M1G S1 : Géométrie

Vincent Borrelli Mathilde Gaillard Matthieu Jentile

Sébastien Pierrisnard Michael Yang

Université de Lyon

Université Claude Bernard Lyon 1

Résumé

Ce document est un polycopié de cours du module Géométrie enseigné lors du premier semestre du Master 1 Mathématiques Générales (M1G) de Lyon, réalisé par Monsieur Vincent Borelli. L'entièreté du contenu du document a été fournie par M. Borelli pendant ses enseignements lors de l'année scolaire 2020-2021.

Le but de ce polycopié est de fournir aux élèves de M1G un document de cours parallèle aux diapositives qu'utilise M. Borelli lors de ses cours, ceci afin d'en faciliter les lectures. Ainsi, le contenu est identiquement le même et ne contient aucune note personnelle.
Ce document a été réalisé en collaboration par Mathilde Gaillard, Matthieu Jentile, Sébastien Pierrisnard, Michael Yang et Jules Armand. Chacun des collaborateurs est issu de la promotion 2020-2021 du M1G et ont donc suivis les enseignements de M. Borelli.

Malgré les précautions de chacun des auteurs, il est possible que des erreurs se soient glissées çà et là. Dans ce cas (ou pour toute autre remarque vis-à-vis de ce document), il est recommandé de contacter M. Borelli, par exemple à l'adresse borrelli@math.univ-lyon1.fr.
Enfin, toutes les images présentes dans ce polycopié ne sont pas forcément libres de droits. Il n'est donc pas autorisé au lecteur de les utiliser comme bon lui semble, si ce n'est pour une utilisation personnelle.

Les collaborateurs sont profondément reconnaissants envers M. Borelli pour sa confiance en eux dans l'élaboration de ce document.

Chapitre 10

La formule de Stockes

Dans tout ce chapitre, on considère U un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

I Champs de vecteurs

Définition :
On appelle **champ de vecteurs** toute application $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $X = X_1\, e_1 + X_2\, e_2 + X_3\, e_3$. On pose

$$L_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(U) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(U) \\ f & \longmapsto & X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{array}$$

Définition :
L'application L_X est appelée la **dérivation associée à** X. Elle est aussi notée $X(f)$.

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $X = X_1\, \partial_1 + X_2\, \partial_2 + X_3\, \partial_3$ et $Y = Y_1\, \partial_1 + Y_2\, \partial_2 + Y_3\, \partial_3$.

$$\begin{aligned} L_X(L_Y f) &= L_X\left(\sum_{i=1}^{3} Y_i\, \partial_i\, f\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} X_j\, \partial_j\, Y_i \,.\, \partial_i\, f + X_j\, Y_i\, \partial_{ij}^2\, f \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} L_Y(L_X f) &= L_Y\left(\sum_{i=1}^{3} X_i\, \partial_i\, f\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} Y_j\, \partial_j\, X_i \,.\, \partial_i\, f + Y_j\, X_i\, \partial_{ij}^2\, f \end{aligned}$$

Par conséquent $L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \big(X_j\, \partial_j\, Y_i - Y_j\, \partial_j\, X_i\big)\partial_i\, f$.

Posons $[X,Y] := \sum_{i=1}^{3} Z_i\,\partial_i$ où $Z_i = \sum_{j=1}^{3}(X_j\,\partial_j\,Y_i - Y_j\,\partial_j\,X_i)$.
On vient de montrer que

$$L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X,Y]}$$

Définition :
Le champ de vecteurs $[X,Y]$ est appelé le **CROCHET DE X ET DE Y**.

Exemple :
1) Soient A et B deux matrices 3×3. Pour chaque x dans $\mathbb{R}^3$ on pose $X_A(x) = A(x)$ et $X_B(x) = B(x)$. Un calcul immédiat montre alors que $[X_A, X_B] := (BA - AB)(x)$.
2)On pose $E_1 = x_3\,\partial_2 - x_2\,\partial_3$, $E_2 = x_1\,\partial_3 - x_3\,\partial_1$, $E_3 = x_2\,\partial_1 - x_1\,\partial_2$. Soient $V = v_1E_1 + v_2E_2 + v_3E_3$ et $W = w_1E_1 + w_2E_2 + w_3E_3$ avec $v_1, ..., w_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.
Dans la base (E_1, E_2, E_3) on a :

$$[V,W] = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Théorème 10.1 (Identité de Jacobi) :
Soient X, Y, Z trois champs de vecteurs sur U.

$$\big[X,[Y,Z]\big] + \big[Y,[Z,X]\big] + \big[Z,[X,Y]\big] = 0$$

***Démonstration* :**
Il suffit d'écrire les expressions algébriques. $\square$

Si $\varphi : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme et X un champ de vecteurs, on note $\varphi_* X$ le **champ de vecteur** défini par

$$(\varphi_* X)(y) := d\varphi_x(X_x) \quad \text{où} \quad x = \varphi^{-1}(y)$$

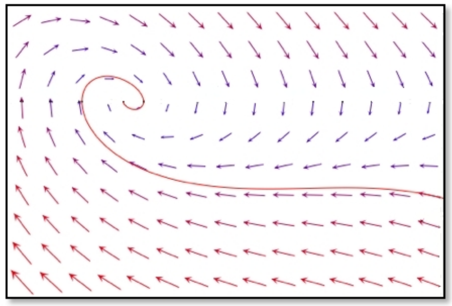
On parle de **POUSSER EN AVANT**.

Lemme 10.1 :
Soit $\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme.

$$\varphi_*[X,Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$$

***Démonstration* :**
Un stupide calcul. $\square$

Définition :
On appelle **TRAJECTOIRE** ou **COURBE INTÉGRALE** d'un champ de vecteurs X sur U toute courbe $\gamma : I \longrightarrow U$ telle que $\forall t \in I$, $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$.



Théorème 10.2 :
Soient X un champ de vecteurs sur U et $x \in U$. Il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une trajectoire $\gamma_x : I \longrightarrow U$ de X telle que $\gamma_x(0) = x$.
De plus, si $\delta_x : J \longrightarrow U$ est une autre trajectoire telle que $\delta_x(0) = x$, alors γ_x et δ_x coïncident sur $I \cap J$.

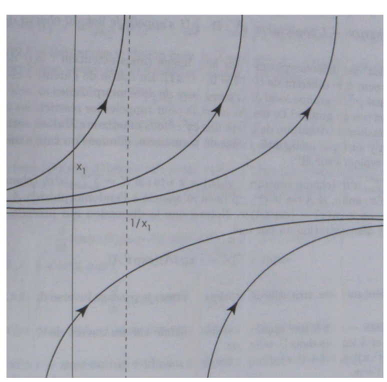
***Démonstration* :**
L'équation définissant les courbes intégrales est une EDO. Les résultats classiques d'existence et d'unicité s'appliquent (rappelons que X est supposé $\mathcal{C}^1$). □

Remarque :
Même si X est défini sur $\mathbb{R}^3$, les trajectoires ne sont pas forcément définies sur tout $\mathbb{R}$.

Exemple :
Soit X un champs de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par $X_{(x_1,x_2,x_3)} := \big(x_1^2\,,\,1\,,\,0\big)$. La trajectoire passant par (x_1, x_2, x_3) en $t = 0$ $(x_1 > 0)$ est

$$\gamma_x(t) = \left(\frac{x_1}{1 - tx_1}\,,\, t + x_2\,,\, x_3\right)$$

Elle est définie sur $\left]-\infty, \frac{1}{x_1}\right[$



Soit I_x l'intervalle de définition maximal de γ_x. On pose

$$\Omega = \bigcup_{x \in U} I_x \times \{x\}$$

Proposition 10.1 :
L'ensemble Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times U$ contenant $\{0\} \times U$.

Pour une démonstration, consulter le chapitre 2, théorème 8 du cours *Équations Différentielles L3* de Julien Vovelle. Il est disponible sur sa page web.
Une application du théorème d'inversion locale en dimension infinie montre que $(t,x) \longmapsto \gamma_x(t)$ est de la même classe que X. C'est cependant non trivial.

Définition :
L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \Omega & \longrightarrow & U \\ & (t,x) & \longmapsto & \gamma_x(t) \end{array}$$

s'appelle le **FLOT de** X.

Il est traditionnel d'écrire $\varphi_t(x)$ plutôt que $\varphi(t,x)$.

Proposition 10.2 :
$\varphi_t : U \longrightarrow \varphi_t(U)$ est un difféomorphisme.

***Démonstration* :**
Provient de l'unicité des solutions d'une EDO. □

Mieux, l'EDO étant autonome, si $\gamma_x(t)$ est une trajectoire, il en est de même de $\gamma_x(t+a)$ quand cela a un sens. Par unicité

$$\gamma_x(t+a) = \gamma_{\gamma_x(a)}(t)$$

Ceci s'écrit aussi

$$\varphi_{t+a}(x) = \varphi_t(\varphi_a(x))$$

Propriété 10.1 :
Chaque fois que cela a un sens, on a

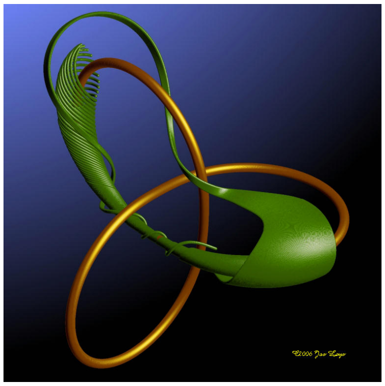
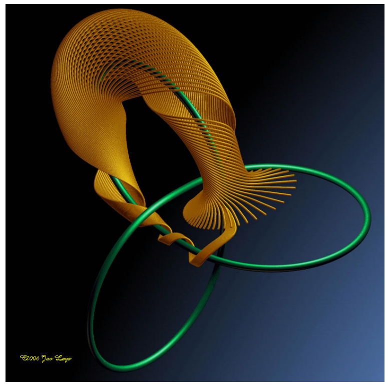
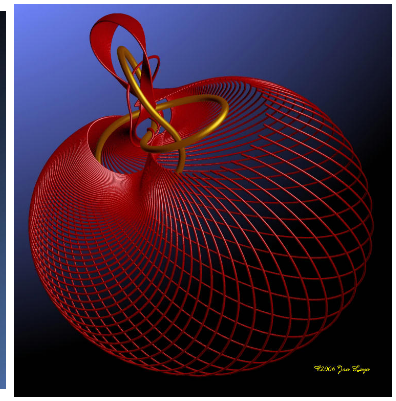
$$\varphi_{t_1+t_2} = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2}$$

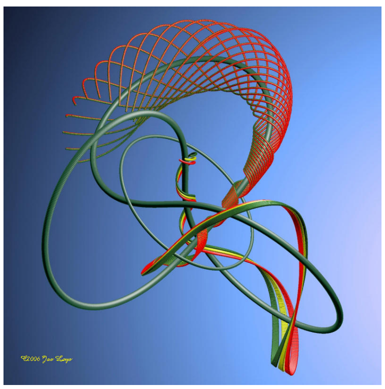
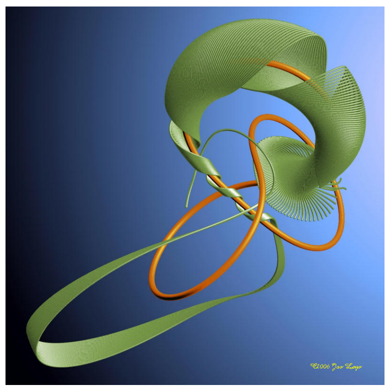
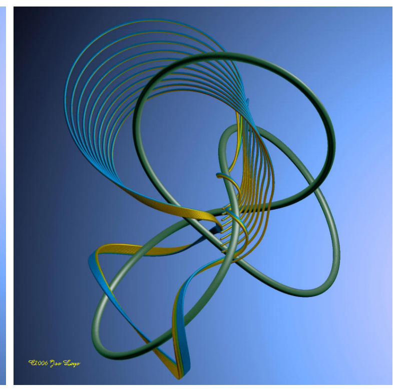
Exemple :
Soit $X_A(x) = A(x)$ où A est une matrice 3×3. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

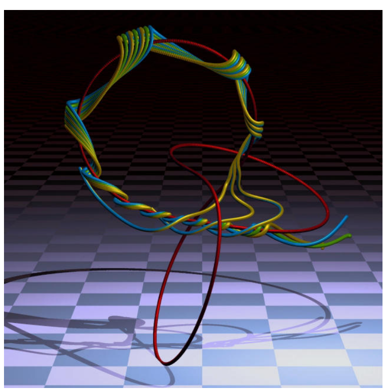
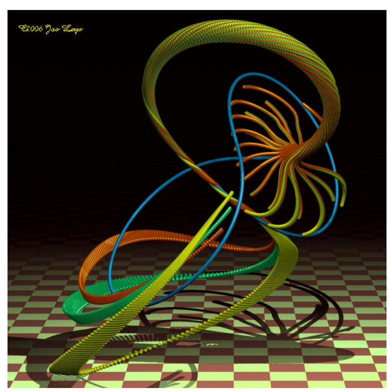
$$\varphi_t(x) = \exp(tA)x$$

La propriété précédente énonce

$$\exp(t_1+t_2)A = \exp(t_1A)\exp(t_2A)$$

II Formes différentielles d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
On note

$$\begin{array}{rcl}
\Omega^0(U) & = & \mathcal{C}^\infty(U) \\
\Omega^1(U) & = & \left\{\alpha_1(x)\,dx_1 + \alpha_2(x)\,dx_2 + \alpha_3(x)\,dx_3 \mid (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathcal{C}^\infty(U)^3\right\} \\
\Omega^2(U) & = & \left\{\beta_1(x)\,dx_2\wedge dx_3 + \beta_2(x)\,dx_3\wedge dx_1 + \beta_3(x)\,dx_1\wedge dx_2 \mid (\beta_1,\beta_2,\beta_3) \in \mathcal{C}^\infty(U)^3\right\} \\
\Omega^3(U) & = & \{h(x)\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 \mid h \in \mathcal{C}^\infty(U)\} \\
\Omega^k(U) & = & \{0\} \quad \text{si } k > 3.
\end{array}$$

les espaces vectoriels des k-formes de U ($k \in \mathbb{N}$).
On pose $\mathfrak{X}(U) := \left\{X_1\,\partial_1 + X_2\,\partial_2 + X_3\,\partial_3 \mid (X_1,X_2,X_3) \in \mathcal{C}^\infty(U)^3\right\}$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur U.
Les espaces vectoriels $\mathfrak{X}(U)$, $\Omega_1(U)$ et $\Omega_2(U)$ sont tous les trois isomorphes à $\mathcal{C}^\infty(U)^3$ et donc isomorphes entre eux.
Si $\mathbb{R}^3$ est muni d'un produit scalaire $\langle .,.\rangle$ et orienté alors on peut construire des isomorphismes canoniques (canoniques=qui ne dépendent pas du choix de la base) entre $\Omega_1(U)$, $\Omega_2(U)$ et $\mathfrak{X}(U)$.

On note $\flat : \mathfrak{X}(U) \to \Omega^1(U)$ l'application qui a tout champ de vecteurs X associe la 1-forme différentielle $\alpha = \langle X, .\rangle$.
Similairement, on note $\sharp : \Omega^1(U) \to \mathfrak{X}(U)$ l'application qui a toute 1-forme différentielle α associe le champ de vecteur X tel que, en tout point $x \in U$, X_x soit perpendiculaire à $\ker \alpha_x$ et $\alpha_x(X_x) = 1$

Proposition 10.3 :
On a :

1) *a)* $\forall i \in \{1,2,3\}$, $(\partial_i)^\flat = dx_i$
   b) $\forall i \in \{1,2,3\}$, $(dx_i)^\sharp = \partial_i$
2) *a)* $\flat \circ \sharp = id_{\Omega^1(U)}$
   b) $\sharp \circ \flat = id_{\mathfrak{X}(U)}$

Définition :
Les deux isomorphismes $\flat$ et $\sharp$ sont appelés ISOMORPHISMES MUSICAUX.

III Intégration des formes différentielles

1) L'étoile de Hodge

On définit une application $\star : \Omega_1(U) \longrightarrow \Omega_2(U)$ en posant

$$\star\, dx_1 = dx_2 \wedge dx_3, \quad \star\, dx_2 = dx_3 \wedge dx_1 \text{ et } \star\, dx_3 = dx_1 \wedge dx_2$$

et en la prolongeant de façon linéaire. Sa réciproque est encore notée $\star : \Omega_2(U) \longrightarrow \Omega_1(U)$ et elle vérifie

$$\star(dx_1 \wedge dx_2) = dx_3,\ \star\,(dx_2 \wedge dx_3) = dx_1 \text{ et } \star\,(dx_3 \wedge dx_1) = dx_2$$

On définit de même $\star : \Omega_0(U) \longrightarrow \Omega_3(U)$ et $\star : \Omega_3(U) \longrightarrow \Omega_0(U)$ en posant

$$\star\, 1 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \text{ et } \star\,(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = 1$$

Définition :
L'opérateur $\star$ est appelé **l' étoile de Hodge.**

Exercice :
On définit : $\beta_x = \beta_1(x)\, dx_2 \wedge dx_3 + \beta_2(x)\, dx_3 \wedge dx_1 + \beta_3(x)\, dx_1 \wedge dx_2$.
On a : $\star\, \beta_x = \beta_1(x)\, dx_1 + \beta_2(x)\, dx_2 + \beta_3(x)\, dx_3$ puis, $(\star\, \beta_x)^\sharp = \beta_1(x)\partial_1 + \beta_2(x)\partial_2 + \beta_3(x)\partial_3$
Ainsi $(\star\beta)^\sharp : \Omega_2(U) \to \mathfrak{X}(U)$ est un isomorphisme.
Montrer que $\star\,(X^\flat) : \mathfrak{X}(U) \to \Omega_2(U)$ est sa réciproque.

Remarque :
Notre façon de définir l'étoile de Hodge fait intervenir des bases, par exemple (dx_1, dx_2, dx_3) pour $\star : \Omega_1(U) \to \Omega_2(U)$. Il existe une façon plus intrinsèque de définir $\star$ en s'appuyant sur le produit scalaire et l'orientation de $\mathbb{R}^3$. Pour des questions de temps, nous ne l'aborderons pas ici.

Définition :
Soient

$$\alpha_x = \alpha_1(x)\, dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2(x)\, dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3(x)\, dx_1 \wedge dx_2$$

une 2-forme différentielle sur U et $f \in \mathcal{C}^1(U)$.
Le **tiré en arrière** $f^*\alpha$ **de** α est la 2-forme différentielle de U définie par

$$(f^*\alpha)_{(u,v)}(.,.) = \alpha_{f(u,v)}\big(df_{(u,v)}(.)\ ,\ df_{(u,v)}(.)\big)$$

Remarquons que toute 2-forme d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\alpha_x(.,.) = \det(X_x\,,\ .\,,\ .)$$

où $X_x = \alpha_1(x)\,\partial_1 + \alpha_2(x)\,\partial_2 + \alpha_3(x)\,\partial_3$.

Par conséquent, si $x = f(u,v)$, on a

$$\begin{aligned}(f^*\alpha)_{(u,v)}(\partial_u\,,\,\partial_v) &= \det(X_x\,,\,f_u\,,\,f_v)\\ &= \langle X_x\,,\,f_u\wedge f_v\rangle\\ &= \sqrt{EG-F^2}\,\big\langle X_x\,,\,N(u,v)\big\rangle\end{aligned}$$

Donc $(f^*\alpha)_{(u,v)} = \big\langle X_{f(u,v)}\,,\,N(u,v)\big\rangle\sqrt{EG-F^2}\;du\wedge dv$.
Il est traditionnel de noter $\star\alpha^\sharp$ plutôt que X, d'où la formule

$$(f^*\alpha)_{(u,v)} = \big\langle \star\alpha^\sharp_{f(u,v)}\,,\,N(u,v)\big\rangle\sqrt{EG-F^2}\;du\wedge dv$$

Définition :
Soient S une partie orientée de $\mathbb{R}^3$ et $f : U \longrightarrow S = f(U)$ une immersion injective respectant l'orientation. On appelle **INTÉGRALE DE α SUR S** le nombre

$$\int_S \alpha := \int_U f^*\alpha$$

où

$$\int_U f^*\alpha := \int_U \Big\langle\star\alpha^\sharp_{f(u,v)}\,,\,N(u,v)\Big\rangle\,\sqrt{EG-F^2}\;dudv$$

Lemme 10.2 :
Soient $\varphi : V \longrightarrow U$ un difféomorphisme préservant l'orientation (i.e $\det\big(\mathrm{Jac}(\varphi)\big) > 0$) et $g = f\circ\varphi$.

$$\int_V g^*\alpha = \int_U f^*\alpha$$

***Démonstration* :**
Soit $(u',v') = \varphi^{-1}(u,v)$. On a déjà vu au CM-S2 que

$$g_{u'}\wedge g_{v'} = \Big(\det\big(\mathrm{Jac}(\varphi)\big)\Big).(f_u\wedge f_v)\circ\varphi$$

Donc, si $\det\big(\mathrm{Jac}(\varphi)\big) > 0$,

$$N_g(u',v') = \frac{g_{u'}\wedge g_{v'}}{\|g_{u'}\wedge g_{v'}\|} = \frac{(f_u\wedge f_v)\circ\varphi}{\|(f_u\wedge f_v)\circ\varphi\|} = N_f\circ\varphi(u',v')$$

Dès lors, l'égalité $\displaystyle\int_V g^*\alpha = \int_U f^*\alpha$ se déduit de la formule de changement de variables dans les intégrales. □

Bien sûr, si φ renverse l'orientation, on a

$$\int_V g^*\alpha = -\int_U f^*\alpha$$

C'est une différence notable entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégration des 2-formes : l'orientation rentre en compte.

Pour l'intégrale de Lebesgue, la formule de changement de variables fait apparaître la valeur absolue du déterminant de la jacobienne.
Notre définition de l'intégrale d'une 1-forme n'est pas complètement satisfaisante. Nous avons discrètement supposé que $S = f(U)$ ce qui est restrictif... On pourrait corriger ce défaut avec un peu plus de technologie (=une partition de l'unité).

Exemple :
Soient $\alpha = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2$ et S la sphère unité. Comme $\alpha^\sharp_{f(u,v)} = f(u,v)$,

$$\begin{aligned}\int_S \alpha &= \int_U \left\langle \star\,\alpha^\sharp_{f(u,v)}\,,\, N(u,v)\right\rangle \sqrt{EG-F^2}\;dudv \\ &= \int_U \langle f(u,v)\,,\, N(u,v)\rangle \sqrt{EG-F^2}\;dudv\end{aligned}$$

Finalement $\displaystyle\int_S \alpha = \int_U \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = 4\pi$.

Définition :
Soit S une sous-variété orientée par $n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et X un champ de vecteurs. On appelle **FLUX DE X À TRAVERS S** le nombre

$$\Phi_S(X) := \int_S \langle X, n\rangle\; d^2S$$

Si X est un champ de vecteurs de U, on définit une 2-forme $\star X^\flat$ de U par

$$\star X^\flat(.,.) := \det(X,.,.) = X_1\,dx_2 \wedge dx_3 + X_2\,dx_3 \wedge dx_1 + X_3\,dx_1 \wedge dx_2$$

Lemme 10.3 :

$$\Phi_S(X) = \int_S \star X^\flat$$

Définition :
Soient $\overline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière injective et $\Gamma = \overline{\gamma}([a,b])$. Posons α la 1-forme différentielle $\alpha := \alpha_1\,dx_1 + \alpha_2\,dx_2 + \alpha_3\,dx_3$. On appelle **INTÉGRALE DE α LE LONG DE γ** le nombre

$$\int_\gamma \alpha := \int_a^b \overline{\gamma}^*\alpha$$

où

$$\int_a^b \overline{\gamma}^*\alpha = \int_a^b \left\langle \alpha^\sharp\,,\, \overline{\gamma}'(t)\right\rangle dt$$

avec

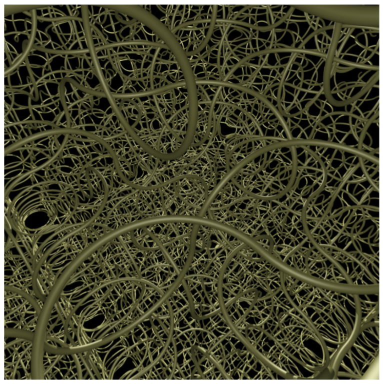
$$\alpha^\sharp = \alpha_1\,\partial_1 + \alpha_2\,\partial_2 + \alpha_3\,\partial_3$$

Lemme 10.4 :
Soit $\varphi : [a',b'] \longrightarrow [a,b]$ un difféomorphisme préservant l'orientation (i.e $\varphi'(t) > 0$) et $\overline{\delta} = \overline{\gamma}\circ\varphi$ alors

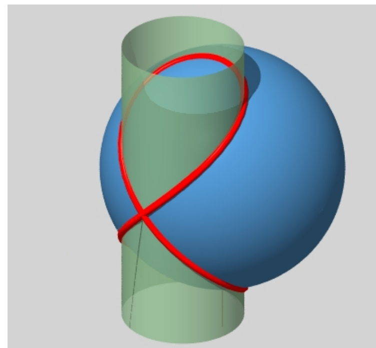
$$\int_{a'}^{b'} \overline{\delta}^*\alpha = \int_a^b \overline{\gamma}^*\alpha$$

***Démonstration* :**
Ici, la préservation de l'orientation permet de ne pas renverser $\int_a^b$ en $\int_b^a$ $\square$

Notons que la tentation est grande de voir $\Gamma = \overline{\gamma}([a,b])$ comme une sous-variété de dimension un. C'est bien le cas... aux extrémités près. On dit que Γ est une **SOUS-VARIÉTÉ À BORD**.



Une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension de 1



La fenêtre de Viviani : ce n'est pas une sous-variété de dimension 1

Définition :
Soit $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ une variété de dimension 1 (éventuellement à bord). Le choix d'un champ de vecteurs unitaires tangents $T : \Gamma \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$ est appelé une **ORIENTATION DE** Γ.
On dira que $\overline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \Gamma$ **PRÉSERVE L'ORIENTATION** lorsque $\overline{\gamma}'$ et T ont un coefficient de proportionnalité positif.

On peut alors définir l'intégrale des 1-formes α sur les sous-variétés orientées Γ de dimension 1 au moyen des applications $\overline{\gamma}$ qui préservent l'orientation.

Définition :
Soient Γ une sous-variété orientée par $T : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et X un champ de vecteurs. On appelle **CIRCULATION DE** X **LE LONG DE** Γ le nombre

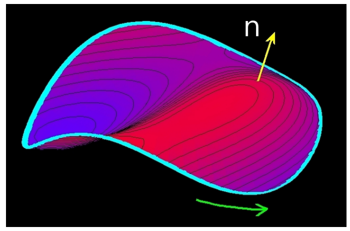
$$\mathcal{C}_\Gamma(X) := \int_\Gamma \langle X, T\rangle \, ds$$

Lemme 10.5 :

$$\mathcal{C}_\Gamma(X) = \int_\Gamma X^\flat \quad \text{où} \quad X^\flat = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3$$

2) La formule de Stokes

Définition :
Soient $S \subseteq \mathbb{R}^3$ une sous-variété de dimension deux et $D \subseteq S$. On dit que D est un **DOMAINE RÉGULIER** de dimension 2 s'il est compact et si sa frontière $D \setminus \mathring{D}$ est une sous-variété de dimension 1.
Cette sous-variété est notée ∂D et appelé le **BORD** de D.



Si S est orientée par n, alors on oriente ∂D en demandant que (T, W, n) soit directe dans $\mathbb{R}^3$, W étant un champ de vecteurs le long de ∂D tangent à S et tel que W pointe à l'intérieur de D (*cf.* CM-S5).

Théorème 10.3 (Formule de Stokes) :
Soient D un domaine régulier d'une sous-variété de dimension deux orientée S et de bord orienté ∂D ainsi que α une 1-forme définie sur un ouvert contenant S.

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha$$

***Démonstration* :**
On ne présente la preuve que dans le cas où D est dans l'image d'une immersion injective $f : U \longrightarrow S$.
Rappelons que si $\alpha = \alpha_1\, dx_1 + \alpha_2\, dx_2 + \alpha_3\, dx_3$ alors

$$d\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1$$

Puisque S est une sous-variété, f est un difféomorphisme sur son image. Par conséquent $\mathcal{D} = f^{-1}(D)$ est un domaine régulier de U dont le bord $\partial\mathcal{D}$ est $f^{-1}(\partial D)$.
On suppose en outre qu'il existe $\gamma : I_1 \sqcup I_2 \sqcup ... \sqcup I_n \longrightarrow \partial\mathcal{D}$ une courbe régulière injective de support $\partial\mathcal{D}$. On suppose enfin que les orientations induites par f et $f \circ \gamma$ sont cohérentes avec celles de D et ∂D (sinon, on met des signes moins partout dans la démonstration).
Par définition

$$\int_D d\alpha := \int_{\mathcal{D}} f^* d\alpha = \int_{\mathcal{D}} d(f^*\alpha)$$

On applique la formule de Green-Riemann pour obtenir

$$\int_D d\alpha := \int_{\partial\mathcal{D}} f^*\alpha$$

D'autre part

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_J (f \circ \gamma)^*\alpha = \int_J \gamma^*(f^*\alpha)$$

où $J = I_1 \sqcup I_2 \sqcup ... \sqcup I_n$.
Par définition

$$\int_{\partial\mathcal{D}} f^*\alpha = \int_J \gamma^*(f^*\alpha)$$

En égalant, on trouve

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha$$

$\square$

Application 1 Si $\partial S = \emptyset$ alors pour toute 1-forme α on a

$$\int_S d\alpha = 0$$

Application 2 La circulation d'un champ de vecteur X s'écrit

$$\mathcal{C}_{\partial D}(X) = \int_{\partial D} X^\flat = \int_D d(X^\flat)$$

Or

$$d(X^\flat) = \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1$$

Définition :
La champ de vecteurs $\left(\star\, d\left(X^\flat\right)\right)^\sharp$ est appelé le **ROTATIONNEL** de X.

Notation :
$rot\, X$ désigne le rotationnel de X.

On a donc

$$rot\, X = \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right) \partial_1 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right) \partial_2 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) \partial_3$$

Au bilan

$$\mathcal{C}_{\partial D}(X) = \int_{\partial D} \langle X, T\rangle \; ds = \int_D \langle rot\, X \, , \, n\rangle \; d^2 S = \Phi_D(rot\, X)$$

IV La formule d'Ostrogradski

Définition :
Soit $D \subset \mathbb{R}^3$. On dit que D est un **DOMAINE RÉGULIER** de dimension 3 s'il est égal à l'adhérence de son intérieur et si sa frontière $\overline{D} \setminus \mathring{D}$ est une sous-variété de dimension 2. Cette sous-variété est notée $S = \partial D$ et appelé le **BORD** de D.

On oriente alors $S = \partial D$ en choisissant la normale sortante.

Théorème 10.4 (Formule d'Ostrogradski) :
Soient $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier de dimension trois de bord orienté $S = \partial D$ et α une 2-forme définie sur un ouvert contenant D.

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha$$

Rappelons que si $\alpha = \alpha_1\, dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2\, dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3\, dx_1 \wedge dx_2$ alors

$$d\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Bien sûr, on définit l'intégrale d'une 3-forme $\alpha = h\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ sur un domaine régulier de dimension trois D par

$$\int_D \alpha := \int_D h\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

On note $\omega := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Autrement dit

$$\omega(X, Y, Z) = \det(X, Y, Z)$$

Si X est un champ de vecteurs, on définit une 2-forme $i_X\omega$ par $(i_X\omega)(.,.) := \omega(X\,,\,.\,,\,.)$. Un calcul immédiat montre que

$$i_X\omega := X_1\, dx_2 \wedge dx_3 + X_2\, dx_3 \wedge dx_1 + X_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

Ainsi

$$d(i_X\omega) = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right) \omega$$

Définition :
On appelle **DIVERGENCE DE** X l'application

$$div\ X := \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right)$$

Application : Le flux de X s'écrit maintenant

$$\Phi_S(X) = \int_S \langle X, n \rangle\, d^2S = \int_S det(X\,,\,.\,,\,.) = \int_S i_X\omega$$

La formule d'Ostrogradski permet d'écrire

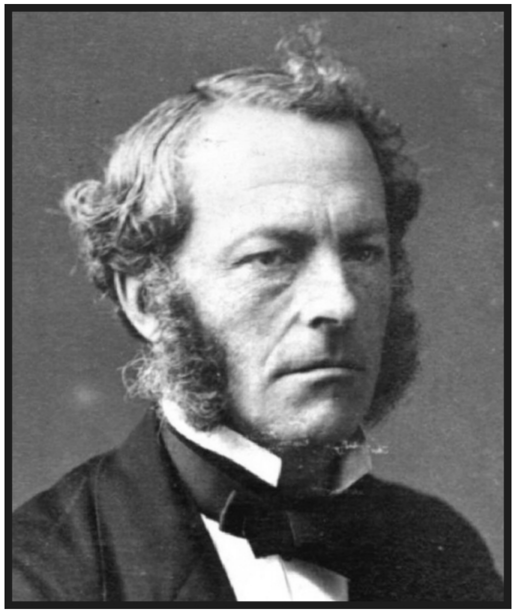
$$\Phi_S(X) = \int_D d(i_X\omega) = \int_D dix(X)\omega$$

V Carl Jacobi (1804-1851)

Carl Jacobi (1804-1851)

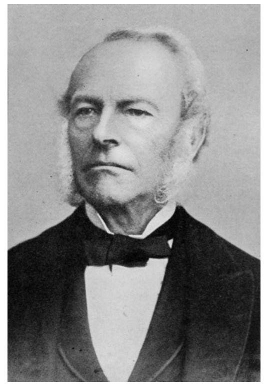
Mathématicien allemand, très connu pour ses travaux sur les intégrales elliptiques.
Il est l'un des fondateurs de la théorie des déterminants. En particulier, il invente le déterminant de la matrice formée par les dérivées partielles : le *jacobien* d'une application.
L'identité de Jacobi apparaît dans l'étude des algèbres de Lie (un espace vectoriel muni d'un crochet bilinéaire, antisymétrique et qui justement vérifie l'identité de Jacobi).
Il contribue à la mécanique céleste, notamment sur le problème des trois corps. Un cratère sur la Lune porte son nom.
Une citation : "La véritable finalité de la science est l'honneur de l'esprit humain"
Une autre citation. Face à ses étudiants qui préconisaient d'apprendre tout ce qui avait déjà été élaboré avant de se lancer dans la recherche, Jacobi répondait : "Si votre père avait pensé qu'il devait connaître toutes les filles avant d'en épouser une, il ne se serait jamais marié et vous ne seriez jamais nés."

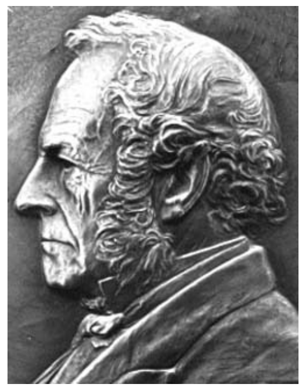
VI George Stokes (1819-1903)



George Stokes (1819-1903)

Mathématicien et physicien britannique de tout premier ordre. Il a occupé la chaire de mathématique *Isaac Newton* à Cambridge.
Ses recherches ont concerné essentiellement la mécanique des fluides, l'optique et la géodésie.
La formule qui porte son nom est due en réalité William Thomson avec qui George Stokes a entretenu une correspondance active.
En reconnaissance de la valeur de ses travaux, il est fait baronnet en 1889.
Croyant fervent, il a été président du Victoria Institute, une société savante dont le but était de défendre la égrande vérité des Saintes Écritures" face à la "fausse science" de l'*Origine des espéces* de Charles Darwin.
Sur *Wikipédia*, on peut lire la perfidie suivante : "Son mariage en 1857 avec Mary Robinson coïncide avec un ralentissement certain de sa productivité scientifique"
Deux cratères portent son nom, un sur la Lune l'autre sur Mars.
Pour finir sur une note joyeuse : quelques portraits de Stokes...

VII Mikhail Ostrogradski

Mikhail Ostrogradski (1801-1862)

Considéré comme l'un des physiciens/mathématiciens les plus importants de la Russie impériale.
Commence ses études à Kharkiv (Ukraine) mais ne peut obtenir son diplôme de thèse après la suspension de son directeur de thèse (et recteur de l'Université) Timofei Osipovsky.
Le Prince Aleksander Golitsyn, ministre de l'enseignement, avait en effet ordonné que la science soit présentée selon "des principes chrétiens" et Osipovsky aurait manqué de ferveur en déclamant "Dieu est vivant" lors de l'examen oral d'un étudiant.
Poursuit ses études à Paris où il se lie d'amitié et d'estime avec Cauchy, Binet, Fourier et Poisson.
Revient au pays pour enseigner à l'école des cadets de la Marine, puis à l'Institut des Ingénieurs et enfin à l'école d'Artillerie de Saint-Pétersbourg.
Rejette le travail de Lobachevsky sur les géométries non-euclidiennes (article soumis à l'Académie des Sciences de Saint Pétersbourg).
La formule qui porte son nom fut découverte par Lagrange en 1762, puis redécouverte par Gauss en 1813 et par Green en 1825. Elle fut *démontrée* par Ostrogradski en 1831.