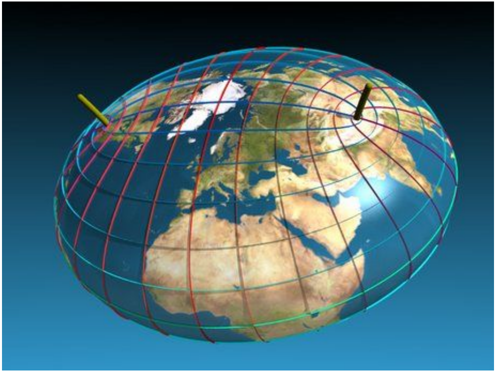
CM 2 - Composées et coordonnées

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Coordonnées elliptiques

Adresses utiles

À cette adresse :

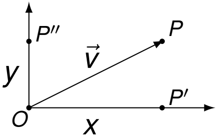
http://math.univ-lyon1.fr/
homes-www/borrelli/Espace_etudiant

Coordonnées du plan

On note $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

• On appelle **coordonnées cartesiennes** de P, le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Autrement dit, $x = \|\overrightarrow{OP'}\|$ et $y = \|\overrightarrow{OP''}\|$ sont les longueurs des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

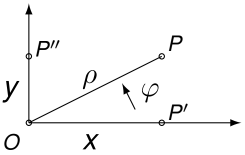


Coordonnées du plan

• On appelle **coordonnées polaires** de $P \neq O$ le couple $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ tel que $x = \rho\cos\varphi$ et $y = \rho\sin\varphi$.

En particulier,

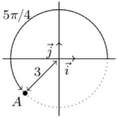
$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi \ \text{ t.q. } \tan\varphi = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ ou } \cot\varphi = \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0 \\ \quad (\text{par ex. } \varphi = \arctan\frac{y}{x} \text{ si } x, y > 0) \end{cases}$$



Exemples

Coordonnées polaires $\longrightarrow$ **dessin** $+$ **calculs avec formules** $\longrightarrow$ **coordonnées cartesiennes**

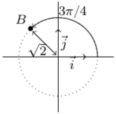
$$A\ \left\{\begin{array}{l}\rho = 3\\ \varphi = 5\pi/4\end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l}x = 3\cos(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ y = 3\sin(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

$$A = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

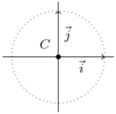
$$B\ \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{2}\\ \varphi = 3\pi/4\end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l}x = \sqrt{2}\cos(3\pi/4) = \frac{-\sqrt{2}^2}{2}\\ y = \sqrt{2}\sin(3\pi/4) = \frac{3\sqrt{2}^2}{2}\end{array}\right.$$

$$B = (-1, 1)$$

$$C\ \left\{\begin{array}{l}\rho = 0\\ \varphi = 3\pi/2\end{array}\right.$$



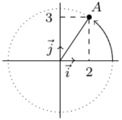
$$\left\{\begin{array}{l}x = 0\ \cos(3\pi/2) = 0\\ y = 0\ \sin(3\pi/2) = 0\end{array}\right.$$

$$C = (0, 0)$$

Exemples

Coordonnées cartesiennes $\longrightarrow$ **dessin** $+$ **calculs avec formules** $\longrightarrow$ **coordonnées polaires**

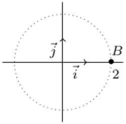
$A = (2, 3)$



$$\begin{cases} \rho = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\ \tan\varphi = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$A \begin{cases} \rho = \sqrt{13} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

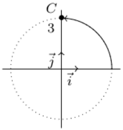
$B = (2, 0)$



$$\begin{cases} \rho = \sqrt{4+0} = 2 \\ \tan\varphi = \frac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \rho = 2 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

$C = (0, 3)$



$$\begin{cases} \rho = \sqrt{0+9} = 3 \\ \cos\varphi = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\varphi = \frac{3}{3} = 1 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$$

Coordonnées de l'espace

On note $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$.

• On appelle **coordonnées cartesiennes** de P, le triplet

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad \vec{v} = \overrightarrow{OP} \; = \; x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \; \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $x = \|\overrightarrow{OP'}\|$, $y = \|\overrightarrow{OP''}\|$ et $z = \|\overrightarrow{OP'''}\|$ sont les longueurs des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Coordonnées de l'espace

• On appelle **coordonnées cylindriques** de $P \neq (0,0,z)$, le triplet $(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

En particulier

$$\begin{cases} \rho = |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ z = z \end{cases}$$

Coordonnées de l'espace

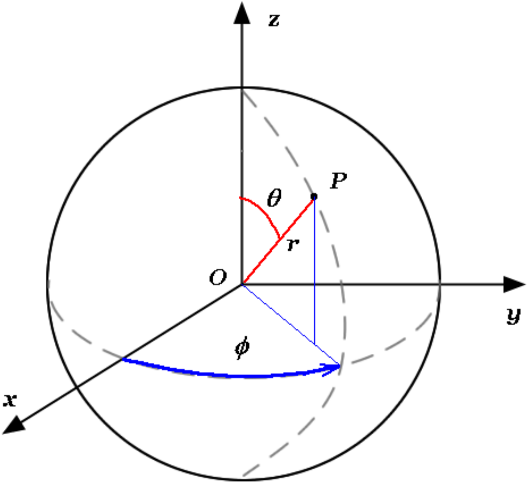
• On appelle **coordonnées sphériques** de $P \neq O$, le triplet $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times[0, \pi]$ tel que

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi \sin\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

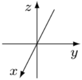
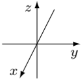
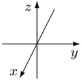
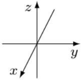
En particulier si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$,

$$\begin{cases} r = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \theta = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

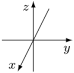
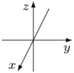
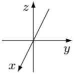
Coordonnées de l'espace



Exemples

Coordonnées cylindriques ou sphériques $\longrightarrow$	**dessin** $+$	**calculs avec formules** $\longrightarrow$	**coordonnées cartesiennes**
$A \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/3 \\ z = 2 \end{cases}$		$\begin{cases} x = 3\cos(\pi/3) = -\frac{3}{2} \\ y = 3\sin(\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z = 2 \end{cases}$	$A = (-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2)$
$B \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/4 \\ z = -3 \end{cases}$		$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ y = \sqrt{2}\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ z = -3 \end{cases}$	$B = (1, 1, -3)$
$C \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/2 \\ \theta = 3\pi/4 \end{cases}$		$\begin{cases} x = \sqrt{2}\ \cos(\pi/2)\ \sin(\pi/4) = 0 \\ y = \sqrt{2}\ \sin(\pi/2)\ \sin(\pi/4) = 1 \\ z = \sqrt{2}\ \cos(3\pi/4) = -1 \end{cases}$	$C = (0, 1, -1)$
$D \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \pi/3 \\ \theta = \pi/6 \end{cases}$		$\begin{cases} x = \cos(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{1}{4} \\ y = \sin(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ z = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$	$D = (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Exemples

Coordonnées cartesiennes	$\longrightarrow$ **dessin**	+ **calculs avec formules**	$\longrightarrow$ **coordonnées cylindriques**	+ **coordonnées sphériques**
$A=(-1,1,1)$		$\begin{cases}\rho=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\\ \tan\varphi=-1\\ r=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}\\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$	$A\begin{cases}\rho=\sqrt{2}\\ \varphi=3\pi/4\\ z=1\end{cases}$	$A\begin{cases}r=\sqrt{3}\\ \varphi=3\pi/4\\ \theta=\pi/6\end{cases}$
$B=(3,0,0)$		$\begin{cases}\rho=\sqrt{9+0}=3\\ \tan\varphi=\frac{0}{3}=0\\ r=\sqrt{9+0+0}=3\\ \cos\theta=\frac{0}{3}=0\end{cases}$	$B\begin{cases}\rho=3\\ \varphi=0\\ z=0\end{cases}$	$B\begin{cases}r=3\\ \varphi=0\\ \theta=\pi/2\end{cases}$
$C=(0,1,1)$		$\begin{cases}\rho=\sqrt{0+1}=1\\ \cos\varphi=0\\ \sin\varphi=1\\ r=\sqrt{0+1+1}=\sqrt{2}\\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$	$C\begin{cases}\rho=1\\ \varphi=\pi/2\\ z=1\end{cases}$	$C\begin{cases}r=\sqrt{2}\\ \varphi=\pi/2\\ \theta=\pi/4\end{cases}$

Opérations entre fonctions

Soient deux fonctions $f, g : D_f, D_g \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions suivantes :

somme :
$\big(f+g\big)(x_1,...,x_n) = f(x_1,,...,x_n) + g(x_1,...,x_n)$, de domaine $D_{f+g} = D_f \cap D_g$;

zéro : $0(x_1,...,x_n) = (0,...,0)$,
de domaine $D_0 = \mathbb{R}^n$;

opposée de f : $\big(-f\big)(x_1,...,x_n) = -f(x_1,...,x_n)$, de domaine $D_{-f} = D_f$;

produit de f par le scalaire λ :
$\big(\lambda f\big)(x_1,...,x_n) = \lambda f(x_1,...,x_n)$, de domaine $D_{\lambda f} = D_f$.

Opérations entre fonctions

Si f et g sont des fonctions réelles ($m = 1$), on définit également les fonctions suivantes :

produit : $(fg) : (x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)g(x_1, ..., x_n)$, de domaine $D_{fg} = D_f \cap D_g$;

un : $1(x_1, ..., x_n) = 1$, de domaine $D_1 = \mathbb{R}^n$;

inverse de f : $\left(\frac{1}{f}\right)(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{f(x_1, ..., x_n)}$, de domaine $D_{1/f} = \left\{(x_1, ..., x_n) \in D_f \mid f(x_1, ..., x_n) \neq 0\right\}$.

Exemples

On choisit $\lambda = 3$, $D_f = D_g = \mathbb{R}^2$ et

$$f(x,y) = x^2 - y^2, \quad g(x,y) = x^2 + y^2.$$

On a

$$\left[\begin{array}{l} (f+g)(x,y) = 2x^2 \\ \\ (3f)(x,y) = 3f(x,y) \\ \\ (fg)(x,y) = x^4 - y^4 \\ \\ \dfrac{1}{f}(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2} \quad \text{si } x \neq \pm y. \end{array}\right.$$

Une proposition

Proposition.– *Les opérations d'addition, produit par scalaire et multiplication entre fonctions à plusieurs variables ont les mêmes proprietés que leurs analogues entre fonctions à une variable (elles sont commutatives, associatives et distributives).*

En particulier, l'ensemble des fonctions à plusieurs variables $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *muni de l'addition et du produit scalaire est un* **espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie.**

Composition

Définition.– Soient deux fonctions

$$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad g : D_g \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p.$$

Si $I_f \subset D_g$, on définit la *composée* de f et g par

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : & D_f \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Cas particuliers

On note

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction réelle de deux variables,

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto g(z)$ une fonction reélle d'une variable,

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto h(u, v) = \big(h_1(u, v), h_2(u, v)\big)$ une fonction vectorielle

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ une fonction vectorielle d'une variable.

Cas particuliers

Les composées $g \circ f$, $f \circ h$ et $f \circ \gamma$ se calculent comme suit

- $(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$ i.e. on pose $z = f(x, y)$ et $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
- $(f \circ h)(u, v) = f(h(u, v))$ i.e. on pose $\begin{cases} x = h_1(u, v) \\ y = h_2(u, v) \end{cases}$ et $f \circ h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
- $(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$ i.e. on pose $\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \end{cases}$ et $f \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Un exemple

$$\left[\begin{array}{l} f(x,y) = x^2 - y \\ \\ g(z) = \exp z \\ \\ h(u,v) = (2u, u+v) \\ \\ \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} (g \circ f)(x,y) = g(x^2 - y) = \exp(x^2 - y) \\ \\ (f \circ h)(u,v) = f(2u, u+v) = 4u^2 - (u+v) \\ \\ (f \circ \gamma)(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin t \end{array}\right.$$

Changement de variables

Un changement de variable s'écrit comme une composée.

Proposition – *Soit*

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ u \mapsto h(u) = (x)$$

une application décrivant un changement de variables des $(x_1, ..., x_n)$ *vers les* $(u_1, ..., u_n)$ *et*

$$f : x = (x_1, ..., x_n) \longrightarrow f(x)$$

une fonction. Son expression dans les variables $u = (u_1, ..., u_n)$ *est donnée par la fonction composée*

$$\tilde{f} = f \circ h.$$

et on a

$$y = f(x) = f\big(h(u)\big) = \tilde{f}(u)$$

Coordonnées polaires

L'application qui décrit le changement de variable est

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,\infty[\times[0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\rho,\varphi) & \mapsto & h(\rho,\varphi)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi) \end{array}$$

La composée

$$\tilde{f}(\rho,\varphi)=(f\circ h)(\rho,\varphi)=f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi).$$

exprime f en fonction des coordonnées polaires (ρ,φ).

Coordonnées cylindriques

L'application qui décrit le changement de variable est

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\rho,\varphi,z) & \longmapsto & h(\rho,\varphi,z)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z) \end{array}$$

La composée

$$\tilde{f}(\rho,\varphi,z)=(f\circ h)(\rho,\varphi,z)=f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z).$$

exprime f en fonction des coordonnées cylindriques (ρ,φ,z).

Coordonnées sphériques

L'application qui décrit le changement de variable est

$$\begin{array}{rcl} h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,\varphi,\theta) & \mapsto & (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) \end{array}$$

La composée

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}(r,\varphi,\theta) & = & (f\circ h)(r,\varphi,\theta) \\ & = & f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta). \end{array}$$

exprime f en fonction des coordonnées sphériques (r,φ,θ).

Exemple

Passage en coordonnées polaire.– On cherche une expression de

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$$

en coordonnées polaires. Pour cela il suffit de faire la composée $f \circ h$ où $h(\rho, \varphi) = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)$ c'est-à-dire à remplacer x et y dans f par $\rho\cos\varphi$ et $\rho\sin\varphi$.

On obtient

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\rho, \varphi) &= f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \\ &= (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 + 2\rho\cos\varphi \\ &= \rho^2 + 2\rho\cos\varphi. \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé.– *Exprimer la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z^2\right)$ en coordonnées cylindriques et sphériques.*

Réponse.– En coordonnées cylindriques :

$$\tilde{f}(\rho, \varphi, z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) = \left(\rho, z^2\right)$$

En coordonnées sphériques :

$$\tilde{\tilde{f}}(r, \varphi, \theta) = f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$

$$= \left(r\,\sin\theta, r^2\cos^2\theta\right).$$