circ \gamma$ est une géodésique de $S_1 = f_1(U)$ alors $\bar{\gamma}_2 = f_2 \circ \gamma$ est une géodésique de $S_2 = f_2(U)$.

Démonstration :

L'EDO des géodésiques ne fait intervenir que les symboles de Christoffel qui sont invariants par isométrie. \square

Une application à la construction de géodésiques sur le cône.



Comment construire des géodésiques sur le cône

Corollaire 8.5 :

Soient $p \in S$ et $v \in T_p S$ tel que $v \neq 0$. Il existe $\varepsilon > 0$ et une unique courbe géodésique $\bar{\gamma} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ telle que $\bar{\gamma}(0) = p$ et $\bar{\gamma}'(0) = v$.

Démonstration :

Il s'agit d'une application directe du théorème de Cauchy-Lipschitz.

En effet le système

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 &= 0. \end{aligned}$$

s'écrit sous la forme

$$y'' = \phi(y, y')$$

avec $y = (u, v)$ (le système dépend effectivement de y via les symboles de Christoffel).

On pose $Y = (y, y')$ (truc classique), on a alors

$$Y' = \Phi(Y)$$

avec $\Phi(y_1, y_2) = (y_2, \phi(y_1, y_2))$.

Il reste à vérifier que Φ est localement lipschitzienne ce qui est immédiat ici car f est aussi régulière qu'on le souhaite (la classe \mathcal{C}^3 suffit). \square

REMARQUE :

Dans le corollaire, on ne peut pas en général remplacer $]-\varepsilon, \varepsilon[$ par \mathbb{R} . En revanche, p étant fixé, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de choisir ε uniformément sur tout disque D centré en 0 de $T_p S$.

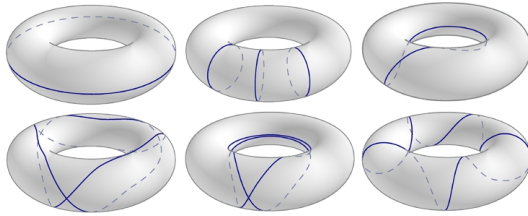
Si la solution $\bar{\gamma}$ existe jusqu'au temps $t = 1$, on note

$$\exp_p(v) := \bar{\gamma}(1)$$

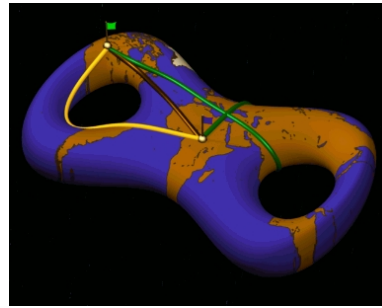
D'après le théorème précédent et sa remarque, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'application

$$\begin{aligned} \exp_p : D(0, \varepsilon) &\longrightarrow S \\ v &\longmapsto \exp_p(v) \end{aligned}$$

soit bien définie sur le disque $D(0, \varepsilon)$ centré en 0 et de rayon ε de $T_p S$. On appelle cette application l'**APPLICATION EXPONENTIELLE** en p de S .



Les géodésiques peuvent s'auto-intersecter



Plusieurs géodésiques pour aller d'un point à un autre



Le pavillon du Japon à l'exposition universelle d'Hanovre en 2000



La tour korkeasaari (Finlande)

V Jean-Baptiste Meusnier de La Place (1754-1793)



Jean-Baptiste Marie Meusnier
de La Place



Deux scènes avec des aérostats :
"Souvenir du général Meusnier
La Place" (1794).

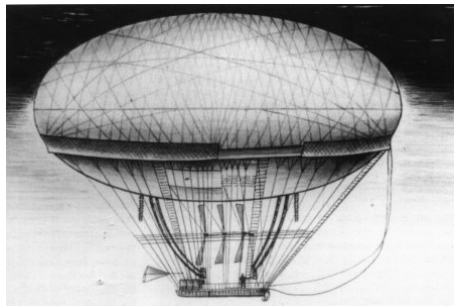
Général de la Révolution, géomètre et ingénieur.

Il découvre son théorème lors de son passage à l'école royale du génie. Il invente également à la même époque l'hélicoïde.

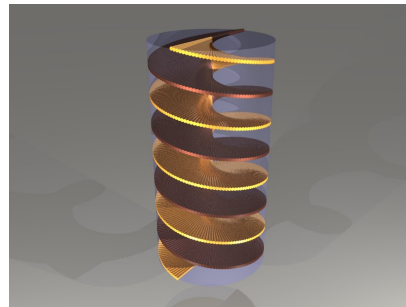
Il collabore avec Antoine Lavoisier à des études sur la décomposition de l'eau et sur la fabrication de l'hydrogène.

Il est présenté parfois comme l'inventeur du dirigeable du fait d'un projet, avorté par manque de moyens, qu'il proposa à l'Académie des sciences.

Général de division dans l'armée du Rhin, il meurt de ses blessures au cours du siège de Mayence.



Le projet d'aérostat de Meusnier
La Place



L'inventeur de l'hélicoïde, une
surface de courbure moyenne
nulle.

VI Charles Dupin (1784-1873)



Charles Dupin

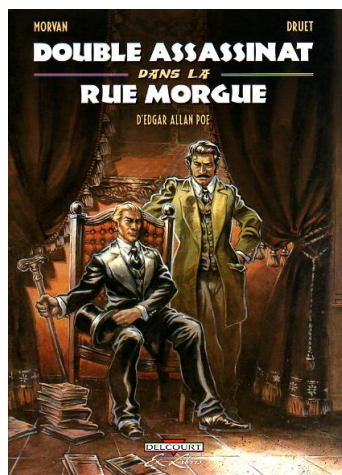
Mathématicien, ingénieur et homme politique.

S'intéresse à la courbure des surfaces... et applique ses découvertes à la construction de vaisseaux de guerre et à la conception de fortifications !

A servi tous les régimes : le Premier Empire, la Première Restauration, la monarchie de Juillet, la Deuxième République, le Second Empire.

Il a été député (un des plus ardents membres de la majorité de droite) et ministre de la marine et des colonies. Louis XVIII le fit baron.

Une famille de surfaces porte son nom : les **CYCLIDES DE DUPIN**.



Le baron Charles Dupin serait le modèle du chevalier Auguste Dupin, le détective créé par Edgar Poe.